This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 000 663 950

LIBRARY OF THE
Leland Stanford Junior University

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XXI.

ANNALEN

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XXI.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT SIEBEN UND FÜNFZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. WIEDEMANN.

NEBST SECHS FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1884.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

A. 14419.

Inhalt.

Neue Folge. Band XXI.

Erstes Heft.

Seite

I. O. Frölich. Messungen der Sonnenwärme 1

II. A. W. Velten. Die specifische Wärme des Wassers . . 31

III. E. Pirani. Ueber galvanische Polarisation 64

IV. W. Hittorf. Ueber die Electricitätsleitung der Gase . . 90

V. A. Oberbeck. Ueber electrische Schwingungen; besonders über die Polarisationserscheinungen, welche durch dieselben hervorgebracht werden 139

VI. A. Toepler. Ueber die Bestimmung der magnetischen Horizontalintensität mit Anwendung der Wage 158

VII. W. v. Bezold. Ein einfacher Versuch zur Versinnlichung des Zusammenhanges zwischen der Temperatur eines glühenden Drahtes und der Zusammensetzung des von ihm ausgehenden Lichtes 175

VIII. E. Ketteler. Erwiderung auf Hrn. Voigt's Kritik . . . 178

IX. — Zur Dispersionstheorie des Lichtes 199

Geschlossen am 1. Januar 1884.

Zweites Heft.

Seite

I. S. Czapski. Ueber die thermische Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft galvanischer Elemente und ihre Beziehung zur freien Energie derselben 209

II. J. Kollert. Ueber das Verhalten der Flammen in electrischer Beziehung 244

III. F. Fuchs. Ueber eine Compensationsmethode zur Bestimmung des Widerstandes unpolarisirbarer Elemente 274

IV. E. Budde. Zur Theorie der thermoelectrischen Kräfte . . 277

V. H. Lorberg. Ueber Electrostriction 300

VI. B. Weinstein. Zur Berechnung des Potentials von Rollen 329

VII. A. v. Waltenhofen. Ueber ein lehrreiches Experiment, welches sich mit unsymmetrischen Thermosäulen ausführen lässt 360

VIII. C. Christiansen. Ueber die Emission der Wärme von unebenen Oberflächen 364

IX. A. Tschirch. Untersuchungen über das Chlorophyll und einige seiner Derivate 370

X. W. Holtz. Ein Vorlesungsversuch zum Beweise des Satzes, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit wächst, wenn kreisende Massen der Axe genähert werden 383

Geschlossen am 15. Januar 1884.

Drittes Heft.

I. R. Clausius. Zur Theorie der Kraftübertragung durch dynamoelectrische Maschinen 385

II. W. v. Bezold. Versuche über die Brechung von Strom- und Kraftlinien an der Grenze verschiedener Mittel . . . 401

III. K. Mack. Ueber das pyroelectrische Verhalten des Boracits 410

IV. E. Lommel. Die Fluorescenz des Kalkspathes 422

V. K. Wesendonck. Ueber die Spectra des Fluorsiliciums und des Siliciumwasserstoffes 427

VI. E. Ketteler. Zur Dispersion des Quarz 438

VII. F. Melde. Akustische Experimentaluntersuchungen . . . 452

Seite

VIII. P. Hoffmann. Ueber die Strömung der Luft durch Röhren von beliebiger Länge 470

IX. H. Kayser. Ueber die Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen 495

X. M. Planck. Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen 499

XI. K. Vierordt. Die Bestimmung der Schallstärken des Schallpendels 509

XII. Fr. Fuchs. Kleine akustische Versuche 513

XIII. P. Volkmann. Bemerkungen zu der zweiten Abhandlung des Hrn. C. Bohn „Ueber absolute Maasse“ 516

XIV. — Ueber die Dimension der magnetischen Masse im electrostatischen absoluten Maasssystem 518

XV. W. Voigt. Das G. Kirchhoff'sche Princip und die Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze circularpolarisirender Medien 522

XVI. — Duplik gegen Hrn. E. Ketteler 534

XVII. E. Wiedemann. Ueber den Apparat zur Untersuchung der Brechung des Lichtes von Ibn al Haitam 541

Geschlossen am 15. Februar 1884.

Viertes Heft.

I. G. Hansemann. Ueber die Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand 545

II. G. Kirchhoff. Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand 563

III. O. Rother. Ueber Capillaritätsbestimmungen von Salzlösungen und deren Gemischen 576

IV. H. C. Vogel. Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. Dr. O. Frölich über die Messung der Sonnenwärme . . . 615

V. E. Warburg. Ueber die Electrolyse des festen Glases . 622

VI. E. Cohn. Ueber die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für Electrolyte 646

VII. A. Oberbeck. Ueber electrische Schwingungen. Die magnetisirende Wirkung derselben 672

Seite

VIII. L. Grunmach. Absolute barometrische Bestimmungen unter Controle des Vacuums durch electrische Lichterscheinungen 698

IX. W. Voigt. Zur Geschichte der Nobili-Guébhard'schen Ringe 710

Berichtigungen 712

Geschlossen am 15. März 1883.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. Kollert, Fig. 1—13. — Fuchs, Fig. 14—17. — von Waltenhofen, Fig. 18—19.

Taf. II. Tschirch, Fig. 1—7.

Taf. III. Frölich, Fig. 1—4. — Pirani, Fig. 5. — Oberbeck, Fig. 6—10.

Taf. IV. Mack, Fig. 1—7. — Wesendonck, Fig. 8—10. — Melde, Fig. 11—19.

Taf. V. Hoffmann, Fig. 1—3. — Kayser, Fig. 4. — Planck, Fig. 5. — Grunmach, Fig. 6—7.

Taf. VI. Hansemann, Fig. 1—2. — Rother, Fig. 3—4. — Warburg, Fig. 5—8.

1884. ANNALEN № 1.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XXI.

I. *Messungen der Sonnenwärme; von O. Frölich.*

(Hierzu Taf. I Fig. 1–4.)

Die in der Meteorologie geltende Annahme, dass die Sonnenwärme constant sei, ist bei genauerer Betrachtung nicht zulässig.

Diese Ueberzeugung gewinnt man einerseits, indem man die Vorgänge auf der Sonnenoberfläche ins Auge fasst; diese Vorgänge zeigen lebhafte, oft acute und nie zur Ruhe kommende Veränderungen, welche, wie nachgewiesen ist, die Wärmeausstrahlung an einzelnen Theilen der Oberfläche (Flecken und Fackeln) sehr erheblich modificiren; diese Vorgänge müssen daher auch auf die Gesammtwärmestrahlung der Sonne einwirken.

Einen noch deutlicheren Beweis liefert der Verlauf der Temperatur an der Erdoberfläche. Das Mittel dieser Temperatur zeigt allerdings, wie bekannt, keine oder nur seculäre Aenderungen; der Verlauf der Temperatur im Einzelnen jedoch ist so unregelmässig, dass von einem eigentlich periodischen Verlaufe nicht die Rede sein kann.

Und doch müsste der Verlauf ein periodischer sein, wenn die Sonnenwärme constant wäre; dies ergibt sich unmittelbar aus dem Principe, dass, wenn die Ursachen periodisch wirken, der stationäre Endzustand ebenfalls periodisch sein muss.

Die Sonnenwärme, wie sie auf die Erde wirkt, ist eine genau periodisch wirkende Ursache (abgesehen von seculären Aenderungen), wenn die von der Sonne ausgehende Wärme constant ist; daher muss, wenn die übrigen primären Ursachen der Erdwärme constant sind, die Erdwärme selbst einen genau periodischen Verlauf zeigen,

trotz der beinahe unendlichen Complication, welche durch die Vertheilung von Land und Wasser, durch die Strömungen im Meere und in der Luft, durch Niederschlag und Verdunstung u. s. w. hervorgerufen werden.

Die übrigen primären Ursachen der Erdwärme sind aber constant, oder wenigstens nur geringen und sehr langsam verlaufenden Aenderungen unterworfen; dieselben bestehen nämlich in der Sternenwärme und dem aus dem Inneren der Erde dringenden Wärmestrome.

Die Vorgänge in der Atmosphäre, welche unmittelbar einen so bedeutenden Einfluss auf die Erdwärme ausüben, gehören nicht unter die primären Ursachen derselben. Dieselben sind vielmehr abhängig von der Erdwärme selbst und ihren primären Ursachen; die Natur dieser Abhängigkeit würde man feststellen können durch Aufstellung der Gleichung des Wärmegleichgewichts der Atmosphäre. Auch diese Vorgänge müssten völlig periodisch sein, wenn die Sonnenwärme constant wäre.

Seculäre Aenderungen in der Sonnenwärme, in den Elementen der Erdbahn, in der Sternenwärme, in der Natur der Oberfläche der Erde und der Atmosphäre und in dem aus dem Erdinneren dringenden Wärmestrome können hieran im wesentlichen nichts ändern; sie können nur, entsprechend ihrem eigenen Verlaufe, sehr langsam verlaufende Aenderungen der Elemente der Periode der Erdwärme zur Folge haben. Wenn dieselben auch verhindern, dass die Erdwärme im mathematischen Sinne periodisch sei, so können die betreffenden Grössen im Verhältniss zu jenen periodischen Elementen nur zweiter Ordnung sein, und durch sie wird man den Gegensatz zwischen dem wirklichen Verlaufe der Erdwärme und dem periodischen, welcher bei constanter Sonnenwärme stattfinden müsste, nie erklären können.

Diese Ueberlegungen, welche, so selbstverständlich sie klingen, doch bis jetzt noch wenig beachtet zu sein scheinen, veranlassten den Schreiber dieses, zu untersuchen, ob es nicht gelänge, in der von der Sonne ausgestrahlten Wärme Variationen nachzuweisen. Es wurden zu diesem Zwecke seit dem Jahre 1879 Beobachtungen und Versuche angestellt, welche

im Sommer 1883 zum Ziele führten; es gelang, von Ende Juni bis Mitte October 1883 sichere Messungen anzustellen, aus welchen hervorgeht, dass die von der Sonne ausgestrahlte Wärme erhebliche Schwankungen erleidet, und zwar wahrscheinlich in engem Zusammenhange mit der Fleckenentwickelung.

Ich gebe zunächst eine Uebersicht über die Entwickelung dieser Versuche und Beobachtungen, beschreibe dann die bei den letzten Messungen benutzten Methoden und Instrumente und theile schliesslich die Resultate jener Messungen mit.

Die Arbeit bildet eine Fortsetzung meiner Untersuchung über Temperatur des Weltraumes, Himmelswärme u. s. w.[1]); die Erfahrungen, welche in der letzteren namentlich über Construction und Behandlung der Thermosäule gesammelt worden waren, wurden bei der vorliegenden Arbeit unmittelbar benutzt.

In Betreff der Methode blieb beinahe keine Wahl, als, wie schon Pouillet gethan, die auf der Erde anlangende Sonnenwärme unter verschiedenen Höhenwinkeln zu messen und aus diesen Messungen auf diejenige Wärme zu schliessen, welche auf der Erdoberfläche anlangen würde, wenn keine Atmosphäre vorhanden wäre. Diese Methode ist dieselbe, welche ich in der citirten Arbeit zur Ermittelung der Sternenwärme benutzt habe.

Eine Vereinfachung dieser Methode durch Messung der Wärme des Gegenpunktes erwies sich bald als ungenau und jedenfalls für unser Klima nicht ausführbar.

Als Messinstrumente dienten die von mir construirte Thermosäule für Himmelswärme und das astatische Spiegelgalvanometer von Siemens und Halske.

Die Hauptschwierigkeit bildete die Herstellung eines sicheren Normalmaasses für strahlende Wärme. Nachdem Versuche mit einer glühenden Platinscheibe und mit electrischen Glühlichtern nicht zum Ziele geführt hatten,

1) O. Frölich, Repert. f. Meteor. 6. Nr. 1. Petersburg. 1876 und Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 8. p. 664. 1877.

griff ich zurück zu Flächen von constanter Emissionsfähigkeit, welche auf 100° erhitzt waren; dies Verfahren gab die erwünschte Sicherheit.

Die Messungen der Sonnenwärme selbst wurden angestellt: im September 1879 auf dem Gipfel des Faulhorns in der Schweiz, im Winter 1879/80 auf der königl. Sternwarte zu Berlin, von 1880 bis Ende 1882 in der Villa des Hrn. G. Hansemann und 1883 in einem Thurme zu Westend bei Berlin.

Ich ergreife hier die Gelegenheit, um Hrn. Director Förster und namentlich Hrn. G. Hansemann für die freundliche Gewährung der Gelegenheit zur Anstellung von Beobachtungen meinen herzlichen Dank auszusprechen.

a. Methode im allgemeinen.

Die Grundlage, auf welcher allein es möglich ist, den Einfluss der Atmosphäre zu eliminiren, bildet die Voraussetzung, dass die Schichtung der Atmosphäre während der Beobachtungszeit auf den verschiedenen von der Sonne durchstrahlten Wegen dieselbe sei; es folgt daraus, dass man nur an klaren Tagen beobachten kann, da eine gleichmässige Bewölkung kaum je vorkommt.

In Bezug auf die Art der Elimination ist das einfachste, die Atmosphäre als eine einzige, homogene Schicht anzunehmen, wie schon Pouillet gethan. Es ist alsdann, wenn W die von einer senkrecht zum Strahle gestellten Fläche empfangene Sonnenwärme, S der Werth derselben, welcher ohne Atmosphäre statthaben würde, z der Weg der Sonnenstrahlen durch die Atmosphäre, H die Höhe der Atmosphäre, R der Erdradius, h die Sonnenhöhe, α der Absorptionscoëfficient:

$$W = S.e^{-\alpha z},$$

$$\text{wo } z = -R\sin h + (R+H)\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+H}\right)^2\cos^2 h}.$$

Entwickelt man αz nach Potenzen von H/R, so erhält man:

$$\alpha z = \alpha H\left\{\frac{1}{\sin h} - \tfrac{1}{2}\frac{H}{R}\frac{1}{\sin^3 h} + \tfrac{1}{2}\frac{H^3}{R^3}\frac{1}{\sin^5 h} - \cdots\right\}$$

(gültig, solange $(2H/R\sin^2 h) < 1$);

Der Exponent enthält also (abgesehen von kleinen Sonnenhöhen) in erster Ordnung nur eine Constante: αH und ist nur in zweiter Ordnung von der Höhe der Atmosphäre abhängig. Die Bestimmung der Sonnenwärme S ist also im wesentlichen unabhängig von der Höhe der Atmosphäre.

Obschon diese Formel die von Pouillet angestellten Pyrheliometerbeobachtungen mit genügender Schärfe dargestellt hat, bleibt die Gültigkeit derselben für genauere Beobachtungen fraglich.

Betrachten wir zunächst den Einfluss der Schichtung der Atmosphäre, indem wir den Absorptionscoëfficienten für verschiedene Schichten als verschieden annehmen. Wenn z' der (laufende) Weg durch die Atmosphäre, so gilt beim Durchgang durch die Atmosphäre die Differentialgleichung:

$$\frac{dW}{dz'} = -\alpha W, \text{ wo } \alpha \text{ eine Function von } z';$$

es ist also: $$\log W = -\int \alpha\, dz',$$

und, da S der Werth für W, wenn $z' = 0$:

$$W = S \cdot e^{-\int_0^z \alpha \cdot dz'}.$$

Betrachten wir ferner die Einflüsse der Wellenlänge auf die Absorption, so müssen wir die Wärmen W und S in einzelne Wärmemengen, entsprechend den Wellenlängen λ_1, λ_2, λ_3 u. s. w. theilen, sodass:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$$

und $$W = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots$$

Für jede dieser Theilgrössen existirt eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{dW_1}{dz'} = -\alpha_1 \cdot W_1.$$

Die Gesammtwärme W nimmt also die Form an:

$$W = S_1 \cdot e^{-\int_0^z \alpha_1 \cdot dz'} + S_2 \cdot e^{-\int_0^z \alpha_2 \cdot dz'} + \ldots$$

Hierzu wäre noch der Einfluss der Reflexion hinzuzufügen.

Man sieht, dass zur Verwerthung der durch genauere Betrachtungen abgeleiteten, theoretischen Ausdrücke für die Beobachtungen unsere Kenntniss von der Art der Schichtung und namentlich der Absorption der einzelnen Schichten weit eingehender sein müsste, als in Wirklichkeit der Fall ist. Es musste daher dieser Weg verlassen und der rein empirische Weg eingeschlagen werden, d. h. man suchte aus einer grösseren Anzahl von Beobachtungen eine dieselben darstellende empirische Formel abzuleiten und diese alsdann der Bestimmung der Sonnenwärme S zu Grunde zu legen.

Wie weiter unten gezeigt wird, ergibt sich aus den 1881 und 1882 angestellten Messungen, dass dieselben, so weit ihre Genauigkeit reicht, durch eine einfache Exponentialfunction dargestellt werden, sodass:

$$\log W = \log S - a\zeta,$$

wenn $\zeta = z/H$, mit anderen Worten, dass die bereits von Pouillet benutzte einfache Annahme auch zur Darstellung unserer Beobachtungen genügt.

Es ist dadurch nicht ausgeschlossen, dass bei grösserer Regelmässigkeit der atmosphärischen Verhältnisse, durch welche auch die Regelmässigkeit der Beobachtungen erhöht wird, für den $\log W$ eine Abweichung von der geraden Linie gefunden wird; das Klima von Berlin wird jedoch die Entscheidung dieser Frage nie gestatten.

Bei den längeren Beobachtungsreihen, welche sich bis zu kleinen Werthen der Sonnenhöhe ausdehnen, wurde für diese letzteren meistens eine entschiedene Abweichung von der Geraden gefunden, jedoch bald nach der einen, bald nach der anderen Seite. Diese Abweichungen können nur in atmosphärischen Unregelmässigkeiten ihren Grund haben, namentlich darin, dass mit abweichender Sonnenhöhe die Entfernung der Gegenden, welche von den zum Instrumente gelangenden Strahlen durchmessen werden, vom Beobachter immer grösser wird; da auch bei klarsten und ruhigsten Tagen die Schichtung der Atmosphäre nur in einem gewissen, den Beobachter umgebenden Gebiete gleichmässig sein wird, so durchstreifen bei geringer Sonnenhöhe die Sonnenstrahlen auch Gebiete anderer Schichtung.

In solchen Fällen wurde als Regel festgehalten, die Beobachtungen bei geringen Sonnenhöhen nur so weit in Betracht zu ziehen, als sie nicht entschieden und erheblich von der Geraden abweichen; die Beobachtungen bei grösseren Sonnenhöhen wurden stets sämmtlich in Rechnung gezogen. Natürlich traten auch Fälle ein, in welchen man im Zweifel sein konnte, wie weit die Beobachtungen zu berücksichtigen seien; in diesen Fällen wurden die Beobachtungsreihen in verschiedener Ausdehnung berechnet, die Resultate weichen jedoch wenig voneinander ab.

Es versteht sich, dass nach dieser Methode eine Beobachtungsreihe eine Ausdehnung von wenigstens vier Stunden haben muss, wenn aus derselben der Werth der Sonnenwärme mit einiger Sicherheit abgeleitet werden soll; da unser Klima eine solche Gelegenheit nicht oft bietet, wirft sich die Frage auf, ob es nicht eine andere Methode gebe, welche weniger Zeit in Anspruch nimmt.

Eine solche Methode bietet vielleicht die Messung der Wärme des Gegenpunktes, d. h. des in der Verticalebene Sonne/Zenith und in derselben Höhe, wie die Sonne, liegenden Punktes. Es ist möglich, dass zwischen der Emission des Gegenpunktes und der auf der Erde gemessenen Sonnenwärme eine feste Relation besteht, mittelst welcher man aus einer einzigen Beobachtung den Einfluss der Atmosphäre eliminiren könnte.

Die Beobachtungen haben gezeigt, dass diese Methode in unserem Klima nicht anwendbar ist.

b. Beobachtungsmethode und Instrumente.

Die Wärmemessungen wurden mittelst Thermosäule und Spiegelgalvanometer ausgeführt.

Diese Methode scheint mir immer noch die sicherste zu sein, trotzdem in neuerer Zeit, namentlich in dem Bolometer von Langley, die Wärmemessung vermittelst Widerstandsbestimmung von dünnen Metallblättchen und Drähten vorgezogen wurde. Bei der letzteren Methode bildet allerdings die Vermehrung der Batterie ein Mittel, um die Empfindlichkeit scheinbar beliebig zu steigern; praktisch ist

jedoch dieser Umstand nicht von grossem Belang, weil zugleich auch die störende Wärmeentwickelung durch den Strom und die Peltier'sche Erscheinung gesteigert werden. Bei beiden Methoden lässt sich die Empfindlichkeit nicht weiter treiben, als bis die Temperaturschwankungen der Umhüllung des Apparates erheblich in Betracht kommen. Dies ist bei meiner Einrichtung der Fall, obschon auf das Constanthalten der Temperatur der Hülle alle Sorgfalt verwendet wird; und dass Langley diesen Umstand weniger zu beachten scheint, lässt mich vermuthen, dass seine Untersuchungen auch mit einer Thermosäule hätten ausgeführt werden können. (Bei meiner Einrichtung gibt, bei voller Empfindlichkeit, $^1/_{1000}$ der Sonnenwärme noch ca. 10 mm Ausschlag).

In der Construction der Thermosäule wurden nach und nach eine Reihe von Verbesserungen angebracht, welche meist bereits in meinem oben citirten Aufsatze beschrieben sind, und welche wir hier kurz zusammenstellen.

Zunächst ist es unmöglich, bei allen Beobachtungen dieser Art quantitativ richtige Resultate mit einer gewöhnlichen Melloni'schen Thermosäule zu erhalten. Da der Apparat im Freien oder wenigstens in einem offenen Raume stehen muss, sind für eine solche Säule die Einflüsse der Luftströmungen so gross, dass die Resultate völlig verzerrt werden; auch alles Umhüllen der Thermosäule mit schlechten Leitern, mit mehrwandigen Räumen u. s. w. beseitigt diese Fehlerquelle nicht. Die Thermosäule muss vielmehr gänzlich von der Luft abgeschlossen und mit Ausnahme der Wärme empfangenden Fläche von einer Fläche mit möglichst constanter Temperatur umgeben sein.

Die Figur auf p. 9 und Fig. 1 Taf. I geben eine Ansicht der zu meinen Beobachtungen verwendeten Thermosäule mit Gestell und einen Querschnitt derselben.

Die aus Stäbchen bestehende Säule ist zunächst vermittelst Korkstückchen in einem durchlöcherten Horngummirohr gefasst und dieses durch zwei Metallringe in einem innen geschwärzten Kupferrohre befestigt; dieses letztere ist hinten durch Kupferblech, vorn durch eine in eine Metallhülse kalt eingekittete, polirte Steinsalzplatte geschlossen. An das

Rohr ist der gebräuchliche Trichter angelöthet; Trichter und Rohr stecken in einem weiten Blechcylinder, in welchem durch gleichmässiges Durchfliessen von Wasser eine möglichst constante Temperatur gehalten wird.

Bereits in meiner früheren Arbeit hatte sich gezeigt, welch erheblichen Einfluss die vom Trichter ausgestrahlte Wärme, auch bei bester Politur, auf die Säule ausübt; man war daher genöthigt, denselben dem Systeme constanter Temperatur einzuverleiben.

Seitlich ist in jenes Kupferrohr ein zweites, engeres Kupferrohr eingesetzt, welches nach aussen führt und durch einen Gummipfropfen verschlossen ist, und welches die Zuleitungen und das rechtwinklig gebogene Thermometer auf-

nimmt. Das erste und das letzte Stäbchen der Säule sind mit federnden Neusilberblechen verbunden, in welche die kupfernen Zuleitungen eingeschraubt werden; von den letzteren führen Kupferdrähte zu kupfernen Klemmen und von diesen Kupferdrähte zum Galvanometer, sodass von den Neusilberblechen an der ganze Stromkreis aus Kupfer besteht (abgesehen von den im Beobachtungsraume eingeschalteten Neusilberwiderständen).

Steinsalzplatte und Thermosäule lassen sich durch besondere Vorrichtungen leicht herausnehmen und wieder einsetzen.

Die Trichteröffnung wird durch einen hohlen Metalldeckel verschlossen, in dessen Mitte ein ebenfalls durch einen Hohldeckel verschliessbares Loch angebracht ist; der Querschnitt des Loches ist etwas kleiner, als die Stirnfläche der Thermosäule, sodass parallel durch das Loch einfallende Strahlen diese Stirnfläche nicht ganz bedecken.

Bei den in Rede stehenden Beobachtungen wurde nur der kleine Deckel geöffnet, sowohl bei der Sonne als dem Normalmaasse, die Reflexion des Trichters also nicht benutzt.

Das Innere des grossen Blechcylinders, sowie die beiden Hohldeckel werden fortwährend von Wasser durchflossen, welches aus einem grösseren Behälter strömt und durch eine Tretpumpe wieder in denselben zurückgebracht wird. Für die Sicherheit der Messungen ist nur nöthig, dass die Temperatur des die Säule umgebenden Hohlraumes überall dieselbe sei; diese Temperatur darf sich ändern, nur muss die Aenderung in allen Theilen des Hohlraumes gleichmässig und möglichst langsam vor sich gehen. Die Langsamkeit der Aenderung lässt sich durch Vermehrung der Wassermenge beliebig steigern. Die ganze Einrichtung gestattet, bei Aufstellung der Thermosäule im Freien, die Sonnenwärme bis auf wenige Tausendstel, die Himmelswärme bis auf 1 – 2 Proc. genau zu messen.

Der die Thermosäule enthaltende Blechcylinder ist theodolithartig montirt, mit zwei Drehungsaxen und Mikrometerschrauben, sodass die Thermosäule auf jeden Punkt am Himmel eingestellt werden kann. Für Beobachtungen der Sonne wird auf die Vorderfläche des Cylinders ein den Blech-

cylinder umgebender Holzdeckel aufgesteckt, in welchem zwei Linsen, eine grössere und eine kleinere, eingesetzt sind.

Die kleinere dient zur genauen Einstellung der Säule auf die Sonne, indem das von derselben erzeugte Sonnenbildchen auf ein mit einem Kreuz versehenes, hinten am Blechcylinder befestigtes Blechtäfelchen geworfen und während der Beobachtung mit Hülfe der Mikrometerschrauben auf dem Kreuz genau festgehalten wird.

Die grössere Linse dient zur objectiven Beobachtung der Umgebung der Sonne nach Art der Camera obscura; das Bild derselben wird auf einem weissen Schirm entworfen, der an der Stelle des Sonnenbildes ein Loch besitzt, sodass das Auge durch das Sonnenbild nicht geblendet wird, und man vorbeiziehende Wolken deutlich verfolgen kann. Durch diese Vorrichtung ist man im Stande, auch bei erheblicher Bewölkung in den kurzen Zeiträumen, während welcher die Sonne frei ist, noch Beobachtungen zu erhalten.

Bei Beobachtungen im Freien (Sonne oder Himmel) wird über die Thermosäule und ihr Gestell ein hölzernes Häuschen gestülpt, welches nach der Beobachtungsseite hin, entsprechend der Spalte einer astronomischen Kuppel, eine Rolljalousie mit runder Oeffnung besitzt, welche letztere vor die Oeffnung der Thermosäule gebracht wird.

Die Construction der Thermosäule selbst wurde in mehrfacher Beziehung verbessert.

In der gewöhnlichen Combination Antimon-Wismuth: wurde das Antimon durch die zuerst von Noë für andere Zwecke eingeführte Legirung Zink-Antimon ersetzt, wodurch sich die electromotorische Kraft auf ungefähr das Dreifache erhöht. Das Giessen dünner Stäbchen dieser Legirung ist nicht ohne Schwierigkeit wegen ihrer Sprödigkeit; es wurden deshalb beim Giessen Eisendrähte in die Form gelegt, welche in dem gegossenen Stab einen festen Kern bildeten, ohne an den Enden des Stabes an die Oberfläche zu treten.

Das Löthen der Stäbchen ist, wie es gewöhnlich geschieht, nicht leicht, und die Construction der Löthstelle nicht rationell, weil die Schnelligkeit der Wirkung beeinträchtigt wird; die Löthstelle erstreckt sich nämlich ge-

wöhnlich von der Stirnfläche um mehrere Millimeter nach dem Innern zu, die Wärme muss daher diese Länge erst durchlaufen, ehe die volle Wirkung eintritt. Dieser Uebelstand wurde beseitigt, indem die Löthstellen aus dünnen Kupferblättchen hergestellt wurden, welche über die Stirnflächen der Stäbchen, ohne diese Flächen zu bedecken, gelegt und mit diesen Flächen verlöthet wurden; die einfallende Wärme trifft alsdann Anfang und Ende der Löthstelle zugleich, und die Wirkung erfolgt rascher.

Endlich möge hier ein Vorurtheil erwähnt werden, welches ich vielfach verbreitet gefunden habe, dass nämlich eine Thermosäule um so empfindlicher sei, je mehr Elemente sie zähle. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dasselbe Maximum der Wirkung auf den Magnet eintritt, wenn der Widerstand der Thermosäule gleich demjenigen des Galvanometers sei (wenn die Räume der Thermosäule und der Galvanometerwickelung gegeben sind); das Maximum ist bei Befolgung dieser Regel nur abhängig von der Grösse dieser Räume; man kann also mit wenigen Elementen dieselbe Wirkung erzielen, wie mit vielen, wenn man die Wickelung des Galvanometers nach der Thermosäule einrichtet.

Die von mir benutzte Thermosäule hat ca. 225 qmm Stirnfläche und besteht aus 9 Stäbchen mit je 25 qmm Stirnfläche; die Länge ist absichtlich gross gewählt. Beide Stirnflächen sind mit dem Russ einer schwachen Petroleumflamme geschwärzt.

Melloni und seine Nachfolger haben, soviel mir bekannt, stets nur den ersten Ausschlag des Galvanometers beobachtet, nachdem die Thermosäule der Wärmequelle ausgesetzt war; diese Methode kann Ungenauigkeiten herbeiführen, wenn die Nadel beim Abziehen des Schirmes bereits in Bewegung ist, oder wenn das Abziehen nicht sehr rasch geschieht. Bei meinen Beobachtungen wurde stets der stationäre Zustand beinahe oder ganz abgewartet, was allerdings mindestens zwei Minuten dauerte.

Ist die Wärmequelle beständig veränderlich, wie die Sonnenwärme, so besteht zwischen der Wärmequelle und der Ablenkung des Galvanometers stets eine kleine Verzögerung,

so dass zu der Ablenkung eine Correction hinzugefügt werden muss, um den dem augenblicklichen Werth der Sonnenwärme entsprechenden Werth der Ablenkung zu erhalten. Diese Correction ist in der oben erwähnten Abhandlung abgeleitet: wenn s die Ablenkung, δ das logarithmische Decrement der Thermosäule, t die Zeit, so ist die dem augenblicklichen Werth der Wärmequelle entsprechende Ablenkung S:

$$S = s + \frac{1}{\delta}\frac{ds}{dt};$$

dieselbe lässt sich also aus der augenblicklichen Ablenkung und den der Zeit nach benachbarten Ablenkungen berechnen, wenn δ bekannt ist.

Bei den Messungen der Sonnenwärme und des Normalmaasses kam diese Correction wenig in Betracht; es wurde deshalb die Ablenkung nach $2^1/_2$ Minuten als Maass genommen.

Um die Veränderung des Widerstandes des Stromkreises mit der Temperatur möglichst gering zu machen, wurde stets soviel Neusilberwiderstand eingeschaltet, als es die Empfindlichkeit der Messung erlaubte; bei der Bestimmung der Sonnenwärme machte der Neusilberwiderstand ca. $^{30}/_{31}$, bei der Normalbestimmung ca. $^1/_2$ des Gesammtwiderstandes aus.

Es muss noch eine merkwürdige Erscheinung erwähnt werden, welche unaufgeklärt blieb, aber eine Eigenschaft der Thermosäule zu sein scheint; ich möchte dieselbe die negative Schwankung nennen.

Je genauer die Messungen wurden, desto mehr zeigte sich, dass die Ablenkung der Thermosäule bei der Einwirkung einer Wärmequelle nicht asymptotisch einem stationären Werth zustrebte, sondern nach zwei bis drei Minuten ein Maximum erreichte und von da an langsam abnahm, und umgekehrt, dass nach dem Schliessen des Deckels die Ablenkung nicht asymptotisch auf Null zuging, sondern erheblich über Null hinaus ins Negative, dort nach ca. fünf Minuten ein Minimum erreichte und dann von der negativen Seite allmählich zum Nullpunkt zurückkehrte. Es ist zu bemerken, dass die Abweichung bei der Einwirkung einer Wärmequelle

nur Bruchtheile eines Procentes, die Minimumsablenkung beim Rückgang dagegen mehrere Procente der ganzen Ablenkung betrug.

Die Ursache dieser Erscheinung liegt nicht in der Steinsalzplatte, auch gelangt man durch theoretische Betrachtung der Wärmevorgänge in der Thermosäule nicht zu einer Erklärung. Es scheint, als ob sich dieselbe erst nach und nach während des vierjährigen Gebrauches ausbildete; eine Neusilber-Eisensäule zeigt die Erscheinung nicht; es ist daher möglich, dass dieselbe mit Moleculareigenschaften der verwendeten Metalle: Wismuth und Zink-Antimon zusammenhängt.

Da diese Erscheinung sich nicht beseitigen liess, so wurde sie als eine Eigenschaft der Thermosäule in Rechnung gezogen, indem, wie oben bemerkt, bei Einwirkung einer Wärmequelle die Maximumsablenkung (nach $2^1/_2$ Minuten) als Maass angenommen wurde.

Wie sich denken lässt, war die Thermosäule nie ganz ohne Strom, weil bei aller Vorsicht die Temperatur des Wassers im Blechcylinder sich nicht an allen Stellen gleich halten lässt; bei Bestimmung der Sonnenwärme sind diese Eigenströme der Säule gering wegen des grossen, eingeschalteten Widerstandes, bei der Normalbestimmung dagegen bilden dieselben die Hauptschwierigkeit. Als Regel galt, nicht eher die Säule einer Wärmequelle auszusetzen, als bis der Eigenstrom der Säule constant geworden war oder einen bestimmten, langsam verlaufenden Gang angenommen hatte.

In Bezug auf das Spiegelgalvanometer musste verlangt werden: grosse Empfindlichkeit und möglichst grosse Constanz derselben, genügende Constanz des Nullpunktes, möglichst grosse Unempfindlichkeit gegen Erschütterungen des Hauses und genaue Proportionalität des Ausschlages. Diese Bedingungen in ihrer Gesammtheit werden meiner Ansicht nach nur durch das astatische Spiegelgalvanometer von Siemens und Halske erfüllt.

Die grösste Empfindlichkeit wird nur erreicht, wenn das Magnetsystem astatisch und jeder der beiden Magnete von Stromrollen umgeben ist; wird dieselbe Empfindlichkeit

bei einem einfachen Magnet durch starke Astasirung vermittelst eines Richtmagnetes erreicht, so verliert man die genügende Constanz des Nullpunktes und der Empfindlichkeit. Um beim astatischen System gutes Zurückgehen auf Null und genügende Constanz der Empfindlichkeit (während eines halben Tages wenigstens) zu behalten, darf die Astasie einen gewissen geringen Grad nicht überschreiten; beim Siemens-Halske'schen Instrument ist dies der Fall, der Richtmagnet dient bei demselben nur dazu, um die Astasie wenig zu vermehren oder zu vermindern und die Ruhelage einzustellen.

In Bezug auf Dämpfung hat man die Wahl zwischen electrischer Dämpfung durch Kupfermassen und Dämpfung durch Luftwiderstand wie beim Thomson'schen Instrument.

Die letztere Art hat den Nachtheil, dass die Dämpfungsflügel sehr lang werden im Verhältniss zu der Länge der Magnete; wenn ausserdem die Magnete so leicht gewählt werden, wie beim Thomson'schen Instrument, so leidet infolge dessen die Stabilität gegen Schwingungen um eine horizontale Axe, welche namentlich durch Erschütterungen hervorgerufen werden. Diese Schwingungen würden an und für sich nur verticale Bewegungen des Scalenbildes hervorrufen; da sie aber stets von Drehungen um die verticale Axe begleitet sind, so treten auch horizontale Bewegungen des Scalenbildes hinzu, welche die Messung stören.

Die Stabilität des Scalenbildes gegen Erschütterungen wird wesentlich vermehrt durch Weglassung der Luftflügel, Vermehrung des Gewichtes der Magnete und Anbringung des Spiegels in der Mitte des Magnetsystemes (nicht oben oder unten). Die hiermit zusammenhängende Forderung der electrischen Dämpfung ferner wird bekanntlich am besten durch Anwendung der Siemens'schen Glockenmagnete erfüllt.

Eine starke Dämpfung mit Annäherung an den aperiodischen Zustand wird jetzt allgemein angewendet; die Siemens-Halske'schen Instrumente machen bei normalem Arbeiten ca. drei Schwingungen, die Schwingungsdauer beträgt ca. 7 Sec., die Beruhigungszeit ca. 20 Sec.

Für genaue Arbeiten scheint mir ferner das namentlich durch Thomson eingeführte objective Projiciren der Drehungen des Magnetes bedenklich; diese Methode kann nie die Genauigkeit und Sicherheit der Fernrohrablesung erreichen.

Unzweckmässig ist ferner die Anwendung von Hohlspiegeln, welche ihren Ursprung nur in der Schwierigkeit, sehr dünne Planspiegel zu schleifen, haben, da ein Hohlspiegel nur bis auf eine gewisse Entfernung hin ein Bild liefert.

Die Entfernung der Scala vom Spiegel sollte nie weniger als 2 m betragen, wenn man nicht auf die charakteristischste Eigenschaft des Spiegelgalvanometers, die Proportionalität des Ausschlages, verzichten will; daraus folgt aber die Nothwendigkeit der Anwendung von Planspiegeln von genügender Grösse, und hieraus wieder die genügende Masse und Festigkeit des Magnetsystemes. Ferner ist es zweckmässig, die Verschiedenheit des Proportionalitätsfactors auf beiden Hälften der Scala, welche selten fehlt, durch Torsion des Fadens zu beseitigen.

Alle diese Rücksichten sind in dem Siemens-Halske'schen Instrument verwerthet und in gegenseitiges Gleichgewicht gebracht, und ich bezweifle, dass mit einer anderen Construction ähnliche Resultate erzielt werden. Den besten Beweis dieser Behauptung liefern die Beobachtungen von Kirchhoff und Hansemann[1]), in welchen sogar die kleinen, elastischen Nachwirkungen entsprechenden Grössen so in Rechnung gezogen werden konnten, dass eine Sicherheit des Ausschlages auf 0,1 mm erreicht wurde.

Bei meinen Beobachtungen war eine Sicherheit von etwa 0,5 mm des Ausschlages durchaus genügend, und mehr zu erreichen wäre auch bei der Aufstellung des Galvanometers im ersten oder zweiten Stock und bei der schädlichen Einwirkung der Vorgänge auf benachbarten Strassen nicht möglich gewesen.

Es erübrigt noch, zu erwähnen, in welcher Weise die Sonnenhöhe und das Wegverhältniss ζ (Weg des Strah-

1) Kirchhoff u. Hansemann, Wied. Ann. **9.** 1880.

les durch die Atmosphäre, Höhe der Atmosphäre) bestimmt wurden. Obschon die Construction des Instrumentes auch gestattet, rohe Messungen der Sonnenhöhe vorzunehmen, wurde vorgezogen, die Zeitbestimmung mittelst einer auf bürgerliche Zeit genau eingestellten Uhr zu Grunde zu legen. Für die Berechnung der Sonnenhöhe aus der Zeit wurden die Tafeln von Bremiker (in dessen fünfstelligen Logarithmen) benutzt. Um das Wegverhältniss ζ aus der Sonnenhöhe zu bestimmen, wurden die p. 4 gegebenen Formeln benutzt, wobei für die Höhe der Atmosphäre eine Annahme gemacht werden musste; es wurde, mit Pouillet, angenommen: $H/R = {}^1/_{90}$.

c) Normalmaass.

Es wurden zuerst Versuche angestellt, um einen leuchtenden Körper als Normalmaass für die strahlende Wärme zu benutzen, mit einer weissglühenden Platinscheibe und mit electrischen Glühlichtern.

Eine Platinscheibe von 30 mm Durchmesser, 10 mm Dicke und 160 gr Gewicht, mit angeschmiedeter Oese, wurde in angemessener Entfernung von der Säule über einer Benzingaslampe frei hängend in Weissgluth versetzt, ihre Wärmestrahlung wurde mittelst der Säule gemessen, die Scheibe unmittelbar nachher in ein Wassercalorimeter geworfen und dessen Temperaturerhöhung bestimmt.

Die Oberfläche der Scheibe wurde vor jedem Versuch in ganz bestimmter Weise mit Königswasser geätzt, sodass sie stets dasselbe (krystallinische) Aussehen zeigte.

Die Benzingaslampe war eine Modification einer im Handel befindlichen, auf dem Princip des Aeolipil's beruhenden Construction; dieselbe lieferte eine kräftige Hitze von genügender Constanz.

Das Calorimeter bestand in einem Blechgefässe mit Wasser, Thermometer und Rührvorrichtung; als letztere wurde ein conisches Blech benutzt, das sich auf und nieder bewegen liess. Die Platinscheibe wurde, nach Messung der Strahlung, durch eine selbstthätige, mechanische Vorrichtung in das

conische Blech geworfen, rutschte in die Mitte desselben und setzte dabei eine Klappe in Bewegung, welche sich über der Platinscheibe schloss und das Aufsteigen von Luft- und Wasserdampfblasen verhinderte.

Diese Methode schien, obschon sie längere Zeit bearbeitet wurde, höchstens eine Genauigkeit von 3 bis 4 % zu geben, sodass dieselbe verlassen werden musste.

Eine bessere Aussicht bot die Benutzung von electrischen Glühlichtern in Verbindung mit der Messung der electrischen Energie.

Ein in einem luftleeren Glasgefäss eingeschlossener, durch den electrischen Strom glühend gemachter Kohlenfaden strahlt eine Wärmemenge aus, welche stets proportional der in demselben verbrauchten electrischen Energie ist, unabhängig von den Wellenlängen der Ausstrahlung und von Veränderungen des Kohlenfadens. Zur Messung der electrischen Energie ist es nöthig, die Potentialdifferenz an den Enden des Kohlenfadens und die Stromstärke in einem sicheren Maass zu bestimmen; diese Messung ist verhältnissmässig sicher und leicht, da es eigentlich nur darauf ankommt, die Empfindlichkeit des Spiegelgalvanometers zu bestimmen. Es liegt hierin also ein werthvolles Princip, um Maasse für strahlende Wärme und vielleicht auch für Licht aus den electrischen Maassen abzuleiten, welche von Veränderungen des strahlenden Körpers unabhängig sind.

Leider scheiterten auch diese Versuche, und zwar wahrscheinlich daran, dass der Kohlenfaden allmählich zerstäubte, der Abgang sich an das Glas ansetzte und dessen Absorption vermehrte. Sichtbar war dieser Kohlenüberzug allerdings nicht, aber der Widerstand der Kohle vermehrte sich fortwährend, und das Verhältniss der Ausstrahlung zu der electrischen Energie verminderte sich. Da die Absorption im Glase sich auf keine Weise bestimmen lässt, so lässt sich diesem Uebelstande nicht begegnen. Es wäre aber möglich, dass Platinfäden diese Zerstäubung nicht zeigen; ich behalte mir diesbezügliche Versuche vor.

Ohne die Versuche mit leuchtenden Körpern aufzugeben, wurde zur Fläche von 100° Temperatur gegriffen.

Ein flaches, viereckiges Gefäss von dünnem Kupferblech wurde von einem regelmässigen Strom von Wasserdampf durchzogen; vor die Oeffnung der Thermosäule wurde ein Schlitten von starkem Messingblech angebracht, auf dem sich die „Dampfscheibe" in sicherer Weise fest klemmen liess, und zwar so, dass durch Drehung die eine oder die andere Fläche der Oeffnung der Säule zugewendet werden konnte.

In Bezug auf die Präparirung der Flächen ergab sich, dass der Russ einer kleinen, mit Kamin versehenen Petroleumflamme sich gut zur Schwärzung, in beliebiger Dicke, von strahlenden Flächen eignet, dass es aber kaum möglich ist, diese Schwärzung stets in genau gleicher Weise auszuführen. Es wurde ein besonderes Russlämpchen und eine Vorrichtung construirt, mittelst welcher der Russ gleichmässig in einer von der Mitte der Fläche ausgehenden Spirale aufgetragen wurde; aber es gelang nicht, zweimal hinter einander genau dieselbe Berussung zu erhalten.

Es wurde daher die eine Fläche der Dampfscheibe geritzt und ein schwarzer, matter Lack (unter dem Namen: Lack von Dr. Ascher im Handel) aufgetragen; die andere Fläche wurde ebenfalls geritzt und mit sogenannter Champagnerkreide eingerieben. Jener Lack gibt allerdings nicht soviel Emission, als der Russ; er sitzt aber fest und ändert sich nicht mit der Zeit oder durch Erwärmung.

Durch Zugrundelegen zweier ganz verschiedener Flächen wurde man unabhängig von deren etwaigen Veränderungen; denn es ist nicht anzunehmen, dass sich deren Strahlungsvermögen in gleicher Weise ändert, also müssen ihre Strahlungsvermögen im Laufe der Zeit gleich bleiben, wenn das Verhältniss derselben gleich bleibt; das letztere war aber bis jetzt, während eines halben Jahres, der Fall.

Der einzige Uebelstand bei Anwendung von Flächen bei 100° C. besteht darin, dass hierbei die Empfindlichkeit der Thermosäule bereits ziemlich in Anspruch genommen wird, man also wenig Neusilberwiderstand einschalten kann. Hierdurch fallen die Eigenströme der Thermosäule, welche von ungleicher Temperaturvertheilung in deren Um-

gebung herrühren, und die Temperaturcorrection der Widerstände mehr ins Gewicht.

Eigentlich genügt es, vor oder nach der Sonnenbeobachtung eine Normalbestimmung mittelst der Dampfscheibe auszuführen; es ist aber wichtig, die Empfindlichkeiten der Thermosäule und des Galvanometers zu trennen, um Uebersicht über deren Veränderungen mit der Zeit zu gewinnen.

Zu diesem Behufe wurde die Empfindlichkeit des Galvanometers jedesmal gesondert bestimmt, mittelst vierer hart gelötheter Thermoelemente, zweier aus Neusilber-Eisen und zweier aus Neusilber-Kupfer, deren Löthstellen auf 0° und dem Siedepunkte des Wassers erhalten wurden. Auch hier ist nicht anzunehmen, dass sich diese beiden Combinationen im Laufe der Zeit gleich ändern; da aber das Verhältniss der bez. electromotorischen Kräfte bis jetzt ungeändert blieb, so müssen auch die electromotorischen Kräfte selbst gleich geblieben sein.

Die beschriebene Normalbestimmung gibt eine Sicherheit von wenigstens 1 Procent.

d) Beobachtungen.

Wir theilen nun die Beobachtungen in ihrer zeitlichen Reihenfolge mit.

Auf dem Faulhorn gelang es, trotz dreiwöchentlicher Anwesenheit, nur eine einzige kleine Beobachtungsreihe zu machen.

24. September 1879.

Mittlere Berner Zeit:	9^h31^m	9^h51^m	10^h4^m	10^h24^m	10^h44^m	11^h17^m	11^h44^m	11^h56^m
Wegverhältn. ζ:	1,749	1,700	1,649	1,584	1,536	1,486	1,470	1,492
Ausschlag an d. Thermosäule:	283	288	285	290	289	296	296	301

Auf der Berliner Sternwarte wurde an Wintertagen beobachtet; es gelang jedoch nicht, eine einzige gute Beobachtungsreihe zu erhalten, namentlich wegen der die Stadt überdeckenden Dunst- und Rauchzone.

Auf der Villa des Hrn. G. Hansemann wurde eine Anzahl guter Beobachtungsreihen gewonnen, theilweise mit Beobachtungen des Gegenpunktes, welche wir im Folgenden zusammenstellen. Es bedeuten: t die mittlere Berliner Zeit,

$\zeta = z/H$ das Wegverhältniss, W die beobachtete Sonnenwärme, G die beobachtete Wärme des Gegenpunktes, Z diejenige des Zeniths; (bei Beobachtung von G und Z war viel weniger Widerstand eingeschaltet als bei W.)

Der Höhenwinkel des Gegenpunktes ist stets gleich demjenigen der unmittelbar vorhergehenden Sonnenbeobachtung.

12. Juli 1881. Nachmittags.

	t:	4^h36^m	4^h53^m	5^h8^m	5^h23^m	6^h3^m	6^h18^m	6^h33^m	6^h48^m	7^h3^m
	ζ:	1,920	2,073	2,237	2,418	3,184	3,536	4,016	4,624	5,656
	W:	304	295	284	265	232	215	185	156	119
log	W:	4829	4698	4533	4232	3655	3324	2672	1931	0755

6. August 1881. Morgens.

Sonne.

t:	5^h24^m	5^h54^m	6^h25^m	6^h53^m	7^h23^m	8^h28^m	8^h54^m	9^h23^m
ζ:	6,384	4,536	3,424	2,792	2,315	1,740	1,601	1,479
W:	43,5	71	111,5	127,5	162,0	208,5	193,5	198,5
log W:	1,6385	1,8513	2,0472	2,1055	2,2095	2,3192	2,2867	2,2978

Gegenpunkt.

t:	6^h5^m	6^h35^m	7^h4^m	7^h33^m	8^h37^m	9^h5^m
G:	37	50	46,5	33,5	10	−6,5

Zenith.

t:	5^h42^m	6^h14^m	6^h43^m	7^h12^m	7^h43^m	8^h44^m	9^h13^m
Z:	−171	−109	−59	−28,5	−5	+57	+68

8. October 1881. Nachmittags.

Sonne.

t:	12^h42^m	1^h27^m	1^h58^m	2^h32^m	3^h7^m	3^h37^m	4^h8^m	4^h19^m	4^h32^m
ζ:	1,931	2,084	2,264	2,584	3,456	3,768	4,960	5,592	6,544
W:	302	291	278,5	263,5	241,5	209	153	134	108
log W:	4800	4639	4448	4208	3829	3201	1847	1271	0334

Gegenpunkt.

t:	12^h7^m	1^h42^m	2^h17^m	2^h53^m	3^h24^m	3^h55^m
G:	−307	−294	−247	−233,5	−181	−130

Zenith.

t:	12^h16^m	1^h49^m	2^h24^m	3^h0^m	3^h31^m	4^h2^m
Z:	−376	−369,5	−376,5	−370	−376	−372

9. October 1881. Nachmittags.

Sonne.

t:	12^h33^m	1^h8^m	1^h38^m	2^h6^m	2^h36^m	3^h6	3^h36^p
ζ:	1,957	2,054	2,195	2,408	2,720	3,184	3,912
W:	256	251,5	244	236	220	198,5	171
log W:	4082	4005	3874	3729	3424	2978	2330

Gegenpunkt.

t:	12^h54^m	1^h25^m	1^h55^m	2^h25^m	2^h54^m	3^h23^m
G:	−196,5	−202	−179	−163,5	−135,5	−104

Zenith.

t:	1^h0^m	1^h32^m	2^h1^m	2^h31^m	3^h0^m	3^h30^m
Z:	−277	−285	−296	−296,5	−302	−303,5

10. November 1881. Nachmittags.

Sonne.

t:	12^h26^m	1^h9^m	1^h40^m	2^h13^m	2^h41^m	3^h8^m
ζ:	2,880	3,136	3,472	4,056	4,872	6,128
W:	280	278	265,5	235	199	150
log W:	4472	4440	4240	3711	2989	1761

Gegenpunkt.

t:	12^h47^m	1^h22^m	1^h58^m	2^h28^m	2^h55^m	3^h22^m
G:	−119,5	−88	−98	−88	−87	−102

Zenith.

t:	12^h59^m	1^h31^m	2^h8^m	2^h34^m	3^h0^m	3^h28^m
Z:	−267	−313,5	−322	−319	−328	−326

25. November 1881. Nachmittags.

Sonne.

t:	1^h4^m	1^h33^m	2^h2^m	2^h32^m	3^h5^m
ζ:	3,680	4,056	4,654	5,696	7,680
W:	203	188	167	127,5	75
log W:	2,3075	2,2742	2,2227	2,1055	1,8751

Gegenpunkt.

t:	1^h46^m	1^h16^m	2^h51^m
G:	−28	−33,5	−66,5

Zenith.

t:	1^h26^m	1^h53^m	2^h24^m	2^h58^m
Z:	−255	−265	−270	−279

25. Juni 1882.

Sonne.

t:	12^h47^m	2^h13^m	2^h28^m	2^h45^m	2^h59^m	3^h13^m	3^h24^m	3^h36^m
ζ:	1,149	1,254	1,300	1,345	1,388	1,436	1,479	1,531
W:	423	408	406,5	408	396,5	409	400,5	397
log W:	6263	6107	6091	6053	5982	6117	6026	5988
t:	4^h7^m	4^h17^m	4^h33^m	4^h48^m	5^h4^m	5^h16^m	5^h31^m	5^h45^m
ζ:	1,695	1,758	1,873	1,998	2,156	2,291	2,512	2,440
W:	384,5	382	377,5	367,5	356,5	352,5	340,5	320,5
log W:	5849	5821	5769	5653	5521	5472	5321	5058

t:	6^h0^m	6^h32^m	6^h45^m	7^h0^m	7^h15^m	7^h30^m
ζ:	3,016	3,864	4,328	5,008	5,872	6,976
W:	313,5	273,5	247,5	226	196	160
log W:	4962	4370	3936	3541	2923	2041

15. Juli 1882.

Sonne.

t:	12^h19^m	12^h34^m	12^h48^m	1^h3^m	1^h18^m	3^h56^m	4^h7^m
ζ:	1,160	1,164	1,172	1,183	1,196	1,657	1,696
W:	408,5	406	406,5	400	403	372	364,5
log W:	6113	6085	6091	6021	6053	5705	5617

Fig. 2 stellt die 1881 und 1882 angestellten Sonnenbeobachtungen dar. (Abscisse ζ, Ordinate log W).

Die auf dem Thurm zu Westend bei Berlin angestellten Beobachtungen sind die ersten, welchen gute Normalbestimmungen mittelst der Dampfscheibe beigefügt werden konnten. Wir geben zunächst die Beobachtungen mit den auf gleiche Empfindlichkeit der Thermosäule und des Galvanometers reducirten Werthen (log $W_{(red.)}$) und den Resultaten der Berechnung nach der Formel:

$$\log W = \log S - a\zeta.$$

29. Juni 1883. Nachmittags.

t:	2^h3^m	3^h1^m	3^h23^m	4^h3^m	4^h23^m	4^h42^m
ζ:	1,242	1,386	1,467	1,657	1,782	1,926
W (beob.):	446	441	438	417	400,5	385
log W (red.):	6199	6136	6107	5893	5718	5547

t:	5^h3^m	5^h23^m	5^h44^m	6^h22^m	6^h43^m	7^h2^m
ζ:	2,118	2,448	2,645	3,488	4,160	4,984
W (beob.):	363,5	339	325	276,5	196,5	134
log W (red.):	5297	4994	4811	4109	2626	0963

$\log S = 2{,}7592$, $a = 0{,}10591$.
Sonnenwärme: $S = 574 \pm 9$.
Berechnung aus Beobachtungen 1—9.

1. Juli 1883. Nachmittags.

t:	12^h23^m	12^h48^m	1^h8^m	1^h29^m	5^h13^m
ζ:	1,140	1,149	1,168	1,191	2,234
W (beob.):	487	480	480	480	372
log W (red.):	6527	6464	6464	6464	5357
t:	5^h31^m	5^h45^m	6^h2^m	6^h23^m	6^h40^m
ζ:	2,452	2,673	3,064	3,536	4,072
W (beob.):	357	342	330,5	292	261
log W (red.):	5179	4992	4844	4306	3818

$\log S = 2{,}7513$, $a = 0{,}09127$.
Sonnenwärme: $S = 564 \pm 8$.
Berechnung aus sämmtlichen Beobachtungen.

14. August 1883. Nachmittags.

t:	2^h9^m	2^h33^m	2^h54^m	3^h15^m	3^h37^m	4^h0^m
ζ:	1,406	1,476	1,557	1,652	1,778	1,943
W (beob.):	441,5	429	420	410	397	383,5
log W (red.):	6205	6081	5989	5884	5744	5594
t:	4^h23^m	4^h46^m	5^h5^m	5^h23^m	5^h35^m	5^h52^m
ζ:	2,156	2,431	2,725	3,128	3,432	3,968
W (beob.):	363	339,5	307	289	259	215
log W (red.):	5355	5064	4627	4365	3889	3080

$\log S = 2{,}7832$, $a = 0{,}11619$.
Sonnenwärme: $S = 607 \pm 10$.
Berechnung aus sämmtlichen Beobachtungen.

12. September 1883. Nachmittags.

t:	2^h15^m	2^h36^m	2^h58^m	3^h38^m	4^h2^m
ζ:	1,760	1,868	1,998	2,393	2,729
W (beob.):	297	293	282,5	237,5	213
log W (red.):	2,4718	2,4659	2,4500	2,3747	2,3274
t:	4^h22^m	4^h39^m	4^h58^m	5^h19^m	5^h33^m
ζ:	3,152	3,592	4,112	5,344	6,376
W (beob.):	208	178,5	134,5	93	60
log W (red.):	2,3171	2,2506	2,1277	1,9675	1,7772

$\log S = 2{,}7578$, $a = 0{,}15797$.
Sonnenwärme: $S = 573 \pm 27$.
Berechnung aus Beobachtungen 1—5.

15. October 1883. Nachmittags.

t:	12^h8^m	12^h23^m	12^h48^m	1^h4^m	1^h40^m	1^h58^m	2^h17^m
ζ:	2,041	2,062	2,120	2,177	2,368	2,438	2,694
W (beob.):	398	387	374	379	369	347	339
log W (red.):	6086	5964	5816	5873	5757	5490	5389

t:	2^h35^m	2^h53^m	3^h11^m	3^h28^m	3^h49^m	4^h4^m	4^h17^m
ζ:	2,952	3,248	3,648	4,136	4,992	5,840	6,848
W (beob.):	335	327,5	300	274,5	237	214,5	167,5
log W (red.):	5337	5239	4858	4473	3834	3401	2327

$\log S = 2{,}7441$, $a = 0{,}07217$.
Sonnenwärme: $S = 555 \pm 10$.
Berechnung aus sämmtlichen Beobachtungen.

Figur 3 stellt die Beobachtungen von 1883 nach Beobachtung und Berechnung dar. (Abscisse ζ, Ordinate log W).

Das Folgende enthält die zugehörigen Normalbestimmungen mittelst der Dampfscheibe. Die den beiden Flächen entsprechenden Ausschläge gelten für die Temperaturdifferenz 100° (Fläche — Thermosäule), der der schwarzen Fläche entsprechende Ausschlag ist sodann auf die Temperatur des Stromkreises: 20° C. reducirt, (Temperaturcoëfficient: 0,0027); c ist der Reductionscoëfficient für die beobachteten Werthe der Sonnenwärme (auf den Werth 450 für die schwarze Fläche). Die Thermoelemente 1 und 2 sind von Neusilber-Kupfer, diejenigen 3 und 4 von Neusilber-Eisen; die entsprechenden Ausschläge sind bereits auf 100° Temperaturdifferenz und gleichen Widerstand des Stromkreises reducirt.

29. Juni 1883.

Schwarze Fläche:	477	Weisse Fläche:	424	$\frac{\text{Schwarze Fl.}}{\text{Weisse Fl.}}$	= 1,125
	477		424		
Mittel:	477	Mittel:	424		

Temperatur des Stromkreises: . . . . . 24,6°
Schwarze Fläche bei 20° Temperatur des Stromkreises: 483,0
Reductionscoëfficient . . . . . $c = \frac{450}{483{,}0} = 0{,}932$

1. Juli 1883.

Schwarze Fläche:				Weisse Fläche:	
Vor der Sonnenbeobachtung:	474 477	Nach der Sonnenbeobachtung:	482 480 481	Vor der Sonnenbeobachtung:	424 424
Mittel:	475,5		481		424

$\frac{\text{Schwarze Fl.}}{\text{Weisse Fl.}}$ = ... 1,121 (vor der Sonnenbeob.)

Temperatur des Stromkreises: . . . . . 27,1 (vor der Sonnenbeob.)
27,4 (nach d. Sonnenbeob.)

Schwarze Fl. bei 20° Temp. des Stromkr.: 484,7 (vor der Sonnenbeob.)
490,6 (nach d. Sonnenbeob.)
Mittel: 487,5

Reductionscoëfficient . . . . . $c = \frac{450}{487,5} = 0{,}928.$

Empfindlichkeit des Galvanometers:

Thermoelemente:	1	2	3	4
Ausschlag:	351,9	352,9	377,9	377,9
Mittel:		365,2		

3. Juli 1883

Schwarze Fläche: 474, 479 — Mittel: 476,5 — Weisse Fläche: 425, 425 — Mittel: 425 — $\frac{\text{Schwarze Fl.}}{\text{Weisse Fl.}} = 1{,}121$

Temperatur des Stromkreises: . . . . . 29,1°

Schwarze Fläche bei 20° Temperatur des Stromkreises: 488,4

Reductionscoëfficient . . . . . $c = \frac{450}{488,4} = 0{,}9214$

Empfindlichkeit des Galvanometers:

Thermoelemente:	1	2	3	4
Ausschlag:	350,3	351,3	377,3	377,3
Mittel:		364,1		

14. August 1883.

Schwarze Fläche: 474, 474 — Mittel: 474 — Weisse Fläche: 419, 421 — Mittel: 420 — $\frac{\text{Schwarze Fl.}}{\text{Weisse Fl.}} = 1{,}128$

Temperatur des Stromkreises: . . . . . 21,5°

Schwarze Fläche bei 20° Temperatur des Stromkreises: 476,0

Reductionscoëfficient . . . . . $c = \frac{450}{476,0} = 0{,}945$

Empfindlichkeit des Galvanometers:

Thermoelemente:	1	2	3	4
Ausschlag:	357,5	359	385	385
Mittel:		371,6		

12. September 1883.

Schwarze Fläche: $\frac{451,5}{450}$ Mittel: $\frac{450,8}{}$ Weisse Fläche: $\frac{405}{403}$ Mittel: $\frac{404}{}$ $\frac{\text{Schwarze Fl.}}{\text{Weisse Fl.}} = 1,116$

Temperatur des Stromkreises: . . . . . 20,2°

Schwarze Fläche bei 20° Temperatur des Stromkreises: 451,0

Reductionscoëfficient . . . . . $c = \frac{450}{451} = 0,998$

Empfindlichkeit des Galvanometers:

Thermoelemente:	1	2	3	4
Ausschlag:	346	347	373	372,5
Mittel:		359,6		

15. October 1883.

Schwarze Fläche: $\frac{447}{446}$ $\frac{445}{}$ Mittel: $\frac{446,0}{}$ Weisse Fläche: $\frac{397}{397,5}$ Mittel: $\frac{397,3}{}$ $\frac{\text{Schwarze Fl.}}{\text{Weisse Fl.}} = 1,123$

Temperatur des Stromkreises: . . . . . 15,8°

Schwarze Fläche bei 20° Temperatur des Stromkreises: 441,2

Reductionscoëfficient . . . . . $c = \frac{450}{441,2} = 1,020$

Empfindlichkeit des Galvanometers:

Thermoelemente:	1	2	3	4
Ausschlag:	354	354,5	380	379,5
Mittel:		367,0		

e) Resultate.

Es haben sich zunächst einige Daten in Betreff der *Atmosphäre bei klarem Himmel* ergeben.

Die Werthe der atmosphärischen Constante a, welche im wesentlichen ein Absorptionscoëfficient ist, zeigen, dass auch bei „klarem Himmel" die Absorption sehr verschieden sein kann. Den geringsten Werth der Absorption zeigt der 15. October, den grössten der 12. September; am 12. September war die Luft übrigens entschieden dunstig. Am 12. September würde die Sonnenwärme, wenn

die Sonne im Zenith gestanden hätte, 29 Proc., am 15. October 15 Proc. durch Absorption der Atmosphäre verloren haben.

Die Beobachtungen des Gegenpunktes zeigen leider, dass auf diesem Wege kaum eine Vereinfachung der Methode zu erhoffen ist, theils weil die Beobachtung des Gegenpunktes an sich viel ungenauer ist, als diejenige der Sonnenwärme, theils weil die atmosphärischen Unregelmässigkeiten hier noch mehr mitzuspielen scheinen.

In Bezug auf das allgemeine Verhalten der Wärme des Gegenpunktes und des Zeniths widersprechen sich die Beobachtungen. Am meisten entsprechen wohl dem wahren Sachverhalte die Beobachtungen vom 8. und 9. October 1881; diejenigen vom 6. October 1881 mussten wegen eintretender Bewölkung abgebrochen werden, verdienen also nicht viel Zutrauen, diejenigen vom 10. und 25. November haben auch weniger Gewicht, weil die Sonnenhöhe geringer ist.

Nach den erstgenannten Beobachtungen zeigt die Himmelswärme tagsüber (bei klarem Himmel) ähnliches Verhalten wie nachts, d. h. im allgemeinen grosse Kälte, am grössten im Zenith, abnehmend gegen den Horizont; die Einwirkung der Sonnenwärme auf die Himmelswärme scheint mehr in einer allgemeinen Erhöhung ohne wesentliche Veränderung des relativen Verhältnisses zu bestehen.

Ueber das Gesetz der Abnahme der beobachteten Sonnenwärme W mit dem Wegverhältniss ζ geben die Curven auf Fig. 2 Aufschluss (Abscisse ζ, Ordinate $\log W$; die Curven sind des besseren Auseinanderhaltens wegen mit verschiedenen Anfangspunkten gezeichnet). Diese Curven begründen die oben besprochene Annahme einer linearen Function für $\log W$, weil nicht mit Sicherheit auf eine Krümmung in dem einen oder anderen Sinne geschlossen werden kann.

Die auf dem Faulhorn angestellten Beobachtungen sind leider nicht sehr genau, da es die ersten dieser Art waren; ich habe aber allen Grund zu der Annahme, dass die atmosphärische Constante daselbst erheblich kleiner ist, als in Berlin; namentlich geht dies auch aus der wunderbaren Leuchtkraft der Sterne bei klarem Nachthimmel hervor.

Sonnenbeobachtungen, auf hohen Bergen und in heiterem Klima ausgeführt, führen jedenfalls viel leichter und sicherer zum Ziele, als in der norddeutschen Tiefebene.

Das Hauptresultat der Messungen ist der Beweis, dass die *Sonnenwärme nicht constant* ist, sondern *sehr erhebliche Schwankungen* zeigt.

Die gefundenen Werthe waren:

Juni 29.:	574 ± 9	Aug. 14.:	607 ± 10
Juli 1.:	564 ± 8	Sept. 12.:	573 ± 27
		Oct. 15.:	555 ± 10

Fig. 4[1]) stellt diese Resultate in der Weise dar, dass als Abscisse die Zeit der Messung, als Ordinate der Werth der Sonnenwärme mit dem durch den wahrscheinlichen Fehler bedingten Spielraume aufgetragen ist; es geht hieraus hervor, dass die gefundenen Variationen der Sonnenwärme nicht scheinbare, durch Beobachtungsfehler hervorgerufene sein können.

Im ganzen lässt sich der Gang der Sonnenwärme dahin charakterisiren, dass von Anfang Juli bis Mitte August eine Vermehrung um ca. 6 Proc., von da bis Mitte September eine Verminderung um ca. 8 Proc., von Mitte September bis Mitte October keine wesentliche Veränderung stattgefunden hat.

Denselben Gang zeigt die *Entwickelung der Sonnenflecken.* Nach gütigen Mittheilungen des astro-physikalischen Observatoriums in Potsdam hat Anfangs Juli und im September und October lebhafte Fleckenentwickelung stattgefunden; im August dagegen eine geringere; die Sonnenwärme scheint also hiernach *mit zunehmender Fleckenentwickelung abzunehmen.* Die sichere Begründung dieses Gesetzes muss jedoch wohl zukünftigen Beobachtungen überlassen werden.

Die Wichtigkeit dieses Resultates liegt weit weniger in dem thatsächlichen Nachweise von Variationen, sondern in der Grösse dieser Variationen und in der Thatsache, dass die beschriebene Methode ein Mittel an die Hand gibt, um diese Variationen continuirlich zu verfolgen.

1) Ist aus Versehen nicht correct ausgefallen.

Die Grösse der gefundenen Variationen lässt sich am besten an ihrem Einflusse auf die Temperatur der Erde zeigen.

Die mittlere Temperatur einer Stelle der Erdoberfläche besteht hauptsächlich aus zwei Theilen, deren einer dem mittleren Einflusse der Himmelswärme, deren anderer dem mittleren Einflusse der Sonnenwärme entspricht; der erstere Theil berechnet sich nach den besten, bisher bekannten Beobachtungen, denjenigen von Königsberg, für Königsberg auf -82^0, der letztere auf $+89^0$ C.; wir können daher annehmen, dass in mittleren Breiten die Veränderung der Sonnenwärme um 1 Proc. ungefähr einer Veränderung der Erdtemperatur um 1 Grad entspricht, wenn die übrigen Verhältnisse dieselben bleiben. Die oben gefundenen Variationen würden also, wenn sie dauernd wären, Veränderungen der Erdtemperatur in mittleren Breiten um 6^0, resp. 8^0 zur Folge haben!

Die Beobachtungen beweisen aber namentlich, dass die angewandte Methode bereits genügt, um die Veränderungen der Sonnenwärme so sicher festzustellen, als es unsere klimatischen Verhältnisse erlauben.

Die Beobachtungen theilen sich in zwei Klassen, die Sonnenbeobachtung und die Normalbestimmung. In der ersteren kommen die Fehler der Instrumente und die eigentlichen Beobachtungsfehler beinahe gar nicht in Betracht, die Hauptfehler liegen in dem Zustande der Atmosphäre, also ausserhalb unseres Bereiches; die Genauigkeit der Normalbestimmung dagegen ist in unserem Bereiche und lässt sich wahrscheinlich noch vergrössern. Sobald aber die Normalbestimmung so genau ist, dass ihre Fehler gegen diejenigen der Sonnenbeobachtung verschwinden, so ist die mögliche Grenze der Genauigkeit erreicht. Dies ist thatsächlich bereits annähernd der Fall; die Methode leistet also bereits beinahe soviel, als die Umstände erlauben, und es steht nichts im Wege, dass diese Beobachtungen auch in Gegenden mit heitererem Himmel angestellt werden.

Welchen Einfluss diese Beobachtungen, wenn sie fortlaufend in einem günstigen Klima angestellt werden, auf die Erkenntniss der meteorologischen Vorgänge ausüben würden, lässt sich kaum voraussehen, da die Complication dieser Vor-

gänge zu gross ist; aber, wenn solche Beobachtungen fortlaufend angestellt würden, wäre doch eine Aussicht vorhanden, diese Complication zu entwirren, da alsdann nicht nur, wie bisher, das Endglied in der Kette der Wirkungen, sondern auch das Anfangsglied gegeben ist.

II. *Die specifische Wärme des Wassers; von August Wilhelm Velten.*

Die Versuche, deren Resultate hier mitgetheilt werden, wurden auf den Vorschlag des Hrn. Prof. Dr. Wüllner von mir unternommen und in dem Laboratorium desselben ausgeführt. Sie sind von zweierlei Art, solche nach der Mischungsmethode und nach der Methode des Eisschmelzens. Hrn. Prof. Dr. Wüllner bin ich zu dem grössten Danke verpflichtet durch die vielfache freundliche Unterstützung, mit der er meine Versuche nach jeder Richtung hin gefördert hat.

I. Versuche nach der Mischungsmethode.

1. Ausführung und Ergebnisse der Versuche. — Der Apparat, mit welchem ich arbeitete, war derselbe, welchen schon v. Münchhausen[1]) benutzt hatte, und die Ausführung der Beobachtungen geschah in derselben Weise — in Bezug auf beides verweise ich auf die angeführte Abhandlung. Selbstverständlich sind die Temperaturen direct auf das Luftthermometer bezogen. Bei sämmtlichen anzuführenden Beobachtungen war die Anfangstemperatur des Calorimeters dieselbe wie die Zimmertemperatur; dies schien mir erforderlich zu sein, um eine Thaubildung auf dem Calorimeter zu verhindern.

Um eine Verschiedenheit der Temperatur innerhalb der grossen Wassermasse des Bades zu vermeiden, war in demselben ein Rührer angebracht. Die höchste Temperatur, bis zu welcher ich gehen konnte, war 1—2° unter dem Siedepunkt;

1) Wüllner, Wied. Ann. 1. p. 373. 1877.

denn während des Siedens war das Ausfliessen ein so unregelmässiges, dass die Erreichung eines sicheren Resultates mir nicht möglich schien.

Die Correctionen $\Sigma \Delta t$ für die Endtemperatur des Calorimeters waren stets sehr klein, da der Ausgleich je nach der Temperaturdifferenz in 10 bis höchstens 30 Sec. nach dem Ausfliessen stattgefunden hatte.

In den folgenden Beobachtungsresultaten bezeichnet w den Wasserwerth des Calorimeters mit Zubehör, T die Temperatur des heissen Wassers, ϑ die Anfangstemperatur und t die corrigirte Endtemperatur des Calorimeters; p das Gewicht des heissen und P das des kalten Wassers. Der Werth c giebt das Verhältniss der mittleren specifischen Wärme zwischen T und t zu derjenigen zwischen t und ϑ; er ist gegeben durch die Formel:

$$c = \frac{(P + w)(t - \vartheta)}{p(T - t)}.$$

Beobachtungen über die specifische Wärme des Wassers.

	P	p	T	t	ϑ	c
	$w = 12{,}2$		**I. Reihe**			
1)	571,7	222,5	42,7	17,05	7,44	0,9832
2)	559,7	289,0	41,85	18,74	7,30	0,9796
3)	558,7	361,5	41,4	20,44	7,29	0,9908
4)	578,4	259,1	39,85	17,20	7,46	0,9802
5)	564,0	275,0	40,25	17,97	7,49	0,9856
6)	550,1	269,4	40,6	18,18	7,58	0,9868
7)	559,6	291,6	40,85	18,68	7,46	0,9924
8)	555,4	308,3	40,9	18,98	7,23	0,9869
9)	556,4	267,5	41,0	17,93	7,25	0,9840
10)	536,8	313,3	41,1	19,52	7,29	0,9931
		Mittel	41,1	18,47	7,38	0,9863
			II. Reihe			
1)	636,3	201,7	42,9	15,38	6,89	0,9919
2)	655,7	193,0	42,9	14,88	6,82	0,9955
3)	654,1	215,9	42,8	15,77	7,03	0,9979
4)	659,8	204,5	42,7	15,50	7,29	0,9919
5)	644,8	195,6	42,55	15,18	7,09	0,9928
6)	646,9	197,7	41,8	15,18	7,26	0,9919
		Mittel	42,6	15,32	7,06	0,9937

	P	p	T	t	ϑ	c
			III. Reihe			
1)	415,2	328,2	41,85	22,35	7,41	0,9977
2)	415,2	388,7	41,85	23,96	7,69	1,0000
3)	449,0	324,9	41,8	21,69	7,63	0,9925
4)	446,0	379,3	42,2	23,30	7,71	0,9965
5)	408,7	386,2	43,25	24,85	8,01	0,9975
		Mittel	42,2	23,23	7,69	0,9968
			IV. Reihe			
1)	542,3	281,1	43,95	18,02	4,96	0,9935
2)	548,2	305,0	43,6	18,23	4,46	0,9973
3)	549,0	294,8	43,1	17,96	4,84	0,9935
4)	542,3	282,6	42,7	17,76	5,10	0,9960
5)	535,2	314,5	41,9	17,93	4,19	0,9977
6)	547,1	295,7	41,75	17,36	4,57	0,9919
7)	500,7	311,9	41,6	18,65	4,79	0,9931
8)	504,5	334,0	42,1	19,40	4,81	0,9943
9)	508,7	333,2	44,3	20,20	4,91	0,9918
10)	486,8	324,1	44,15	20,23	4,79	0,9938
		Mittel	42,9	18,57	4,74	0,9943
			V. Reihe			
1)	646,5	196,2	93,35	27,09	7,67	0,9840
2)	691,9	166,0	94,0	24,18	7,91	0,9884
3)	697,5	159,2	95,0	23,77	7,97	0,9889
4)	691,8	167,9	93,7	24,46	8,20	0,9847
5)	709,7	150,7	94,4	22,98	8,33	0,9826
6)	703,0	172,8	95,5	25,43	8,67	0,9900
7)	725,3	145,5	90,6	21,96	8,56	0,9895
8)	689,8	159,0	92,05	23,88	8,59	0,9903
		Mittel	93,6	24,22	8,24	0,9873
			VI. Reihe			
1)	732,5	125,3	91,1	23,00	11,74	0,9827
2)	739,6	121,6	90,7	22,34	11,47	0,9831
3)	733,7	139,8	91,85	23,85	11,34	0,9816
4)	731,3	114,1	92,45	22,08	11,50	0,9797
5)	743,2	127,2	94,1	23,82	12,17	0,9844
6)	734,3	132,2	94,1	24,34	12,15	0,9867
7)	733,0	141,4	94,3	24,82	11,85	0,9838
8)	736,5	132,9	94,0	24,02	11,80	0,9838
9)	738,0	132,2	93,95	24,15	12,00	0,9878
		Mittel	93,0	23,60	11,78	0,9837

	P	p	T	t	ϑ	c
			VII. Reihe			
1)	740,9	93,5	93,9	25,11	16,57	0,9999
2)	749,6	100,5	92,9	26,71	18,02	0,9952
3)	741,6	122,9	93,15	28,76	18,33	0,9935
4)	741,8	114,1	92,7	27,98	18,26	0,9925
5)	738,8	113,2	95,1	28,45	18,42	0,9984
6)	754,7	70,3	94,1	25,04	18,81	0,9841
7)	748,3	98,5	95,7	27,46	18,64	0,9979
		Mittel	93,9	27,07	18,15	0,9945
			VIII. Reihe			
1)	718,6	134,1	74,9	26,04	16,96	1,0128
2)	711,0	126,2	76,4	26,89	18,25	1,0002
3)	713,1	110,2	73,15	25,47	18,27	0,9939
4)	716,4	124,2	73,6	26,10	18,01	0,9992
5)	704,9	128,5	75,25	26,62	17,94	0,9961
		Mittel	74,7	26,22	17,89	1,0004
	$w = 12{,}3$		**IX. Reihe**			
1)	738,7	103,1	97,2	26,04	16,31	0,9960
2)	760,8	116,4	96,95	26,97	16,49	0,9947
3)	749,7	99,5	97,40	26,03	16,81	0,9893
4)	747,4	126,0	98,2	28,14	16,64	0,9897
		Mittel	97,4	26,80	16,56	0,9924
			X. Reihe			
1)	645,5	199,0	51,9	25,17	17,02	1,0079
2)	674,3	185,5	52,05	24,55	17,10	1,0027
3)	652,7	242,8	50,6	26,16	17,23	1,0008
4)	655,8	218,0	48,9	23,50	15,18	1,0039
5)	653,7	219,4	47,55	23,36	15,32	1,0089
		Mittel	50,2	24,55	16,37	1,0048
			XI. Reihe			
1)	745,4	149,9	75,4	26,53	16,81	1,0054
2)	747,9	133,7	73,95	25,27	16,68	1,0033
3)	747,6	134,9	74,65	25,51	16,73	1,0065
4)	743,7	141,6	75,8	26,21	16,85	1,0077
5)	750,7	137,6	76,55	25,92	16,75	1,0043
6)	742,2	145,9	76,9	26,56	16,82	1,0006
		Mittel	75,5	26,00	16,77	1,0046

	P	*p*	*T*	*t*	ϑ	*c*
			XII. Reihe			
1)	761,3	123,0	77,5	25,30	16,96	1,0049
2)	740,0	161,0	76,8	27,59	16,96	1,0094
3)	747,3	154,1	77,4	27,35	17,16	1,0036
4)	757,6	120,4	75,3	24,81	16,85	1,0081
5)	749,7	144,0	75,8	26,31	16,94	1,0019
6)	745,6	140,5	77,1	26,45	17,06	1,0000
		Mittel	76,7	26,30	16,99	1,0047
			XIII. Reihe			
1)	646,5	133,4	57,7	24,68	17,97	1,0035
2)	653,9	150,7	55,9	23,81	16,49	1,0084
		Mittel	56,8	24,25	17,23	1,0060
			XIV. Reihe			
1)	772,7	75,4	98,9	25,35	18,31	0,9965
2)	739,2	106,1	98,3	28,67	18,93	0,9908
3)	748,7	93,9	98,4	27,66	19,00	0,9921
4)	748,8	87,9	98,4	27,30	19,13	0,9950
5)	741,0	85,4	98,7	26,96	18,92	0,9886
6)	747,8	90,4	98,9	27,29	18,95	0,9793
7)	743,5	79,9	98,4	26,58	19,12	0,9825
8)	745,5	84,9	96,9	26,92	19,19	0,9859
9)	737,9	100,9	98,05	28,28	19,00	0,9889
10)	754,6	99,4	98,3	28,15	19,16	0,9887
		Mittel	98,3	27,32	18,97	0,9888
			XV. Reihe			
1)	599,5	219,0	45,35	25,29	18,17	0,9916
2)	581,5	255,5	45,85	26,38	18,05	0,9943
3)	582,9	280,1	46,30	27,18	18,22	0,9958
4)	585,1	302,4	44,15	27,09	18,53	0,9912
5)	582,9	277,3	42,50	26,22	18,66	0,9967
		Mittel	44,8	26,43	18,33	0,9939

2. Controlversuche für die Siedetemperatur. — Sämmtliche Versuche, bei denen die obere Temperatur nahe dem Siedepunkt war, gaben als $c(T,t)/c(t,\vartheta)$ einen Werth kleiner als die Einheit, im Widerspruch mit Regnault, Rowland und Baumgartner. Nun hielt ich die Möglichkeit nicht für ausgeschlossen, dass das heisse Wasser selbst auf dem kurzen Wege vom Ausflussrohr des Bades bis ins Calorimeter sich

durch die Dampfbildung an der Oberfläche merklich abkühlen könne; um deshalb zu entscheiden, ob dieser Einfluss merklich sei, schlug ich folgenden Weg ein. Ich füllte eine weite cylindrische Glasröhre, die unten zugeschmolzen, oben in eine dünne Röhre ausgezogen war, mit reinem luftfreien Wasser; darauf wurde die Röhre zugeschmolzen. Dieser Körper gestattete mir, indem gleichzeitig die specifische Wärme der angewandten Glassorte bestimmt wurde, die Feststellung der specifischen Wärme des Wassers mit Vermeidung des etwaigen Einflusses der Verdampfung.

Zur Erhitzung dieses Körpers benutzte ich eine eigens zu diesem Zwecke angefertigte Erwärmungsflasche. Dieselbe war aus Messingblech und hatte die Form eines Mineralwasserkruges, nur setzte sich der Hals als cylindrisches Rohr in das Innere desselben fort; das untere geschlossene Ende dieses Rohres stand vom Boden ebensoweit ab, wie die Wandung des Rohres von der Seitenwand. Der Zwischenraum zwischen diesen beiden Wandungen wurde mit Wasser gefüllt und dann zugelöthet; der zu erwärmende Körper befand sich im innern Rohre. Diese ganze Erwärmungsflasche wurde in den für die Kugel des Luftthermometers bestimmten Siedeapparat gebracht und durch einen passenden Kork in demselben befestigt. Durch die im Siedeapparat entwickelten Dämpfe wurde also zunächst das zwischen beiden Wandungen der Flasche befindliche Wasser erwärmt und sodann der innere Raum derselben. Nach der Erwärmung nahm ich die Flasche heraus und liess nach Entfernung des Korkes den Inhalt des Rohres in das Calorimeter fallen. Während dieses Vorganges schützte die zwischen beiden Wandungen befindliche Wassermasse das innere Rohr vollständig vor jeder Wärmeabgabe nach aussen.

Durch eine Durchbohrung des Korkes, welcher die innere Röhre verschloss, war ein Thermometer hindurch gesteckt, um die Temperatur im Innern mit derjenigen der Dämpfe vergleichen zu können. Hierbei fand sich nun, dass der Korkverschluss, wenngleich der Kork sehr fest aufsass und auch gegen das Thermometer fest anschloss, nicht hinreichte, um in dem Rohre, wenigstens in dem oberen Theile desselben, die Temperatur der Dämpfe zu erhalten. Deshalb brachte ich,

nachdem die Flasche im Siedeapparat befestigt war, über derselben noch eine mehrere Centimeter dicke Verpackung von Watte, Werg u. dergl. an, die durch Drähte fest aufgebunden wurde. Auch selbst dann war nicht immer die innere Temperatur derjenigen der Dämpfe gleich. Die allgemeine Regel aber, nach welcher das Thermometer mit dem zu erwärmenden Körper in Berührung zu bringen ist, konnte hier nicht befolgt werden, sondern es musste stets ein Spielraum zwischen dem Thermometer und dem Glaskörper bleiben. Denn sonst drohte dem Thermometer jedesmal beim Verschliessen der Flasche durch den Kork die Gefahr, zertrümmert zu werden; derselben Gefahr war es ausgesetzt bei einem Verschieben des Thermometers nach dem Verschliessen, da man nicht in das Innere hineinsehen und das Thermometer bei dem festen Verschluss des Ganzen nicht ohne starke Anstrengung verschieben konnte.

Ich glaube, diese Einzelheiten hervorheben zu müssen, da man aus ihnen ersieht, welche Schwierigkeiten sich der genauen Bestimmung der Temperatur des zu erwärmenden Körpers entgegenstellen; durch sie erhält auch der Einwand seine Bestätigung, den Pape gegen die Versuche von Regnault erhob, dass bei dem Verschlusse des Regnault'schen Erhitzungsapparates die Temperatur des in Dämpfen zu erwärmenden Körpers wegen des Hereinfallens der kalten Luft diejenige der Dämpfe nicht erreicht habe, somit die von Regnault bestimmten specifischen Wärmen meist zu klein ausgefallen seien.

Bei den hier anzuführenden Versuchen bleibt es also zweifelhaft, ob das zu erwärmende in der Glasröhre eingeschmolzene Wasser die Temperatur der Dämpfe, oder die durch das innere Thermometer angezeigte Temperatur des inneren Raumes hatte; je nachdem man nun die erstere oder die letztere für dasselbe nimmt, erhält man für die specifische Wärme zwei verschiedene Werthe, von denen aller Wahrscheinlichkeit nach der eine zu gross, der andere zu klein sein wird; für den vorliegenden Zweck genügte es aber, diese beiden Grenzen zu kennen.

Was die zur Erwärmung nöthige Zeit betrifft, so gilt ganz dasselbe wie von den später zu besprechenden Versuchen mit

dem Eiscalorimeter; auch war hier sowohl, wie bei jenen, eine sehr starke Dampfentwicklung nöthig und infolge dessen ein beständiges Speisen des Siedeapparates durch Zufluss siedenden Wassers.

Die Ergebnisse der Versuche befinden sich in der folgenden Tabelle; in der ersten Columne ist die mittelst des Barometers bestimmte Siedetemperatur verzeichnet, in der zweiten die Temperatur T, welche das innere Thermometer zeigte.

Glasröhre mit eingeschmolzenem Wasser.

Substanz: Wasser 25,615 g, Glas 9,875 g.

	Siedetemp.	T	$P+w$	t	ϑ	$t-\vartheta+\Sigma\Delta t$	pc unter Voraus. der Siedetemp.	pc unter Voraus. der beob. Temp.
1)	99,65	99,6	326,05	23,37	17,30	6,37	25,2331	25,2509
2)	99,65	99,6	299,88	24,66	18,20	6,87	25,4778	25,4963
3)	99,7	99,65	326,03	21,54	15,09	6,57	25,4108	25,4283
4)	99,57	99,5	332,91	24,01	18,13	6,22	25,4101	25,4353
5)	99,83	99,7	326,62	20,02	13,68	6,64	25,1793	25,2234
6)	99,3	99,3	319,47	19,42	12,81	6,88	25,5211	25,5211
7)	99,7	99,6	325,86	20,72	14,30	6,77	25,9373	25,9728
			Mittel	21,96	15,64		25,4528	25,4754
						woraus c = 0,9937		0,9946

Specifische Wärme des Glases.

Gewicht des angewandten Glases 20,126 g.

	Siedetemp.	T	$P+w$	t	ϑ	$t-\vartheta+\Sigma\Delta t$	pc nach Siedetemp.	pc nach beob. Temp.
1)	99,47	99,4	309,71	15,82	14,67	1,10	4,0726	4,0761
2)	99,47	99,55	324,25	19,43	18,45	0,99	4,0106	4,0066
3)	99,65	99,4	297,47	19,30	18,25	1,11	4,1095	4,1225
4)	99,7	99,65	324,54	19,58	18,59	1,01	4,0913	4,0939
5)	99,75	99,5	324,38	19,33	18,31	1,00	4,0336	4,0461
						Mittel	4,0635	4,0690
			woraus die specifische Wärme des Glases			c = 0,2019		0,2022

Zur Berechnung von c wurde von der Gesammtwärmemenge, die der ins Calorimeter eingetauchte Körper bis zur Abkühlung auf t^0 abgab,

$$W = (P + w)(t + \Sigma\Delta t - \vartheta),$$

diejenige Wärmemenge subtrahirt, die das angewandte Glas, 9,875 g, bei der Abkühlung von T bis t für sich abgiebt; aus dem Reste, welcher $= pc(T - t)$ ist, wurde der sich aus jedem Versuch ergebende Werth von pc berechnet und aus dem Mittel dieser Werthe, da p stets dasselbe, 25,615 g, war, endlich der Werth von:

$$c = \frac{\text{Mittl. spec. Wärme zw. } T \text{ u. } t}{\text{Mittl. spec. Wärme zw. } t \text{ u. } \vartheta}.$$

Es ergibt sich also auch bei diesen Versuchen ein Werth, der kleiner ist als die Einheit und nicht wesentlich verschieden von dem nach der ersten Methode gefundenen.

Die etwas grösseren Abweichungen der Versuche von einander erklären sich zum Theil daraus, dass die Anfangstemperatur des Calorimeters bei den einzelnen Versuchen um mehrere Grade verschieden war; überhaupt aber ist diese Methode wegen des langsameren Temperaturausgleiches innerhalb des Calorimeters nicht derselben Genauigkeit fähig wie die erstere.

Meine Versuche stimmen also sämmtlich darin überein, dass die mittlere specifische Wärme zwischen 25 und 100° kleiner ist, als diejenige zwischen den Temperaturen 8—27°.

3. Vergleichung der Resultate der verschiedenen Beobachter. — Um die verschiedenen Resultate unter einander vergleichbar zu machen, ist zunächst nöthig, von den gefundenen Werthen:

$$c = \frac{\text{Mittl. spec. Wärme zw. } T \text{ u. } t}{\text{Mittl. spec. Wärme zw. } t \text{ u. } \vartheta},$$

überzugehen zu der für die Erwärmung eines Grammes Wasser von t^0 zu T^0 erforderlichen Wärmemenge, und diese nach einer festen Einheit auszudrücken.

Bezeichnet W_t^T diese Wärmemenge, so ist:

$$\frac{\text{Mittl. spec. Wärme zw. } t \text{ u. } T}{\text{Mittl. spec. Wärme zw. } t \text{ u. } \vartheta} = \frac{\frac{1}{T-t} \cdot W_t^T}{\frac{1}{t-\vartheta} \cdot W_\vartheta^t},$$

oder:

$$W_t^T = \frac{T-t}{t-\vartheta} \times W_\vartheta^t \times c.$$

Als feste Einheit werde ich vorläufig, da Rowland's Untersuchungen[1]) in dieser ausgedrückt sind, die Grösse des mechanischen Wärmeäquivalentes zu Baltimore nehmen.

Um aus den verschiedenen Beobachtungen denselben Werth W_t^T zu erhalten, war es unvermeidlich, das Intervall t bis T, dessen mittlere specifische Wärme bestimmt war, um eine kleine Grösse zu erweitern oder zu verengern; es kann dadurch immerhin ein mehr oder weniger bedeutender Fehler entstehen.

Zunächst handelte es sich darum, zu untersuchen, welche der verschiedenen Beobachtungen miteinander übereinstimmen, oder wie gross die Abweichungen derselben sind.

Direct vergleichbar sind einige nach der Mischungsmethode erhaltene Resultate mit denjenigen Rowland's über das mechanische Wärmeäquivalent. Setzt man die in der Tabelle „Final results" bei Rowland gegebenen Werthe ein, so erhält man folgende Vergleichung:

	Mischungsmethode	Beobachter	Mech. Wärmeäquiv.	Differenz	in Proc.
$\frac{W_{20}^{24}}{W_{24}^{29}}$	0,7986	Rowl. 8.	0,8036	−0,0050	−0,6
$\frac{W_{21}^{29}}{W_{29}^{38}}$	1,1376	„ 9.	1,1423	−0,0047	−0,4
$\frac{W_{27}^{42}}{W_{20}^{27}}$	2,1553	v. Mü. I.[2])	2,140	+0,015	+0,7
$\frac{W_{25}^{42}}{W_{17}^{25}}$	2,1412	„ II.	2,120	+0,021	+1,0
$\frac{W_{26}^{42}}{W_{17}^{26}}$	1,7915	„ III.	1,773	+0,018	+1,0
$\frac{W_{18}^{42}}{W_{7}^{18}}$	2,1519	Ve. I.	2,170	−0,018	−0,9
$\frac{W_{15}^{42}}{W_{7}^{15}}$	3,3537	„ II.	3,359	−0,005	−0,2
$\frac{W_{23}^{42}}{W_{8}^{23}}$	1,2626	„ III.	1,261	+0,0016	+0,1
$\frac{W_{19}^{42}}{W_{5}^{19}}$	1,6335	„ IV.	1,6333	+0,0002	0

1) Rowland, Proc. of the Amer. Acad. 1879.

2) Wüllner, Ueber die spec. Wärme des Wassers, Wied. Ann. **10.** p. 289. 1880.

Die Vergleichung der Beobachtungen nach der Mischungsmethode mit denjenigen von Rowland über das mechanische Wärmeäquivalent gibt also folgendes Resultat:

1. Meine Reihen II, III und IV stimmen fast vollkommen mit denselben; 2. die Beobachtungen Rowland's geben Abweichungen von rund einem halben Procent; 3. meine Reihe I eine Abweichung von fast 1 Proc. nach derselben Seite; 4. die von v. Münchhausen Abweichungen bis zu 1 Proc. nach der entgegengesetzten Seite.

Es weichen also die verschiedenen Beobachtungen bis zu 2 Proc. voneinander ab; somit bleibt bei dieser Methode und dieser Art der Vergleichung eine Unsicherheit von mehr als einem Procent bestehen.

Diese Abweichungen sind aber von wesentlichem Einfluss bei der Entscheidung darüber, ob die specifische Wärme wächst oder abnimmt.

Meine Reihen I und IV liefern:

$$\frac{c(41{,}05 \text{ bis } 18{,}47)}{c(18{,}47 \text{ bis } 7{,}38)} = 0{,}9863$$

$$\frac{c(42{,}9 \text{ bis } 18{,}57)}{c(18{,}57 \text{ bis } 4{,}74)} = 0{,}9943,$$

welche Gleichungen darauf hinweisen, dass die mittlere spec. Wärme zwischen 4,74 und 7,38° bedeutend kleiner ist, als die zwischen 7,38 und 18,47°.

Ebenso liefern die Reihen V und VI:

$$\frac{c(93{,}6 \text{ bis } 24{,}22)}{c(24{,}22 \text{ bis } 8{,}24)} = 0{,}9873$$

$$\frac{c(93 \text{ bis } 23{,}60)}{c(23{,}60 \text{ bis } 11{,}78)} = 0{,}9837,$$

woraus wiederum folgt, dass die mittlere specifische Wärme zwischen 8,24 und 11,78° kleiner sein muss, als diejenige zwischen 11,78 und 24°.

Meine Beobachtungen geben also für die mittlere specifische Wärme zwischen 4,7 und 7,5° einen bedeutend kleineren Werth als zwischen 7,5 und 18,5°; für diejenige zwischen 8 und 12° ebenfalls einen kleineren als zwischen 12 und 24°; es folgt aus ihnen ein starkes Wachsen von 4,75° an bis wenigstens zu 12°.

Ein sehr starkes Wachsen bis über 12° hinaus fand auch Hirn[1]), wenn auch die Bemerkung von Rowland, dass die Versuche nach der Methode von Hirn nicht ohne grosse Fehler ausführbar sind, ihre volle Berechtigung hat.

Auf Grund zahlreicher mit grosser Sorgfalt nach der Mischungsmethode angestellter Versuche zwischen den Temperaturen 0 und 30° giebt Gerosa[2]) für die Aenderung der specifischen Wärme des Wassers zwischen 5,5 und 24° folgende Formel, die sich von derjenigen von Jamin und Amaury nur durch den Coëfficienten von t^2 unterscheidet:

$$\frac{dQ}{dt} = 1 + 0{,}0011\,t + 0{,}000006\,t^2.$$

Nach dieser Formel wird:

$$\frac{c\,(12 \text{ bis } 24)}{c\,(8 \text{ bis } 12)} = 1{,}0102$$

$$\frac{c\,(8 \text{ bis } 18)}{c\,(6 \text{ bis } 8)} = 1{,}0073.$$

Diese Werthe sind aufs Quecksilberthermometer bezogen, reducirt man sie nach den Angaben von Grunmach[3]) auf das Luftthermometer, so wird der erste Werth:

$$\frac{c\,(12 \text{ bis } 24)}{c\,(8 \text{ bis } 12)} = 1{,}0068.$$

Auch nach Regnault findet ein Wachsen der specifischen Wärme von 5—25° ungefähr parallel der Volumenänderung statt.

Dagegen scheinen die Beobachtungen von Pfaundler und Platter auf eine Abnahme von 8° an hinzudeuten, während Rowland durch die Untersuchungen über das mechanische Wärmeäquivalent eine beständige Abnahme findet.

Als das Wahrscheinlichste ergibt sich schliesslich ein Wachsen von 5° an bis über 12° hinaus, wenn auch aus den hier angeführten Beobachtungen die Grösse der Zunahme sich nicht zahlenmässig feststellen lässt.

Für die Temperaturen zwischen 25° etwa und 40° ergibt

1) Hirn, Compt. rend. **70.** p. 592 u. 831. 1870.

2) Gerosa, Atti della R. Accademia dei Lincei, (3.) **10.** p. 75. 1881.

3) Grunmach, Metronomische Mittheilungen der Normal-Aichungs-Commission.

sich übereinstimmend aus den Beobachtungen von Rowland und den meinigen eine Abnahme der specifischen Wärme; nur v. Münchhausen findet ein Wachsen.

Für die Temperaturen zwischen 40 und 70° liegen die Beobachtungen v. Münchhausen's und die meinigen vor; um dieselben zu vergleichen, muss von einer Veränderlichkeit der specifischen Wärme innerhalb des Temperaturintervalles von 16—27° abgesehen werden, welches die Temperaturen des Calorimeters enthält.

Die Zusammenstellung ergibt:

T	Beobachter	Reihe	Mittl. spec. Wärme zw. 25° u. T ausgedr. nach der zwischen 16 u. 27° etwa
42,3	v. Münchh.	I.	1,0058
42	„	II.	1.0076
43,27	„	III.	1,0077
44,8	Velten	XV.	0,9939
50,2	„	X.	1,0048
54,02	v. Münchh.	IV.	1,0084
56,8	Velten	XIII.	1,0060
61,53	v. Münchh.	VI.	1,0091
64,25	„	V.	1,0080
74,7	Velten	VIII.	1,0004
75,5	„	XI.	1,0046
76,7	„	XII.	1,0047

Hier weichen nur die Beobachtungen zwischen 42 und 45° bis zu mehr als einem Procent voneinander ab; die übrigen Abweichungen für naheliegende Temperaturen sind kleiner als ein halbes Procent.

Es liefern also zwischen 50 und 80° meine Beobachtungen nahezu dieselben Werthe, wie die v. Münchhausen's; es ergibt sich also aus Uebereinstimmung beider Beobachter, dass über 40° hinaus ein Wachsen der specifischen Wärme stattfindet. Aus der Reihe XV ist:

$$\frac{c\,(45 \text{ bis } 26)}{c\,(26 \text{ bis } 18)} = 0{,}994\,;$$

setzt man ferner, wie aus X und XIII annähernd sich ergibt:

$$\frac{c\,(57 \text{ bis } 26)}{c\,(26 \text{ bis } 18)} = 1{,}005\,,$$

so wird: $\frac{W_{26}^{57}}{W_{26}^{45}} = 1{,}650.$

Berechnet man aber diesen nämlichen Werth nach der von Jamin und Amaury gegebenen Formel, so erhält man:

$$\frac{W_{26}^{57}}{W_{26}^{45}} = 1{,}643;$$

es lassen sich also, wenn man sich erlaubt, von der Verschiedenheit des Ganges abzusehen und nur diese Zahlen zu betrachten, für diese drei Temperaturen meine Beobachtungen nahezu durch die Formel von Jamin und Amaury darstellen; etwas weniger gut auch der aus XI und XII abgeleitete Werth:

$$\frac{W_{26}^{76}}{W_{26}^{45}} = \begin{cases} 2{,}660 & \text{Velten} \\ 2{,}679 & \text{Jamin u. Amaury.} \end{cases}$$

Wie schon hervorgehoben wurde, liefern meine sämmtlichen Beobachtungen für die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 25 und 100° Werthe, die kleiner sind als diejenige zwischen 16 und 25°. Diese Beobachtungen waren:

$$\text{IX. Reihe } \frac{c(97{,}4 \text{ bis } 26{,}80)}{c(26{,}80 \text{ bis } 16{,}56)} = 0{,}9924$$

$$\text{XIV. Reihe } \frac{c(98{,}3 \text{ bis } 27{,}32)}{c(27{,}32 \text{ bis } 18{,}97)} = 0{,}9888,$$

ferner nach den Versuchen mit dem in Glas eingeschlossenen Wasser: $\frac{c(99{,}6 \text{ bis } 21{,}96)}{c(21{,}96 \text{ bis } 15{,}64)} = 0{,}9941,$

indem ich das Mittel aus den beiden Grenzwerthen nehme.

Die anderen darüber vorliegenden Beobachtungen sind:

1. Regnault[1]):

$$\frac{c(97{,}6 \text{ bis } 14{,}9)}{c(14{,}9 \text{ bis } 8)} = 1{,}00709$$

$$\frac{c(98{,}1 \text{ bis } 16{,}4)}{c(16{,}4 \text{ bis } 8)} = 1{,}00890;$$

2. Baumgartner[2]):

$$\text{2. Reihe } \frac{c(98{,}16 \text{ bis } 14{,}51)}{c(14{,}51 \text{ bis } 1{,}36)} = 1{,}0185$$

$$\text{3. Reihe } \frac{c(98{,}15 \text{ bis } 22{,}30)}{c(22{,}30 \text{ bis } 12{,}10)} = 1{,}0115;$$

3. Rowland:

$$\frac{c(28 \text{ bis } 100)}{c(18{,}5 \text{ bis } 28)} = 1{,}0024.$$

1) Regnault, Ann. de chim. et de phys. (2.) **73.** p. 35. 1840.

2) Baumgartner, Wied. Ann. **8.** p. 648. 1879.

Benutzt man wieder die Rowland'schen Werthe für das mechanische Wärmeäquivalent zur Berechnung der Grösse W_{24}^{98}, so ergibt sich in Rowland's Einheiten:

			Mittel
nach Regnault:	1.	$W_{24}^{98} = 31{,}908$	31,940,
	2.	$W_{24}^{98} = 31{,}972$	
„ Baumgartner:	2. Reihe	$W_{24}^{98} = 32{,}410$	32,203,
	3. „	$= 31{,}995$	
„ Rowland:		$W_{24}^{98} = 31{,}600$	31,600,
„ Velten:	IX. Reihe	$W_{24}^{93} = 31{,}320$	
	XIV. „	$= 31{,}192$	31,311,
Versuche mit der Glasröhre		$= 31{,}420$	

es bliebe also zwischen den Beobachtungen von Regnault und den meinigen ein Unterschied von mehr als 2 Proc.

Wenn aber, wie dies oben als wahrscheinlich dargelegt wurde, von 6° bis über 12° hinaus ein Wachsen der specifischen Wärme stattfindet, so muss in dem Werthe $c(98 \text{ bis } 15)/c(8 \text{ bis } 15)$ der Zähler mindestens gleich, wo nicht grösser, der Nenner aber wesentlich kleiner sein, als in dem Werthe $c(98 \text{ bis } 27)/c(27 \text{ bis } 17)$, also muss der erste Quotient grösser ausfallen.

Es dürften also auch hier, wenn von Baumgartner abgesehen wird, keine Unterschiede zurückbleiben, die ein Proc. übersteigen.

Ueber 100° hinaus liegen blos die Beobachtungen von Regnault[1]) vor; diese geben aber Anlass zu ernsten Bedenken. Als mittlere specifische Wärme zwischen T und t wird überall ein Werth gegeben, der grösser ist als Eins, während eine Berechnung dieser Werthe nach den Beobachtungsdaten zum Theil ganz andere Zahlen ergibt. Diese sind mit den Regnault'schen in folgender Tabelle zusammengestellt; es bezeichnet P das Gewicht des kalten Wassers im Calorimeter, p das Gewicht des warmen Wassers und T dessen Temperatur nach dem Luftthermometer, t_0 und t_1 die Anfangs- und Endtemperatur des Calorimeters, (t_1 steht in den Mémoires als température initiale). Als mittlere specifische Wärme des Wassers zwichen t_1 und T gibt c_a die in den Mémoires de l'Academie verzeichneten Werthe, c_b die nach den Beobachtungsdaten berechneten.

1) Regnault, Mémoires de l'Acad. des sciences **21.** p. 729. 1847.

Nr.	P	p	T	t_0	t_1	$t_1 - t_0$ corrigirt	c_a	c_b
	g	g						
1	99626,6	10059,8	107,70°	11,70°	20,50°	8,8234°	1,00184	1,0021
2	99656,0	10035,6	107,90	11,81	20,63	8,8271	1,00440	1,0044
3	99614,4	10187,0	107,79	12,39	21,18	8,7917	1,00527	0,9926
4	99672,6	10057,4	109,38	8,37	17,67	9,2979	1,00476	1,0048
5	99692,7	10038,3	109,25	8,27	17,58	9,3080	1,00837	1,0084
6	99664,8	10064,8	109,25	8,51	17,81	9,2979	1,00687	1,0069
7	99657,6	10075,9	109,25	8,42	17,73	9,3143	1,00659	1,0066
8	99642,3	9995,9	110,80	13,72	22,61	8,8929	1,00540	1,0052
9	99618,3	9999,6	111,51	13,82	22,77	8,9524	1,00489	1,0050
10	99583,6	10039,6	113,86	14,07	23,25	9,1807	1,00552	1,0050
11	99640,7	10180,0	116,60	12,45	22,03	9,5707	1,00791	0,9906
12	99638,6	10182,0	116,91	12,37	21,99	9,6080	1,00741	0,9905
13	99635,8	10192,0	118,54	12,31	22,05	9,7401	1,00599	0,9868
14	99626,0	9973,0	120,39	13,81	23,53	9,7479	1,00499	1,0053
15	99568,4	10036,4	120,84	13,93	23,74	9,8343	1,00443	1,0048
16	99628,6	9966,4	121,86	13,78	23,67	9,8947	1,00681	1,0074
17	99628,6	9979,6	128,91	12,85	23,46	10,6298	1,00631	1,0064
18	99658,6	9959,4	130,40	12,74	23,45	10,7580	1,00568	1,0065
19	99631,6	9957,8	137,16	13,12	24,46	11,3549	1,00738	1,0081
20	99635,7	9949,1	137,27	13,13	24,49	11,3653	1,00786	1,0092
21	99641,6	9929,6	138,27	13,11	24,52	11,4232	1,00663	1,0077
22	99650,1	9886,5	153,68	13,79	26,50	12,7137	1,00724	1,0076
23	99642,6	9904,4	154,80	12,96	25,89	12,9265	1,00848	1,0088
24	99635,0	9928,2	155,61	13,00	25,97	13,0049	1,00642	1,0067
25	99652,2	9887,8	156,82	13,16	26,23	13,0793	1,00925	1,0094
26	99626,4	9912,2	158,82	13,17	26,45	13,2785	1,00780	1,0082
27	99662,5	10150,0	159,19	12,84	26,14	13,3195	1,00699	0,9830
28	99643,6	9886,6	160,34	13,18	26,58	13,4007	1,00952	1,0097
29	99742,6	10011,0	160,61	12,71	26,07	13,3714	1,01053	0,9902
30	99686,2	9931,2	172,66	8,73	23,69	14,9830	1,00923	1,0096
31	99689,8	9925,2	172,75	8,93	23,93	14,9992	1,01201	1,0123
32	99696,6	9915,6	172,71	9,04	24,01	14,9725	1,01207	1,0124
33	99676,0	9947,6	172,66	9,12	24,13	15,0098	1,01228	1,0126
34	99786,3	10125,0	179,23	13,00	28,03	15,0311	1,01662	0,9798
35	99774,8	10102,0	183,56	12,86	28,19	15,3348	1,01430	0,9748
36	99784,8	10105,0	186,00	12,96	28,51	15,5490	1,01499	0,9749
37	99687,4	10152,0	186,65	12,96	28,74	15,7561	1,01756	0,9798
38	99646,6	10182,0	186,89	12,99	28,82	15,8352	1,01487	0,9804
39	99710,8	10160,0	187,75	13,58	29,33	15,7505	1,01621	0,9757
40	99713,0	10107,0	190,36	13,46	29,43	15,9842	1,01528	0,9799

Diese Verschiedenheit der Zahlen konnte ich mir nicht durch Druckfehler erklären; es wurde Seitens des Hrn. Prof. Wüllner wegen dieses Umstandes eine Anfrage an die Academie gerichtet, diese scheint aber keine Aufklärung geben zu können.

Sind die von mir berechneten Zahlen die richtigen, so lässt sich aus Regnault's Versuchen ein Wachsen der specifischen Wärme des Wassers nicht folgern, sondern nur, wenigstens gegen die höheren Temperaturen hin — die letzten sieben Zahlen sind fast sämmtlich um mehr als 2 Proc. kleiner als die Einheit — eine Abnahme derselben.

4. Gesammtergebniss der Beobachtungen nach der Mischungsmethode. — Das Gesammtergebniss über den Gang der specifischen Wärme des Wassers zwischen 5 und 190° würde sich also folgendermassen gestalten:

1. Von 5 bis über 12° hinaus ein Wachsen; von 26—40° eine Abnahme, also zwischen 12 und 26° ein Maximum.

2. Von 40—70° eine Zunahme; also in der Nähe von 40° ein Minimum.

3. Ueber 100° hinaus eine Abnahme, also in der Nähe von 100° ein Maximum.

Obgleich der Versuch, die Beobachtungen der verschiedenen Beobachter durch eine Interpolationsformel darzustellen, keinen besonderen Erfolg zu versprechen schien, entschloss ich mich doch nach Vollendung meiner ersten acht Reihen, denselben zu machen. Ich setzte zu diesem Zweck nach der gebräuchlichen Weise die wahre specifische Wärme bei t^0:

$$k_t = 1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3,$$

woraus die mittlere specifische Wärme zwischen t und T:

$$c_{T,t} = 1 + \frac{\alpha}{2}(T + t) + \frac{\beta}{3}(T^2 + Tt + t^2) + \frac{\gamma}{4}(T^2 + t^2)(T + t),$$

und benutzte zur Bestimmung der Constanten α, β, γ folgende Beobachtungen:

1. Die von v. Münchhausen.

2. Die oben angeführte von Rowland bei Siedetemperatur.

3. Die von Regnault, wie sie sich durch Berechnung aus den Beobachtungsdaten ergeben, indem ich dieselben zu sechs Mittelwerthen von drei bis acht Beobachtungen zusammenzog.

4. Meine ersten acht Reihen.

Ich fand:

$$\frac{\alpha}{2} = -\,0{,}000\,731\,275\,6\,, \qquad \frac{\beta}{3} = +\,0{,}000\,007\,932\,7\,,$$

$$\frac{\gamma}{4} = -\,0{,}000\,000\,026\,79\,,$$

und nach dieser Formel wird die Zusammenstellung einiger berechneter Werthe mit den beobachteten:

T	t	ϑ	$\frac{c\,(T \text{ bis } t)}{c\,(t \text{ bis } \vartheta)}$ berechnet	beobachtet	
42	27	20	0,9963	1,0058	v. Münchh.
64	27	19	0,9952	1,0080	„
41	18	7	0,9899	0,9863	Velten.
94	27	18	0,9985	0,9945	„
100	28	18	0,9984	1,0024	Rowland.
186	29	13	0,9856	0,9777	Regnault.

Diese Formel gibt für k_t ein Minimum bei 43,5° und ein Maximum bei 104,5°. Von 0—43,5° würde nach der Formel eine beständige Abnahme folgen, wie dieselbe durch Rowland's Beobachtungen thatsächlich gegeben wird. Indessen spricht dieser Umstand keineswegs für die genaue Richtigkeit der Beobachtungen Rowland's, sondern hat seinen Grund darin, dass die Gleichung, aus welcher die Temperaturen des Maximums und Minimums berechnet werden, nur vom zweiten Grade ist. Sollte durch die Formel auch das Maximum zwischen 12 und 26°, sowie die zwischen 0 und 5° aller Wahrscheinlichkeit nach vorhandenen Maxima oder Minima dargestellt werden — wahrscheinlich sind solche, denn darauf deuten die Beobachtungen von Pfaundler und Platter [1]), ferner die von Gerosa, und auch Regnault [2]) hat Andeutungen eines solchen gefunden —, so müsste die Formel mehr Glieder enthalten.

Es schien mir nach dem Vorhergehenden zwar der Gang der specifischen Wärme des Wassers wenigstens von 5—190° hinreichend festgestellt, nicht aber die genaue Grösse derselben

1) Pfaundler und Platter, Pogg. Ann. **141.** p. 537. 1870.
2) Regnault, Compt. rend. **70.** p. 665. 1870.

für die einzelnen Temperaturen. Die grosse Wichtigkeit aber, die die Kenntniss der letzteren für alle Theile der Wärmelehre hat, verlangte eine weitere Untersuchung nach einer anderen Methode. Denn nach der Mischungsmethode bleiben, wie die Vergleichung gezeigt hat, zwischen den verschiedenen Beobachtern immer Abweichungen bis zu einem Procent bestehen; nach ihr scheinen also genauere Resultate nicht erreichbar zu sein. Deshalb entschloss ich mich, die ganze Untersuchung noch einmal nach der Methode des Eisschmelzens vorzunehmen, zumal diese den Vorzug hat, alle Wärmemengen durch sichere invariable Einheiten ausgedrückt zu liefern.

II. Die Versuche mit dem Eiscalorimeter.

1. Die angewandte Substanz. — Das zu den Versuchen benutzte Wasser war eingeschlossen in einem Platintiegel von cylindrischer Gestalt, der sich oben in eine dünne Röhre fortsetzte. Nachdem der Tiegel gefüllt war, wurde das obere Ende der Röhre zugelöthet — eine Aufgabe, die von dem Mechaniker des hiesigen physikalischen Cabinets, Hrn. Feldhausen, mit Leichtigkeit gelöst wurde. Die Controle dafür, dass der Tiegel dicht sei, ergab eine zweite Wägung nach zweistündigem starkem Erhitzen in Siedetemperatur; die Controle wurde nach jeder Versuchsreihe wiederholt.

Der erste Tiegel enthielt 5,845 g Wasser; das Platin mit Loth wog 3,299 g. Das Platin an den Seitenwänden war so dünn, dass schon durch die Abkühlung im Calorimeter, wenn der Tiegel aus hoher Temperatur in dasselbe kam, die Seitenwände nach innen gedrückt wurden. Dieser Tiegel wurde, nachdem er ein Vierteljahr gedient hatte, undicht; zwar betrug die Gewichtszunahme nur 2 mg, indessen hielt ich es für besser, die ganze letzte Reihe der Beobachtungen zu verwerfen. An seiner Stelle wurde sodann ein zweiter Tiegel aus etwas stärkerem Platin angefertigt; derselbe enthielt 5,667 g Wasser; das Platin nebst Loth wog 5,239 g; er hielt dicht bis zum Schlusse sämmtlicher Versuche und zeigte nur diejenige Gewichtsabnahme, die der äusseren Abnutzung des Platins entspricht; die Gewichte waren (sämmtlich uncorrigirt):

1882	Januar	23.	10,9002 g	1883	Februar	11.	10,8986 g
	Februar	2.	10,8997 „		März	3.	10,8985 „
	„	20.	10,8996 „		„	14.	10,8984 „

Zur Bestimmung der specifischen Wärme des Platins wurde in den ersten Tiegel, nachdem der obere Theil entfernt war, ein dickes Stück Platin hineingesteckt; das Gesammtgewicht des Platins betrug 14,491 g. Die Erwärmung geschah in derselben Weise wie bei den anderen Versuchen.

2. Die Erwärmung und Bestimmung der Temperatur. — Der Apparat, welcher den Tiegel zum Zwecke der Erwärmung aufnahm, war ähnlich dem zur Erwärmung der Glasröhre mit eingeschmolzenem Wasser gebrauchten; indessen konnte derselbe wegen der kleineren Verhältnisse aus Glas hergestellt werden; er bestand also aus einer Glasröhre, die an den Seiten und unten von einem Wassermantel umgeben war. Das Ende der Röhre wurde durch einen festeingepassten Kork verschlossen, welcher durchbohrt war zum Durchlassen eines Thermometers. Dieser Apparat wurde zu den Versuchen mit Siedetemperatur in den Siedeapparat gesetzt und durch einen passenden Kork in demselben gehalten; bei den anderen Versuchen hing er in einem grossen, etwa 36 l fassenden Wasserbade, gehalten durch das Thermometer, dessen obere Röhre in einem Stativ eingeklemmt war. Die Eintauchung in das Bad war derart, dass noch ein Theil des verschliessenden Korkes unter die Oberfläche des Wassers herunterragte. In dem Bade befand sich ein Rührer, der durch eine Dampfmaschine beständig bewegt wurde; das Constanthalten der Temperatur geschah durch gehörig regulirte Gasbrenner, unter Umständen auch mit Hülfe von erwärmtem Wasser oder in niederen Temperaturen von Eis.

Zunächst trat auch bei diesen Versuchen der Uebelstand hervor, dass bei höheren Temperaturen die Temperatur in der Röhre stets etwas unter derjenigen des Bades blieb, trotzdem der Kork so fest anschloss, wie dies irgend möglich war. Indessen gelang es hier durch eine nicht unbedeutende Menge von Watte, die mittelst Kautschukpapier fest aufgepackt und mit Drähten festgeschnürt wurde, diesen Missstand ganz zu beseitigen.

Nachdem das Bad mit eingesetztem Erwärmungsapparat die gewünschte Temperatur erreicht hatte, hielt ich es noch zwei Stunden lang constant; diese Zeit schien mir erforderlich, da besondere zu diesem Zwecke angestellte Versuche zeigten, dass selbst nach anderthalbstündigem Erwärmen es mindestens fraglich sei, ob das Wasser im Tiegel bis auf die letzten Hundertelgrade die Temperatur des Bades angenommen. Ein zweistündiges Constanthalten indessen genügte vollständig; in diesem Falle erhielt ich dieselben Resultate, mochte ich den Tiegel kalt, oder mit Siedetemperatur in das Bad setzen; auch wurde der Werth kein anderer, wenn ich statt zwei Stunden drei Stunden lang das Bad constant hielt — Variationen, die ich bei den ersten Versuchsreihen beständig anwandte.

Nach vollendeter Erwärmung wurden die Drähte der Verpackung gelöst, der Erwärmungsapparat herausgenommen und in ein Tuch eingeschlagen, sodann zum Calorimeter gebracht, die Verpackung und der Kork entfernt und das Hineinfallen des Tiegels bewerkstelligt. Der ganze Vorgang vom Herausnehmen aus dem Bade bis zum Einfallen des Tiegels nahm im Durchschnitt 15—20 Sec. in Anspruch; während dieser Zeit schützte das Wasser zwischen der inneren und äusseren Wandung des Erwärmungsapparates die innere Röhre vollständig vor jeder Wärmeabgabe. Besondere Proben, durch welche ich mich davon überzeugen wollte, zeigten, dass etwa anderthalb Minuten vergingen, ehe das innere Thermometer die geringste Aenderung der Temperatur anzeigte.

Die Temperatur des Bades wurde direct durch das Luftthermometer bestimmt, dessen Kugel sich ebenfalls in dem Bade befand; die Ablesung geschah durch ein Kathetometer. Nullpunkt und Siedepunkt des Luftthermometers wurden alle 14 Tage neu bestimmt, sodass also insbesondere auch ein Fehler in der Bestimmung des Nullpunktes ausgeschlossen ist. Zum Nachweise, dass die Temperatur innerhalb des Bades constant blieb, dienten zwei in 0,1° getheilte Normalthermometer; ausser ihnen benutzte ich für niedrige Temperaturen noch ein in 0,04° getheiltes von −3 bis +29° gehendes und ein in 0,02° getheiltes von 14—28°. Mit ihnen wurde nach dem Einfallen des Tiegels in das Calorimeter das ins Innere des Erwärmungs-

apparates reichende Thermometer, dasselbe in 0,1° getheilte, welches bei den Versuchen nach der Mischungsmethode die Temperatur des heissen Wassers angab, verglichen, zur Prüfung, ob die Temperatur im Innern des Erwärmungsapparates derjenigen des Bades gleich war.

3. Die Behandlung des Eiscalorimeters und die Beobachtung mit demselben. — Das zu den Beobachtungen benutzte Eiscalorimeter war ein genau nach den Vorschriften von Schuller und Wartha construirtes Gewichtscalorimeter. Zur Herstellung des inneren Eiskernes wurde stets das Verfahren von Bunsen angewendet, jedoch erfolgte die Bildung des Eiskernes auf zwei wesentlich verschiedene Arten. War in dem Calorimeter kein Eis vorhanden, so erfolgte zunächst eine sehr starke Ueberkältung, bis plötzlich, in der von Bunsen beschriebenen Weise, im Calorimeter sich strahlenförmig von der inneren Röhre ausschiessende Eisnadeln bildeten, deren Zwischenräume sich dann allmählich von der Röhre aus mit Eis ausfüllten. War hingegen in dem Calorimeter schon Eis vorhanden, indem man einen kleinen Rest des verbrauchten Kernes zurückliess, so bildete sich sofort an der Röhre eine kleine Schicht von Eis, die dann allmählich anwuchs. Nur in Einem Falle erfolgte die letztere Bildung ohne ein Vorhandensein von Eis.

Mit dieser Bildung des Eiskernes steht in enger Beziehung die Grösse des beim fertigen Eiskerne beständig vorhandenen freiwilligen Weiterfrierens oder Abschmelzens. Schuller und Wartha haben durch Versuche gezeigt, dass der Druck von Einfluss ist, den das Eis erleidet; von Einfluss ist ferner, wie es auch Neesen praktisch erfuhr, eine Verunreinigung der das Calorimeter umgebenden Mischung von Wasser mit Eis. Meine Erfahrungen zeigen, dass die beiden Umstände nicht allein die Ursache bilden; denn unter völliger Gleichheit beider Verhältnisse zeigten die durch vorherige Ueberkältung gebildeten Eiskerne ein beständiges Weiterfrieren, die anderen eine beständige Abschmelzung. Die Grösse beider scheint eine von der jedesmaligen Zusammensetzung des Apparates abhängige Grösse zu sein, die sich im Laufe der Zeit nur wenig ändert, wie dies aus den folgenden Zahlen hervorgeht:

1882					Corr. für 1^h	bestimmt aus einem Zeitraume von rund
Jan.	31	bis	Febr.	1	0,0088 g	25^h
Febr.	1	„	„	2	76	19^h
„	3	„	„	4	0,0102	—
„	4	„	„	5	102	16^h
„	5	„	„	6	105	19^h
„	6	„	„	7	101	17^h

und bei einem anderen Eiskern:

1881.	Dec.	18	bis	Dec.	19	0 g 22^h
	„		19			0 3^h
	„		„			0 1$^3/_4{}^h$
	„		„			0 2^h
	„	19	„	„	20	0,0056 13^h
	„	20				34 $2^3/_4$
	„	„				32 1^h
	Dec.	20	bis	21		18 16^h
	„	21	„	22		19 21^h
	„	22				24 3^h
	„	„				5 3^h
	„	23	„	24		9 17^h
	„	24	„	26		31 49^h
	„	27				25 $2^1/_4{}^h$
	„	„				23 $^1/_2$
	„	„				30 $^1/_4$
	„	28				21 $^1/_2{}^h$ u. s. f.

und als Beispiel für Abschmelzung:

1883.	März	27	bis	28	−0,0142 g	15^h
	„	28	„	29	123	22^h
	„	29	„	30	127	14^h
	„	30	„	31	133	15^h
	März	31	„	April 1	124	20^h
	April	1	„	„ 2	105	17^h
	„	2	„	3	109	14^h
	„	3	„	4	115	15^h u. s. w.

Man ersieht zugleich, dass die stündliche Correction bei den verschiedenen Eiskernen eine sehr verschiedene Grösse hat; sie erreichte in einzelnen Fällen 18—22 mg. In diesen Fällen ergeben sich also etwa 40—50 mg, um welche die beobachtete durch das Schmelzen des Eises eingesaugte Quecksilbermenge zu corrigiren ist; eine Correction, die bei Siedetemperatur, wo etwa 9 g eingesaugt wurden, zwar erst 0,5 Proc. des Ganzen

ausmacht, dagegen bei Versuchen in der Nähe von 7° schon 6—8 Proc. Bei diesen Beobachtungen kann also ein Fehler in der Correction schon einen Einfluss auf das Resultat ausüben. Mit aus diesem Grunde hielt ich es für nützlich, die Beobachtungen für eine bestimmte Temperatur nicht nacheinander anzustellen, sondern möglichst auf verschiedene Eiskerne zu vertheilen.

Der Zeitraum, in welchem die durch das Einfallen des Tiegels eingebrachte Wärme vollständig zur Eisschmelzung verbraucht war, war verschieden. Bei einem ganz frischen Eiskern genügten drei Viertelstunden; bei einem schon mehrfach benutzten konnten mitunter zwei Stunden erforderlich sein. Zur Controle, ob alle Wärme verbraucht sei, wechselte ich vom Ablauf einer bestimmten Zeit an jede Viertelstunde die Näpfchen, bis die Grösse der vorher bestimmten Correction wieder erreicht war. Auf Grund der auf diese Weise gemachten Erfahrungen liess ich dann den Tiegel in der Regel zwei Stunden und länger im Calorimeter, bevor ich die Näpfchen wechselte; bei der Regelmässigkeit des freiwilligen Abschmelzens oder Nachfrierens konnte dies Verfahren keinerlei Bedenken in Hinsicht auf die Correction verursachen, während es mir die Sicherheit gab, dass alle Wärme zum Schmelzen verbraucht war.

Noch will ich bemerken, dass durch das Herausnehmen des Tiegels, mochte es nun durch eine Zange geschehen, oder nach dem Vorgange von Than's durch ein Körbchen, jedesmal eine messbare (d. h. einige Milligramm Quecksilber betragende) Aenderung in den Verhältnissen verursacht wurde; es durfte somit die Bestimmung der Correction nie in der ersten Zeit nach dem Herausnehmen des Tiegels vorgenommen werden.

Das Gefäss, welches das Calorimeter aufnahm, war aus Messing; da ich bei dem Füllen desselben die möglichste Sorgfalt auf Reinheit des hineingebrachten Wassers verwendet hatte, so war ein volles halbes Jahr kein schädlicher Einfluss zu bemerken; erst nach dieser Zeit wurde dieses Wasser durch anderes ersetzt.

4. Die Ergebnisse der Beobachtungen.

a) Die specifische Wärme des Platins.

Gewicht des angewandten Platins 14,491 g.

	Temperat. des erwärmten Platins	Eingesaugtes Quecksilber corr. im ganzen	Eingesaugtes Quecksilber corr. für 1°
		g	g
1)	40,2	0,2889	0,00719
2)	40.93	2868	701
3)	41,12	2908	707
4)	41,43	2920	705
5)	41,59	2868	690
6)	41,66	3005	721
7)	41,7	3009	722
8)	41,91	2957	706
9)	41,98	2932	699
10)	43,35	3017	696
11)	43,42	2998	691
12)	43,92	3151	718
		Mittel	0,007060

	Temperat. des erwärmten Platins	Eingesaugtes Quecksilber corr. im ganzen	Eingesaugtes Quecksilber corr. für 1°
		g	g
1)	100,16	0,7030	0,00702
2)	100,16	7078	707
3)	100,29	7056	704
4)	100,3	7027	701
5)	100,3	7094	707
6)	100,3	7065	704
		Mittel	0,007041

welche Zahlen sich auf das Gesammtgewicht des Platins beziehen.

Bei dem Tiegel Nr. 1 beträgt das Gewicht des Platins 3,299 g, also kommt bei der Abkühlung des Tiegels um 1° auf Rechnung des Platins:

von 0— 40° 0,001 607 g Quecksilber
„ 0—100° 0,001 603 „ „ .

Bei dem Tiegel Nr. 2 beträgt das Gewicht des Platins 5,239 g, also kommt für 1° auf Platin:

von 0— 40° 0,002 552 g Quecksilber
„ 0—100° 0,002 546 „ „ .

Die durch Abkühlung des Tiegels Nr. 1 eingesaugte Quecksilbermenge für 1° berechnet betrug im Durchschnitt 0,09200 g; auf die Hülle kommt also weniger als 2 Proc. des Ganzen; es würde somit selbst ein Fehler von 2 Proc. in der specifischen Wärme des Platins das Resultat erst um 0,03 Proc. beeinflussen; bei dem Tiegel Nr. 2 wäre der Einfluss etwa das Doppelte.

b) Die specifische Wärme des Wassers.

			Temperat. des Tiegels nach dem Luftthermom.	Eingesaugtes Quecksilber corrigirt in g im ganzen beob. mit Tiegel Nr. I	Tiegel Nr. II	für 1° und 1 g Wasser
1883	März	28	5,98	—	0,555	0,01592
„	„	26	6,31	—	0,581	1580
„	„	27	7,04	—	0,649	1581
„	„	26	7,24	—	0,666	1579
„	„	12	[7,45	—	0,730	1684][1])
„	„	13	7,49	—	0,694	1590
„	„	27	8,06	—	0,739	1573
„	„	14	8,12	—	0,751	1586
„	„	15	8,27	—	0,777	1613
	Mittel		7,31	—	—	0,015869
1883	April	2	9,93	—	0,911	0,01574
„	Febr.	19	9,945	—	0,922	1592
„	März	30	10,15	—	0,924	1562
„	„	29	10,60	—	0,960	1553
„	„	8	11,46	—	1,058	1585
„	„	31	11,49	—	1,058	1580
„	„	9	11,63	—	1,060	1564
„	April	2	11,72	—	1,063	1555
	Mittel		10,87	—	—	0,015704
1883	Febr.	26	12,10	—	1,107	0,01569
„	März	7	12,23	—	1,107	1552
„	Febr.	4	12,30	—	1,123	1566
„	„	4	12,45	—	1,138	1568
„	„	6	12,45	—	1,144	1577
„	„	6	12,50	—	1,147	1574
	Mittel		12,34	—	—	0,015675
1881	Nov.	23	14,12	1,305	—	0,01553
„	„	16	14,46	1,342	—	1560
1883	April	4	14,72	—	1,357	1582
„	März	29	14,83	—	1,350	1562
„	April	3	14,83	—	1,353	1564
	Mittel		14,59	—	—	0,015642

1) Diese Zahl ist offenbar falsch, ohne dass ich im Stande bin, anzugeben, welcher Unfall bei der Beobachtung gewaltet hat. Dieselbe wurde bei der Bildung des Mittels nicht verwendet.

			Temperat. des Tiegels nach dem Lufttherm.	Eingesaugtes Quecksilber corrigirt in g im ganzen beob. mit Tiegel Nr. I	Tiegel Nr. II	für 1° und 1 g Wasser
1881	Dec.	8	17,02	1,581	—	0,01562
„	Nov.	15	17,24	1,597	—	1557
„	„	21	17,80	1,664	—	1572
„	„	15	17,90	1,657	—	1556
„	Dec.	3	17,91	1,671	—	1569
„	„	3	18,00	1,686	—	1575
1883	Febr.	26	18,36	—	1,680	1569
1881	Dec.	1	18,44	1,724	—	1572
„	Nov.	24	18,59	1,729	—	1564
„	Dec.	4	18,64	1,735	—	1565
„	„	1	18,65	1,741	—	1570
1883	Febr.	13	19,22	—	1,738	1551
„	„	17	19,36	—	1,749	1549
„	„	17	19,85	—	1,804	1559
	Mittel		18,36	—	—	0,015636
1883	März	30	22,98	—	2,092	0,01562
„	April	3	23,06	—	2,099	1561
„	März	31	23,09	—	2.095	1556
	Mittel		23,04	—	—	0,015595
1883	März	8	27,25	—	2,473	0,01556
„	„	7	27,36	—	2,478	1553
1881	Dec.	2	27,52	2,553	—	1560
1883	März	6	27,53	—	2,484	1547
1881	Nov.	21	27,64	2,549	—	1550
„	„	30	27,68	2,585	—	1571
„	„	25	27,80	2,572	—	1555
„	Dec.	2	27,82	2,590	—	1565
„	Nov.	30	27,88	2,597	—	1566
„	„	22	27,92	2,576	—	1551
„	„	23	28,01	2,599	—	1560
	Mittel		27,67	—	—	0,015577
1883	Febr.	12	40,2	—	3,636	0,01551
1881	Dec.	14	40,22	3,711	—	1551
1883	Febr.	26	40,55	—	3,672	1553
1881	Dec.	19	40,9	3,754	—	1543
„	„	14	41,02	3,771	—	1545
	Mittel		40,58	—	—	0,015486

			Temperat. des Tiegels nach dem Lufttherm.	Eingesaugtes Quecksilber corrigirt in g im ganzen Tiegel Nr. I	beob. mit Tiegel Nr. II	für 1° und 1 g Wasser
1882	Jan.	30	41,52	—	3,743	0,01546
1883	Febr.	28	41,68	—	3,771	1552
„	„	15	41,77	—	3,768	1547
„	„	14	41,84	—	3,784	1551
1881	Dec.	13	41,98	3,868	—	1549
1883	Febr.	16	42,74	—	3,849	1544
1882	Jan.	24	43,43	—	3,916	1546
	Mittel		42,14	—	—	0,015477
1882	Jan.	25	53,85	—	4,860	0,01548
„	„	28	55,14	—	4,961	1543
1881	Dec.	20	56,11	5,164	—	1547
1883	März	5	56,49	—	5,080	1542
„	„	6	56,65	—	5,099	1543
„	„	5	56,68	—	5,108	1545
1881	Dec.	22	58,00	5,327	—	1544
	Mittel		56,13	—	—	0,015445
1881	Dec.	11	70,9	6,506	—	0,01543
„	„	12	70,5	6,474	—	1544
„	„	9	70,6	6,462	—	1539
1883	Febr.	12	70,65	—	6,406	1555
1881	Dec.	9	70,7	6,502	—	1546
1883	Febr.	16	71,59	—	6,457	1547
1881	Dec.	10	71,7	6,599	—	1547
	Mittel		70,95	—	—	0,015457
1883	Febr.	9	99,32	—	8,976	0,01550
1881	Nov.	26	99,33	9,130	—	1545
„	„	20	99,50	9,154	—	1546
„	„	29	99,52	9,158	—	1547
„	„	13	99,77	9,187	—	1549
1883	März	2	100,00	—	9,009	1545
„	„	2	100,01	—	9,024	1547
1882	Febr.	2	100,02	—	9,028	1548
	Mittel		99,68	—	—	0,015471

Direct vergleichbar sind die vorstehenden Beobachtungen nur mit solchen nach derselben Methode, also mit denen von Bunsen, Schuller und Wartha und Neesen.

Für die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 0 und 100° fand Bunsen[1]) 0,01541 g Quecksilber, Schuller und Wartha als Mittel aus fünf Versuchen 0,015 442 g[2]), eine Zahl, welche von der meinigen nur um 0,2 Proc. abweicht; es stimmen also, besonders wenn man berücksichtigt, dass Schuller und Wartha eine Glashülle statt des Platins hatten, und dass das von ihnen verwandte Wasser nur ein Gewicht von 0,7253 g hatte, beide Resultate gut überein.

Die anderen vergleichbaren Beobachtungen sind die von Neesen[3]). Ich habe einen Theil seiner Resultate, soweit sie vergleichbar sind, auf die Einheiten meiner Beobachtungen umgerechnet; zu jeder Gruppe der Beobachtungen Neesen's setze ich der Uebersicht halber von der entsprechenden Gruppe der meinigen drei Werthe, nämlich:

a) das Mittel,

b) den grössten,

c) den kleinsten der gefundenen Werthe; die vorhergehende und nachfolgende Temperatur bezeichnen die Grenzen, innerhalb deren die zum Mittel verwandten Beobachtungen lagen

Neesen			Velten		
Nr.	t Luftth.	Mittl. sp. W. zw. 0 u. t	T Luftth.	Mittl. sp. W. zw. 0 u. T	Anzahl d. Beob.
11.	5,79	0,01510			
12.	6,21	1449	5,98		
13.	6,41	1466	a) 7,31	0,015869	8
14.	6,87	1503	b) 8,27	1613	
15.	7,35	1558	c) 8,06	1573	
16.	7,60	1554	8,27		
17.	7,64	1537			
			9,93		
18.	9,68	0,01540	a) 10,87	0,015704	8
19.	11,08	1629	b) 9,945	1592	
20.	11,40	1634	c) 10,60	1553	
			11,72		
			12,10		
21.	12,07	0,01633	a) 12,34	0,015675	6
22.	12,84	1535	b) 12,45	1577	
			c) 12,23	1552	
			12,50		

1) Bunsen, Pogg. Ann. **141.** p. 1. 1870.

2) Schuller u. Wartha, Wied. Ann. **2.** p. 359. 1877.

3) Neesen, Wied. Ann. **18.** p. 369. 1883.

Neesen			Velten			
Nr.	t Luftth.	Mittl. sp. W. zw. 0 u. t	T Luftth.	Mittl. sp. W. zw. 0 u. T	Anzahl d. Beob.
23.	13,56	0,01538			
24.	13,78	1496	14,12		
25.	14,48	1438	a) 14,59	0,015642	5
26.	15,04	1538	b) 14,72	1582	
27.	15,14	1552	c) 14,12	1553	
			14,83		
28.	15,94	1544			
29.	16,55	1586			
30.	17,72	0,01633	17,02		
31.	18,03	1656	a) 18,36	0,015636	14
32.	19,10	1654	b) 18,00	1575	
33.	19,51	1582	c) 19,36	1549	
34.	20,50	1562	19,85		
36.	23,02	0,01484	22,98		
35.	23,50	1437	a) 23,04	0,015595	3
37.	24,02	1541	b) 22,98	1562	
38.	24,32	1693	c) 23,09	1556	
39.	25,19	1556	23,09		
40.	27,32	0,01539	27,25		
41.	28,42	1553	a) 27,67	0,015577	11
42.	28,71	1591	b) 27,88	1566	
43.	29,11	1530	c) 27,53	1547	
44.	29,14	1610	28,01		
45.	29,70	1555			
46.	30,06	1544			
47.	30,12	1557			
48.	30,75	1529			

Man ersieht, dass die Zahlen von Neesen, die übrigens auch blos orientirende sein sollen, bei ihren grossen Abweichungen voneinander, noch nicht jene Genauigkeit erreichen, die zu einer Vergleichung erforderlich ist.

Aus seinen Versuchen mit dem Eiscalorimeter leitet Henrichsen[1]) eine Formel ab, die offenbar den Gang der specifischen Wärme des Wassers nicht richtig darstellt. Da indessen seine Resultate nur auf willkürliche Einheiten bezogen sind, so lassen sich seine einzelnen Beobachtungen nicht auf meine Einheiten umrechnen, also auch nicht direct vergleichen.

1) Henrichsen, Wied. Ann. 8. p. 83. 1879.

5. Umformung der Resultate und Folgerungen aus denselben. — Aus den oben angegebenen Resultaten leiten sich für die mittleren specifischen Wärmen folgende Werthe ab:

Beobachtete mittl. spec. Wärme zwischen 0 und t in g Quecksilber		Zwischen t_1 u. t_2	Mittlere spec. Wärme
c (0 bis 7,31) =	0,015 869	7,31 und 10,87	0,015 365
c (0 bis 10,87) =	15 704	10,87 und 12,34	15 461
c (0 bis 12,34) =	15 675	12,34 und 14,59	15 461
c (0 bis 14,59) =	15 642	12,34 und 18,36	15 556
c (0 bis 18,36) =	15 636	14,59 und 18,36	15 613
c (0 bis 23,04) =	15 595	18,36 und 23,04	15 434
c (0 bis 27,67) =	15 577	18,36 und 27,67	15 461
c (0 bis 40,58) =	15 486	23,04 und 27,67	15 487
c (0 bis 42,14) =	15 477	27,67 und 40,58	15 291
c (0 bis 56,13) =	15 445	40,58 und 42,14	15 243
c (0 bis 70,95) =	15 457	42,14 und 56,13	15 349
c (0 bis 99,68) =	15 471	56,13 und 70,95	15 503
		70,95 und 99,68	15 506

Diese Zahlen besagen Folgendes:

1. Zwischen 0 und 7,31° ist die mittlere specifische Wärme die grösste, die überhaupt für ein Temperaturintervall vorkommt.

2. Zwischen 7,31 und 10,87° ist dieselbe um mehr als $3^1/_3$ Proc. kleiner; darauf steigt die specifische Wärme und erreicht zwischen 14 und 27° ein Maximum.

Lässt man das Mittel bei 23,04° weg, welches nur drei Beobachtungen enthält, dem somit ein bedeutend geringeres Gewicht zuzuschreiben ist, als denjenigen in den anderen Temperaturen, so fallen alle Unregelmässigkeiten des Ganges weg; es ist:

Zwischen t_1 und t_2.	Mittlere spec. Wärme.
12,34 und 14,59	0,015 461
12,34 und 18,36	15 556
14,59 und 18,36	15 613
18,36 und 27,67	15 461
27,67 und 40,58	15 291

das Maximum muss hiernach zwischen 15 und 20° liegen.

3. Ueber 27° hinaus fällt die specifische Wärme und erreicht in der Gegend von 40° ein Minimum.

4. Ueber 40° hinaus tritt wieder ein Steigen ein bis zu 100°.

Es werden also die Folgerungen, die oben über den Gang der specifischen Wärme gemacht wurden, durch diese Zahlen vollkommen bestätigt; nur über die Vertheilung der grossen mittleren specifischen Wärme zwischen 0 und 7,31° geben dieselben keine Auskunft; wenn, wie es oben als wahrscheinlich dargelegt wurde, die mittlere specifische Wärme zwischen 5 und 7,31° kleiner ist, als die zwischen 7,31 und 10,87°, so würde daraus folgen, dass diejenige zwischen 0 und 5° noch grösser ist, als die zwischen 0 und 7,31°.

Die Folgerung, dass die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 7,31 und 12° kleiner sei, als zwischen zwei beliebigen Temperaturen aus dem Intervall von 12—27°, erhält eine weitere Bestätigung durch folgenden Umstand.

Die Versuche v. Than's[1]) geben als specifische Wärme des Silbers 0,000 871 5 g Quecksilber; seine Vergleichung mit der von Regnault nach der Mischungsmethode gefundenen specifischen Wärme des Silbers, $c = 0{,}05701\ q$, wo q die mittlere specifische Wärme des Wassers zwischen 8,5 und 13° bezeichnet, ergibt:

$$q = c\,(8{,}5 \text{ bis } 13^0) = 0{,}015\,287 \text{ g Quecksilber},$$

eine Zahl, die noch kleiner ist als die aus meinen Versuchen sich ergebenden:

$$c\,(7{,}31 \text{ bis } 10{,}87) = 0{,}015\,365$$
$$c\,(7{,}31 \text{ bis } 12{,}34) = 0{,}015\,393,$$

wogegen die Zahl, die ich erhalte, wenn ich von meiner zweiten Gruppe nur die vier ersten Beobachtungen anwende,

$$c\,(7{,}31 \text{ bis } 10{,}16) = 0{,}015\,267,$$

kleiner ist als die von v. Than angegebene.

Jedoch nicht nur der Gang, sondern auch die Zahlenwerthe selbst, die durch die Mischungsmethode und die Versuche mit dem Eiscalorimeter erhalten wurden, zeigen die beste Uebereinstimmung.

Oben war eine Formel angegeben:

$$c_{T,t} = 1 + \tfrac{\alpha}{2}(T + t) + \tfrac{\beta}{3}(T^2 + Tt + t^2) + \tfrac{\gamma}{4}(T^2 + t^2)(T + t),$$

1) v. Than, Wied. Ann. **14.** p. 399. 1881.

wo: $\frac{\alpha}{2} = -0{,}000\,731\,275\,6$, $\frac{\beta}{3} = +0{,}000\,007\,932\,7$,

$$\frac{\gamma}{4} = -0{,}000\,000\,026\,79,$$

abgeleitet aus Beobachtungen nach der Mischungsmethode. Da diese nun von vier verschiedenen Beobachtern herrühren, so ist anzunehmen, dass die Fehler der einzelnen sich in ihr compensirt haben, dass also die Formel die specifische Wärme des Wassers mit der möglichsten Annäherung darstellt — natürlich mit Ausnahme der Temperaturen unter 18° etwa, wie dies oben dargelegt wurde. Voraussetzung war ferner, dass die Ergebnisse der Regnault'schen Versuche durch die von mir berechneten Zahlen ausgedrückt würden.

Ich wende jetzt diese Formel, als den Ausdruck der Resultate nach der Mischungsmethode an zur Vergleichung dieser mit den Versuchen nach dem Eiscalorimeter; die Einheiten der Formel sollen kurz mit *F. E.* bezeichnet werden.

Die Formel liefert:

$$W_0^{99,68} = 97{,}6259\ F.E., \qquad W_0^{27,67} = 27{,}2624\ F.E.,$$

woraus:

$$c\,(27{,}67 \text{ bis } 99{,}68) = 0{,}977\,134\ F.E., \text{ also}$$
$$0{,}977\,134\ F.E. = 0{,}015\,430 \text{ g Quecksilber},$$
$$1\ F.E. = 0{,}015\,791 \text{ „ „ .}$$

Durch Benutzung dieser Zahl als Reductionszahl erhält man folgende Vergleichung:

Nach der Formel:		Nach dem Eiscalorimeter:	
c (0 bis 100)	= 0,01547 g Qu.	*c* (0 bis 99,68)	= 0,01547 g Qu.
c (0 bis 70)	= 1545	*c* (0 bis 70,95)	= 1546
c (0 bis 40)	= 1550	*c* (0 bis 40,58)	= 1549
c (0 bis 27,67)	= 1556	*c* (0 bis 27,67)	= 1558
c (0 bis 23)	= 1559	*c* (0 bis 23,04)	= 1560
c (0 bis 18)	= 1562	*c* (0 bis 18,36)	= 1564
c (0 bis 15)	= 1564	*c* (0 bis 14,59)	= 1564
c (0 bis 12)	= 1567	*c* (0 bis 12,34)	= 1568
c (0 bis 10)	= 1569	*c* (0 bis 10,87)	= 1570

Es findet sich also von 10 bis zu 100° nirgend eine Abweichung, die 0,2 Proc. erreichte.

Somit ergibt sich das befriedigende Resultat, dass meine Beobachtungen nach dem Eiscalorimeter mit der grössten Annäherung ausgedrückt werden durch die Formel, welche nur aus Beobachtungen nach der Mischungsmethode abgeleitet wurde.

Andererseits, da die Formel von 10—100° meine Beobachtungen nach dem Eiscalorimeter darstellt, von 100—180° aber die richtig berechneten Regnault'schen Beobachtungen (natürlich innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler), so zeigt sich darin die volle Uebereinstimmung meiner Beobachtungen mit denen von Regnault.

III. *Ueber galvanische Polarisation*[1]*;* *von E. Pirani.*

(Hierzu Taf. I Fig. 5.)

Zweck dieser Arbeit ist die Untersuchung, ob die chemische Natur der Electroden einen Einfluss auf die Vorgänge der Polarisation habe.

Diese Frage ist schon vielfach berührt worden:

Schon Buff[2]) äussert die Ansicht, dass eine mit Wasserstoff gesättigte Platinplatte wie eine blosse Wasserstoffschicht wirke, sodass schliesslich jedes Metall, wenn genügend durch Wasserstoff geschützt, gleich wirken müsste. Aehnliche Ansichten vertreten Crova[3]), Ayrton und Perry[4]) und neuerdings Hallock[5]); doch gibt keiner von ihnen dafür einen Beweis.

Exner[6]) gibt Versuche an, nach welchen die Polarisationen $Cu_H \mid Cu_O$ und $Pt_H \mid Cu_O$ gleich gross sind. Trotzdem es nur Nebenversuche sind, zeigen sie doch eine vollkommene

1) Auszug aus der gleichnamigen Abhandlung. Berlin 1883 bei Reinhold Kühn.

2) Buff, Lieb. Ann. **41.** 1842.

3) Crova, Ann. de chim. et de phys. (3). **68.** p. 462. 1863.

4) Ayrton und Perry, Phil. Mag. (5) **11.** p. 53. 1881.

5) Hallock, Wied. Ann. **16.** p. 79. 1882.

6) Exner, Wien. Ber. **78.** p. 33. 1878.

Uebereinstimmung. — Bei Wiederholung derselben wurde das Cu selbst in fast reinem Wasser sichtbar angegriffen; als ich aber aus diesem Grunde $Pt_H \mid Pt_O$ mit $Cu_H \mid Pt_O$ verglich, konnte ich nicht zu so übereinstimmenden Resultaten gelangen.

Bartoli[1]) findet wenigstens für unangreifbare Electroden die Polarisationsconstanten in seiner Formel gleich, so bei Platin, Gold, Kohle, Palladium etc.

Hallock dagegen[2]) schliesst aus Versuchen mit Platin und Kohle, dass die Kraft der Polarisation keineswegs von der Natur der Electroden unabhängig ist.

Bei solchen Differenzen in den vorhandenen Angaben, und bei der grossen Wichtigkeit der Frage für die Theorie der galvanischen Elemente schien es recht wünschenswerth, in besonders dazu angestellten Versuchen die Lösung zu erstreben.

Die Arbeit wurde auf Anregung des Hrn. Prof. v. Helmholtz unternommen, dem ich grossen Dank weiss für die werthvollen Rathschläge, die er mir bereitwilligst gab, sowie für die reichen Mittel, die er mir zur Verfügung stellte.

Die Versuche wurden angefangen am Ende Januar 1882. Es lagen zu jener Zeit die Hallock'schen Versuche nicht vor; die Arbeiten von Fromme und Bartoli wurden mir erst später bekannt. Veranlassung waren die Arbeiten Exner's und die darauf bezüglichen von v. Beetz.

Vorversuche.

I. Eine Reihe von Versuchen wurde angestellt, um darüber Aufschluss zu gewinnen, ob thermoelectrische Wirkungen des polarisirenden Stromes die Polarisationswerthe beeinflussen.

Die Zersetzungszelle bestand bei diesen Versuchen aus zwei durch einen weiten Heber verbundenen Bechern. Die Flüssigkeit war verdünnte Schwefelsäure; beide Electroden waren aus Platin.

1) Bartoli, Nuov. Cim. (3) **7**. p. 234. 1880.

2) Hallock, Wied. Ann. **16**. p. 81. 1882.

Es wurde nun abwechselnd die Flüssigkeit um die Anode erwärmt, die um die Kathode abgekühlt und umgekehrt, sodass die Temperatur beider Electroden stets um ca. 90° verschieden war.

Es mussten dadurch etwaige thermoelectrische Ströme, die an den Electroden entstehen könnten, in dem einen Falle geschwächt, in dem anderen begünstigt werden.

Die in der so eingerichteten Zersetzungszelle hervorgerufene Polarisation wurde unmittelbar nach Loslösung vom primären Strome oder nach einer bestimmten Anzahl von Secunden durch Compensation gemessen. Für nähere Beschreibung der Apparate, der Methode und der angewandten Vorsichtsmaassregeln muss ich auf die Originalabhandlung verweisen.

Zum Vergleich wurde auch eine Reihe von Versuchen angestellt, bei denen beide Electroden in Flüssigkeit von derselben Temperatur tauchten.

Aus ihnen allen ergibt sich, dass die Werthe der Polarisation unmittelbar nach Unterbrechung des primären Stromes wesentlich gleich sind, ob Anode oder Kathode erwärmt wurde; dass Erwärmung der Anode den Abnahmeverlauf nur in den ersten Secunden verändert, Erwärmung der Kathode dagegen schnelle Abnahme hervorbringt.

Aus alledem scheint aber eine Mitwirkung thermoelectrischer Erscheinungen ausgeschlossen, denn eine solche müsste viel grössere Verschiedenheiten in den Anfangswerthen der Polarisation hervorbringen.

Wenn solche Wirkungen vorhanden sind, so sind sie jedenfalls so unbedeutend, dass sie bei Beobachtungen über Polarisationsgrössen nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

II. Nach solchen Vorversuchen schien es nur noch geboten zu sein, im Voltameter die Erzeugung derselben chemischen Processe bei Anwendung von verschiedenen Metallen als Electroden zu erstreben, um die Frage nach dem Einflusse der chemischen Natur der Electroden endgültig zu lösen. Der erste Gedanke war der, bei Anwendung eines möglichst positiven Metalles als feste Electrode die andere aus den verschiedensten Metallen zu wählen, diese aber

durch daran entwickelten Wasserstoff vor Oxydation zu schützen.

Die Versuche ergaben nicht den gewünschten Aufschluss; sie sind in der Originalabhandlung ausführlicher beschrieben, dort sind auch die Resultate tabellarisch zusammengestellt.

Eigentliche Versuche.

I. Versuche mit Platin als feste Electrode.

Die aus den Vorversuchen sich ergebende Abhängigkeit der beobachteten Werthe von der Dauer des polarisirenden Stromes, sowie die Unregelmässigkeiten in der Abnahme der Polarisation deuteten auf die Nothwendigkeit, eine Methode anzuwenden, die es gestattete, die Polarisationswerthe bei geschlossenem Strome, also bei vollständigem Gleichgewichtszustand zu ermitteln.

Hauptbedingung für eine solche Methode war möglichst gleiche Behandlung aller angewendeten Metalle und möglichst geringe Störung des Polarisationsprocesses im Voltameter. Dadurch war die Anwendung einer dritten Hülfselectrode von vornherein ausgeschlossen, und damit folgte die Nothwendigkeit, als Anode Platin anzuwenden.

Für ausführliche Beschreibung der Versuche muss ich wiederum auf die Originalabhandlung verweisen, wo sich auch die Beobachtungstabellen für die einzelnen Metalle befinden.

Die Methode war folgende: Im Troge T, Fig. 5, befinden sich die Electroden. Sie werden durch eine Batterie P polarisirt, und zwar bei constanter Intensität des primären Stromes. Durch Verschieben des Contactes auf der Brücke B findet man die Drahtlänge a, welche zur Compensation der vorhandenen Potentialdifferenz durch C nöthig ist.

Diese Messung wurde bei halb so grossem Widerstand im Troge, aber bei derselben primären Intensität wiederholt (a'). Dazwischen wurde immer der Werth (c) eines Normalelements N bestimmt, dann ist:

$$E = \frac{1}{c}\,(2a' - a)\;C$$

die Polarisation im Troge, wenn C die electromotorische Kraft des Normalelementes ist.

Vorausgesetzt ist dabei: Unabhängigkeit der Polarisationswerthe von der Entfernung der Electroden innerhalb der innegehaltenen Grenzen; Proportionalität des Trogwiderstandes mit der Länge der Flüssigkeitssäule.

Erstere Annahme wurde durch Versuche als berechtigt gefunden, letztere war bei Form des Troges und der Electroden ebenso berechtigt.

Von den im Schema angegebenen Apparaten dient W zur Ersetzung des wegfallenden Trogwiderstandes durch metallischen; H zur Erhaltung einer constanten Intensität bei Anwendung der verschiedenen Metalle; W_2 zur abwechselnden Einschaltung des Galvanometers G in den primären Strom oder in den Compensationszweig; W_1 zur Ersetzung des Galvanometerwiderstandes durch den Widerstand K; S, um einerseits den Compensationsstrom zu schliessen, andererseits, um das Relais R in Bewegung zu setzen, welches zu Versuchen über Polarisationsabnahme diente.

Als Flüssigkeit im Troge wurde schwach angesäuertes destillirtes Wasser genommen und als Normalelement diente ein Calomelelement nach Helmholtz.

Die aufgezeichneten Beobachtungen ermöglichten es, das Resultat jeder Reihe in zweierlei Weise zu controlliren, und zeigten, wie ich in der Originalabhandlung ausgeführt habe, vorzügliche Uebereinstimmung.

Es wurden nun Versuche angestellt:

1. Ueber die Abhängigkeit der Grösse der Polarisation von der Dauer des polarisirenden Stromes (immer bei geschlossenem Stromkreis).

Alle Metalle bis auf Platin zeigen nur in den ersten Minuten eine schwache Zunahme. Platin dagegen erreicht nur langsam eine gewisse Constanz.

2. Ueber die Grösse der Polarisation der verschiedenen Combinationen Metall_H / Platin_O. Dieselben ergeben sehr übereinstimmende Mittelwerthe, sowohl aus allen Beobach-

tungen, wie aus extremen Werthen, welche in der Tabelle zusammengestellt sind.

Mittelwerthe der Polarisation.

Calomel = 1.

Electroden	Intensität 0,094 geschlossen	Intensität 0,553 geschlossen	eben geöffn.	nach 1 Sec.	nach 5 Sec.	
Pt Pt	2,29	2,36	1,69	1,42	1,27	
Fe		2,29	1,94	1,82	1,78	
Cu	2,34	2,40	1,80	1,46	1,32	
		2,22	1,93	1,67	1,40	getrennt; Intens. 0,06
		2,20	1,71	1,34	1,25	erwärmt 60° 70°
Ag	2,41	2,43	1,77	1,41	1,29	
		2,27	1,62	1,25	1,08	70°
Al	2,60	2,66	1,90	1,63	1,53	
Sn	2,51	2,63	1,95	—	—	
Pb		2,70	2,20	1,84	1,77	
Zn	2,73	2,80	2,35	2,26	2,22	
		2,67	2,25	2,17	2,13	70°
		2,46	2,33	2,27	2,22	getrennt
Zn am.	—	2,83	2,49	2,40	2,33	
		2,53	—	—	—	getrennt
Cd	2,78	2,87	2,06	1,98	1,93	
		2,55	—	—	—	getrennt

Die Reihenfolge der Metalle bei diesen Versuchen, sowie Beobachtungen mit Na_2SO_4 im Troge führen zur Vermuthung, dass der Grad der chemischen Angreifbarkeit der Metalle in der betreffenden Flüssigkeit von grossem Einfluss auf die Grösse der Polarisation ist.

3. Ueber Abnahme der Polarisation nach Unterbrechung des primären Stromes (siehe Tabelle).

Es ergaben die Abnahmecurven der einzelnen Metalle (siehe Originalabhandlung) deutliche Unterschiede. Die Abnahme ist bei Ag, Pt, Cu am grössten, bei Fe, Cd, Zn am geringsten.

4. Erwärmung der Flüssigkeit brachte eine Verringerung der Werthe, aber keine Aenderung in den Verhältnissen hervor.

II. Versuche bei Trennung der Electroden.

Alle die angeführten Versuche zeigen eine wesentliche Verschiedenheit in den Polarisationsverhältnissen bei Anwendung verschiedenartiger Electroden.

Es ist jedoch vielfach betont worden, dass zwei Umstände von besonderem Einfluss auf die beobachteten Polarisationswerthe und electromotorischen Kräfte seien: die in der Flüssigkeit aufgelösten Gase und die Producte des chemischen Processes in der Zelle.

Einer Veränderung der Lösung in Bezug auf ihre chemische Beschaffenheit war nun zwar durch die Methode möglichst vorgebeugt; und in der That ergaben wiederholte Versuche zur Nachweisung irgend welcher Spuren von Metallen stets negative Resultate; nichts aber war geschehen zur Entfernung der Gase.

Einige Versuche mit eben ausgepumpter Flüssigkeit und mit gegen atmosphärische Luft durch Benzol geschützter ergaben gar keine Aenderung in den Resultaten. In der That kann bei der reichlichen Gasentwickelung an den Electroden kaum noch ein Einfluss — wenigstens kein dauernder — von aufgelöstem Sauerstoff bestehen.

Wohl aber könnte man befürchten, dass gerade die Lebhaftigkeit der Entwickelung ein Diffundiren der Gase zu den entgegengesetzten Electroden begünstigte und die Resultate beeinflusste. Um dieses zu vermeiden, wurde der Trog durch mehrere Gefässe ersetzt, welche durch Heber miteinander verbunden waren.

Die Methode war im wesentlichen dieselbe. Die Intensität war wegen des grossen Flüssigkeitswiderstandes viel geringer, daher die Polarisationsgrösse auch absolut kleiner; aber trotz aller Vorsicht zeigte sich zwischen Cd und Cu eine Differenz von 0,32—0,35 des Calomelelementes.

III. Versuche mit Palladium.

Um sich auf eine andere, bessere Weise dem Einfluss des electrolytischen Sauerstoffes zu entziehen, wurde eine Reihe von Versuchen angestellt, bei denen man eine stets frisch mit Wasserstoff gesättigte Palladiumelectrode als Anode

anwandte, sodass der nascirende Sauerstoff gleich an Wasserstoff gebunden wurde.

Dieselben sind in der Originalabhandlung ausführlich beschrieben. Auch sie ergaben bedeutende Unterschiede in dem Verhalten der einzelnen Metalle, und zwar ist die Reihenfolge bei den angewandten dieselbe wie gegen Platin. Einige Versuche mit Palladium als Kathode gegen eine Platinanode ergaben gleiche Werthe mit $Pt_H \mid Pt_O$. Uebrigens weisen auch andere Versuche darauf hin, dass Platin und Palladium, wenn mit Wasserstoff beladen, sich gleich verhalten. Nicht so jedoch die Abnahme der Polarisation, die bei Platin viel grösser und schneller ist.

IV. Versuche bei Trennung der Electroden durch siedende Flüssigkeit.

Eine Zwischenzelle mit siedender Flüssigkeit ist das sicherste Mittel, jedes Hinüberwandern der Gase zu verhindern. Auch dieses wurde versucht.

Wegen der stetigen Aenderung des inneren Widerstandes in den Hebern ergibt die Methode keine berechenbaren Resultate, sie lässt aber auch auf ein verschiedenes Verhalten der Metalle schliessen.

V. Versuche mit ausgepumpten Zellen.

Um eine endgültige Entscheidung der Frage zu ermöglichen, wurden endlich noch Versuche angestellt mit Zellen, die vollkommen geschlossen waren und stetig ausgepumpt wurden.

Zunächst wurden die Combinationen $Cu_H \mid Pt_O$ und $Zn_H \mid Pt_O$ verglichen, indem jede einzeln unter möglichst gleichen Verhältnissen untersucht wurde. Da die noch abweichenden Resultate jedoch immerhin als Folge ungleichen Widerstandes in den Zellen angesehen werden konnten, so wurde schliesslich eine andere Methode gewählt, die es gestattete, beide Combinationen zu gleicher Zeit und in derselben Zelle zu vergleichen.

Dazu wurde der Strom einer Batterie getheilt, die zwei Zweige führten zu zwei verschiedenartigen Kathoden (z. B. Cu, Pt), denen als einzige Anode Platin gegenüberstand.

Alle Electroden waren drahtförmig, und zwar alle durch dasselbe Loch des Zieheisens gezogen.

Zahlreiche Versuche ergaben mit überzeugender Gewissheit, dass bei vollständig gleichen Widerständen bis zur Zelle und möglichst gleichen in der Zelle immer noch eine Einschaltung von Widerständen in einem der Zweige nöthig war, um die Null-Stellung am Differentialgalvanometer, d. h. Gleichheit der Intensität in beiden Zweigen zu erhalten.

So wurde z. B. eine Platinanode zwischen zwei Cu-Kathoden so angebracht, dass vollständiges Gleichgewicht in beiden Zweigen vorhanden war, dann wurde ein Cu durch Ag ersetzt. Erst nach Einschaltung von zehn Einheiten konnte wieder Gleichgewicht erhalten werden.

Schluss.

Alle die zahlreichen und verschiedenartigen Versuche drängen zu demselben Schluss und ergeben als Resultat:

Die Polarisation ist unter gewöhnlichen Umständen von der Natur der Electroden abhängig.

Diese Abhängigkeit zeigt sich sowohl in den Werthen bei geschlossenem Strome, wie in dem Verlaufe der Abnahme nach Oeffnen des Stromes.

Sie besteht auch bei Erwärmung der Flüssigkeit, ist also nicht auf Bildung von Wasserstoffsuperoxyd oder Ozon zurückzuführen.

Ein Wasserstoffvorrath an der Anode, der den sich entwickelnden Sauerstoff bindet, hebt jene Abhängigkeit nicht auf.

Trennung der Electroden, also Hinderung des Hinüberdiffundirens der electrolytischen Gase, hebt die Abhängigkeit nicht auf.

Ebensowenig Trennung der Electroden durch eine Zwischenzelle, in der sich siedende Flüssigkeit befindet.

Abschluss gegen atmosphärische Luft durch Benzol bringt keine Aenderung hervor.

Messungen unter völligem Luftabschluss und stetem Auspumpen der electrolytischen Gase ergeben immer noch eine Abhängigkeit von der Natur der Electroden.

Alle diese Vorsichtsmaassregeln vermochten also nicht, ein Uebereinstimmen in dem Verhalten der verschiedenen Metalle hervorzubringen. Weitere einflussreichere Vorsichtsmaassregeln scheinen mir unmöglich, sodass die Frage dahin beantwortet werden muss, dass ein Einfluss der chemischen Natur der Electroden auf die Werthe der Polarisation — bei noch so grosser Uebereinstimmung des chemischen Processes — wohl und deutlich hervortritt.

Vergleichung der gewonnenen Resultate mit denen früherer Arbeiten.

Von den vielen Zahlenergebnissen der mitgetheilten Versuche lassen sich manche mit denen früherer Arbeiten vergleichen; — auch wurden oft zu diesem Zwecke Versuche angestellt, über welche im Folgenden berichtet werden soll.

I. Zur Frage der Polarisation des Platins in Wasser.

1. Messungen bei geschlossenem Strome. — Was zunächst den Werth der Polarisation bei Anwendung von Platinelectroden in ungesäuertem Wasser anbetrifft, so geben frühere Arbeiten dafür die verschiedenartigsten Werthe an.

Wheatstone[1]) bestimmte sie zuerst nach der nach ihm benannten Methode. Er fand sie 2,33 — wenn sein Element als Einheit gilt. Nun existiren aber sehr verschiedene Angaben über die electromotorische Kraft der Wheatstone'schen Elemente mit Zn-Amalgam; nach Regnault's Messung ist sie bei Anwendung poröser Thonzellen fast ein Daniell — etwa 0,993 D. Das würde ergeben 2,31 D.

Daniell[2]) bestimmte den Werth der Polarisation auf 2,49 bis 2,58 seiner Elemente — in seinen weiteren Rechnungen nimmt er 2,58 an.

Buff[3]) erhielt nach gesonderter Bestimmung aller übrigen Constanten — bei Anwendung von Bunsen'schen Elementen (auf Daniell reducirt) 2,56 D. Spätere Versuche nach der

1) Wheatstone, Phil. Trans. 1843. p. 315.

2) Daniell, Phil. Trans. 1842. p. 145; Pogg. Ann. **60.** p. 387. 1843.

3) Buff, Pogg. Ann. **73.** p. 500. 1848.

Wheatstone'schen[1]) Methode, unter Anwendung sehr dünner Platindrahtelectroden (0,0001 m Durchmesser), ergaben ihm den Werth 3,31 D.

Poggendorff[2]) fand nach der Ohm'schen Methode 2,32 D.[3])

Svanberg[4]) hat nach der Wheatstone'schen Methode die Polarisation an beiden Electroden einzeln bestimmt, aber auch die Gesammtpolarisation. Seine Zellen (Daniell) ergaben ihm nicht sehr constante Werthe; infolge davon schwankt das Resultat zwischen 2,14—2,44 Dan.

Die einzelnen Polarisationen fand er nicht ganz gleich, doch hat v. Beetz[5]) nach Berichtigung einiger Zahlen gezeigt, dass jene Versuche doch eine Gleichheit beider ergeben. Eine solche fand auch Poggendorff, als er vermittelst der Wippe je eine polarisirte Electrode einer unpolarisirten entgegenstellte.

Alle diese Versuche ergeben ziemlich hohe Werthe der Polarisation. Die bei meinen Versuchen sich ergebenden Werthe:

bei geringerer Intensität 2,21 D.,
bei grösserer Intensität 2,29 D.,

stimmen recht gut damit überein.

2. Messungen nach Oeffnung des primären Stromes. — Im 61. Bande der Pogg. Ann. beschrieb Poggendorff seine Wippe und ihre Anwendung zu Messungen von Polarisationswerthen. — Er selbst verwendete sie freilich mehr zu vergleichenden Versuchen und erkannte und betonte den Uebelstand, den sie bei directen Messungen darbot, dass sie die Werthe der Polarisation erst nach der Loslösung des Voltameters aus dem primären Strome mass, — also nicht

1) Buff, Pogg. Ann. **130.** p. 342. 1867.

2) Poggendorff, Pogg. Ann. **70.** p. 177. 1847.

3) Einige Messungen, die ich nach der Wheatstone'schen Methode ausführte, ergaben 2,11 Dan. im Mittel. Es waren kurze, dicke Platinelectroden, gänzlich von der Säure verdeckt. — Als primärer Strom diente der Strom von zwei Bunsen'schen Elementen.

4) Swanberg, Pogg. Ann. **73.** p. 301. 1848.

5) v. Beetz, Pogg. Ann. **78.** p. 41. 1849.

in einem stationären Zustande, sondern während sie in steter Abnahme begriffen sind.

Gleichzeitig erschienen auch die Messungen Raoult's und Gaugain's, beide nach Methoden, die ebenso wenig geeignet waren, die Gegenkraft zu messen, welche die Polarisation dem primären Strome darbietet.

Raoult[1]) erhielt nach seiner Methode — des circuits alternatifs — und durch Opposition — aus Beobachtungen gegen Cu in $CuSO_4$ den Werth 2,09 Dan., aus Beobachtungen gegen unpolarisirtes Platin $Pt_0 (= 115) + Pt_H (= 95) = 2{,}10$ D. Diese an sich schon etwas kleinen Werthe werden noch geringer, wenn man bedenkt, dass sein Normalelement — Daniell mit Zn in $ZnSO_4$ — nach Regnault's Messungen, sowie aus den neuen Angaben von Niaudet einen geringeren Werth von etwa 0,96 D. haben musste.

Gaugain[2]) mass einfach, nach Loslösung des Voltameters, nach der Oppositionsmethode und erhielt, sowohl aus einzelnen Messungen wie aus der Gesammtmessung den Werth 350 in seinen thermoelectrischen Einheiten ausgedrückt. Legt man den Regnault'schen Werth für ein solches Element zu Grunde — 0,00558 D. —, so ergibt sich die Zahl 1,95 D.

Beetz[3]) zeigte damals die Unzuverlässigkeit der Oppositionsmethode zu derartigen Messungen und machte auf die Mängel aller Messungen mit Wippen aufmerksam.

Trotz alledem wurden seit jener Zeit alle Messungen über Polarisationsgrössen mit Benutzung solcher Vorrichtungen ausgeführt, und alles Streben war mehr dahin gerichtet, jene Unterbrechung möglichst schnell auszuführen.

So entstand der Beetz'sche[4]) electromagnetische Schlüssel, später der Edelmann'sche.[5]) Neuerdings benutzte

1) Raoult, Ann. de chim. et de phys. (4) **2.** p. 365. 1864.
2) Gaugain, Compt. rend. **41.** p. 1166. 1855; **65.** p. 462. 1867.
3) Beetz, Pogg. Ann. **132.** p. 463. 1867.
4) Beetz, Pogg. Ann. **79.** p. 108. 1850.
5) Edelmann, Carl's Rep. **8.** p. 317. 1872.

Bartoli[1]) eine von Felici[2]) angegebene Construction, die mit dem Myographion von Helmholtz viel Aehnlichkeit hat. Naccari[3]) hat einen sinnreichen Quecksilberunterbrecher construirt. Crova[4]) und Bernstein[5]) haben rotirende Unterbrecher angewendet.

Aber trotz aller dieser Vervollkommnungen sind die so gemessenen Werthe eben nie die, welche als Gegenkraft im primären Strome wirken. Sie ergeben vielmehr den Werth der abnehmenden Polarisation in dem betreffenden Augenblicke, also einen Punkt der Abnahmecurve.

An diesem Mangel leiden sämmtliche Exner'schen Versuche; es leiden daran die Beetz'schen[6]) über die Polarisation des Aluminiums, die ersten Fromme'schen[7]), sowie die früheren von Tait[8]), von Fleming[9]), von Pearnell[10]), von Crova[11]), von Beetz[12]) etc.

Dieser Mangel tritt auch deutlich aus den Resultaten hervor.

In seiner Arbeit über galvanische Polarisation des Platins in Wasser findet Exner[13]) bei Anwendung grösserer Electroden in evacuirtem, destillirtem Wasser 1,71. Meine Messungen, nach Loslösung vom Voltameter, ergeben mit nicht evacuirtem, destillirtem Wasser von 15° 1,71 Dan.

Beim Sieden des Wassers ergeben meine Versuche 1,42; Exner erhält 1,43.

Die sich aus Reihe IX ergebende Zahl 1,51 D. ist

---

1) Bartoli, Nuovo Cim. (3) **7.** p. 234. 1880.
2) Felici, Nuovo Cim. (2) **12.** p. 115. 1874.
3) Naccari, Nuovo Cim. (2) **11.** p. 249. 1874.
4) Crova, Journ. de chim. et de phys. (3) **68.** p. 440. 1863.
5) Bernstein, Pogg. Ann. **142.** p. 54. 1871.
6) Beetz, Pogg. Ann. **156.** p. 456. 1875.
7) Fromme, Ber. d. oberhess. Ges. für Naturw. **20.** p. 23. 1880.
8) Tait, Phil. Mag. (4) **38.** p. 243. 1869.
9) Fleming, Phil. Mag. (5) **1.** p. 142. 1876.
10) Pearnell, Phil. Mag. **39.** p. 52. 1870.
11) Crova, Ann. de chim. et de phys. (3) **68.** p. 413. 1863; Pogg. Ann. **153.** p. 272. 1874.
12) Beetz, Pogg. Ann. **79.** p. 98. 1850.
13) Exner, Wien. Ber. **77.** 1878. Wied. Ann. **5.** p. 388 ff.

gegen meine Versuche zu klein. Diese ergeben bei verschiedenen Concentrationen und Temperaturen Werthe von 1,64 bis 1,75 D. Spätere mit blos angesäuertem, destillirtem Wasser im Mittel 1,64 D. Doch ist bei meinen Versuchen die Intensität nicht gering, während nach Exner's Angaben, bei seinen Versuchen die Intensität, bei Anwendung Noë'scher Elemente kaum wuchs.

Bei Reihe X dagegen findet er bei Anwendung von drei Smee 1,60, mit vier Smee 1,74 bis bei sieben Smee 1,91. Da bei meinen Versuchen drei bis vier Daniell wirkten, so ist auch hierbei volle Uebereinstimmung der Exner'schen Zahlen mit meinen, bei geöffnetem Strome beobachteten, vorhanden.

Wenn Exner bei Anwendung Wollaston'scher Spitzen Werthe bis 2,06 D. erhält, so liegt dies eben an der Kleinheit der Oberfläche. Als ich mit dünnen Drähten Versuche anstellte, erhielt ich auch höhere Werthe:

Kathode Anode	0,001 m 0,0004 m	1.79 Cal. 1,73 D.
Kathode Anode	0,0004 m	1,82 Cal. 1,76 D.

Und zwar ergaben sich jene Werthe unabhängig von der Anzahl der primären Daniell. Es wurden von zwei bis fünf Daniell angewendet, sodass die Intensität von 0,009 auf 0,54 (abs.) stieg. Diese Unabhängigkeit der Werthe der Polarisation nach dem Oeffnen des primären Stromes von der Intensität desselben ergibt sich ja auch aus meinen früheren Versuchen, nur muss der Strom lange genug geschlossen gewesen sein — ob dies bei den Exner'schen Versuchen der Fall war, vermag man nicht zu ersehen.

Jene oben angeführten Werthe erhielt ich übrigens in gleicher Weise bei Anwendung einer lufthaltigen und einer ausgepumpten Zelle. Auch dieses Resultat steht mit meinen früheren in voller Uebereinstimmung. Für geringe Intensitäten hat auch Fleming[1]) Aehnliches gefunden.

1) Fleming, Phil. Mag. (5) **1.** p. 143. 1876.

Bei dem durchgreifenden Unterschiede, den Exner zwischen ausgepumpten Zellen und lufthaltigen findet, ist es eigenthümlich, dass seine Reihe XII (evacuirte Flüssigkeit, Wollaston'sche Spitzen) so genau mit den früheren Ergebnissen von Beetz und Robinson übereinstimmt, die doch grössere Electroden anwendeten und nichts davon angeben, dass sie evacuirte Flüssigkeit genommen hätten.

Es gibt an:

bei	Exner	Beetz	Robinson
16°	—	—	2,055
20	—	2,055	—
25	2,03	—	—
30	—	2,033	—
43	—	1,991	—
53	2,00	1,951	—
57,5	—	—	1,947
60	1,94	1,942	—
68	1,86	—	—
75	1,83	—	—
81	1,80	1,891	—
94	—	—	1,817
100	—	1,765	—

Im übrigen zeigt, denke ich, der Vergleich, dass die Exner'schen Zahlen nicht die Werthe der Polarisation selbst, sondern die der in Abnahme begriffenen angeben und schon deshalb nicht als Maximalwerthe angesehen werden können.

Es ist daher kein Wunder, wenn Exner[1]) „nie höhere Werthe als 2,03" beobachten konnte; jene „älteren Versuche, die Polarisationen bis 2,5 D. und mehr ergaben" waren eben, wie die meinigen, bei geschlossenem Strome angestellt.

Auch bei den Versuchen von Tait[2]), die nach einer wesentlich anderen Methode ausgeführt sind, zeigt sich trotzdem die Wirkung der Wippe. So ergibt sich aus ihnen die Polarisation:

$Pt_O\,Pd_H$	1,50 D.	1,82 D.
	bei 1 Grove	2 Grove.

1) Exner, Wien. Ber. 78. p. 16. 1878.
2) Tait, Phil. Mag. (4.) 38. p. 246. 1869.

Vergleicht man damit meine mit $3 + (2/n)$ Daniell angestellten Versuche, welche

geschlossen 2,32 Cal. eben geöffnet 1,71 Cal.

ergaben, so zeigt sich auch hier Uebereinstimmung des Tait'schen Werthes mit dem bei geöffnetem Strome erhaltenen.

3. Messungen nach der Fuchs'schen Methode. Der Nachtheil der Wippe fiel in der That nach den Exner'schen Versuchen den Physikern auf.

Fromme bekam damit keine befriedigenden Resultate, und er sowohl wie Beetz wählten eine andere Methode.

Doch jene — die von Fuchs[1]) angegebene — ist ebensowenig geeignet, zuverlässige Resultate zu geben. Die Voraussetzung, „dass ein Zweig des im Voltameter circulirenden Stromes die electromotorische Messung wohl nicht stören könne", ist eben nicht gerechtfertigt.

Beetz nahm es an; er konnte es auch bei den schwachen Intensitäten bei seinem auf p. 357 erwähnten Versuche.[2]) Aber gewiss nicht ohne Einfluss ist jener Zweigstrom bei den übrigen.

Fromme prüfte die Methode, aber nicht in hinreichender Weise.

Auch der Beweis, den Streintz im Decemberheft 1882 dieser Annalen gibt[3]), beruht wohl auf einem Missverständniss. Gerade Streintz's Versuche haben durch die unglaublich wachsenden Werthe der Wasserpolarisation den besten Beweis für die allzugeringe Zuverlässigkeit der Methode gegeben.

Uebrigens hat auch schon Guglielmo[4]) auf jene Fehlerquelle aufmerksam gemacht.

4. Versuche von Hallock. — Zweckentsprechender und theoretisch einwurfsfrei ist die von Hallock[5]) angewandte Methode.

1) Fuchs, Pogg. Ann. **156**. p. 156. 1875.
2) Beetz, Wied. Ann. **5**. p. 357 ff. 1878.
3) Streintz, Wied. Ann. **7**. p. 855. 1882.
4) Guglielmo, Riv. Sc. Ind. **13**. p. 282 ff. 1881.
5) Hallock, Wied. Ann. **16**. p. 56. 1882.

Sie entspricht der Méthode des dérivations, welche Raoult[1]) angegeben hat.

Doch zwang die Complicirtheit der Formel zur Vernachlässigung eines Gliedes:

$$(i - J)w;$$

auch enthält die so vereinfachte Formel ausser den gegebenen Widerständen W und γ noch zwei Intensitäten und einen Flüssigkeitswiderstand, die offenbar bei jedem einzelnen Versuch bestimmt werden mussten; also drei zu berechnende Zahlen.

Angaben über die Art der Messung von w liegen nicht vor. Wohl aber ersieht man aus den Tabellen, dass die Electroden sehr verschieden gestaltet waren. — Sichere Messungen des Flüssigkeitswiderstandes waren also nur mit Wechselströmen möglich — alles Umstände, die gewiss nicht geeignet sind die Resultate sehr sicher zu machen.

Jedenfalls sind auch die sich ergebenden Werthe, soweit sie mit anderen vorhandenen Messungen verglichen werden können, sehr abweichend.

Beetz[2]) hat für die Polarisation des Platins in HCl aus directen Messungen 1,375 D. erhalten.

Macaluso[3]) hat die Polarisationen Pt_{Cl} und Pt_{H} gegen unpolarisirtes Pt in HCl bestimmt und findet 1,08, resp. 0,94 D. Also einen Werth 2,02, der dem der Polarisation in H_2SO_4 nahe kommt.

Beide, sowie die Angabe Poggendorff's[4]) (2,12 bis 2,32 D.), sind jedenfalls grösser, als der von Hallock bei geschlossenem Strome gefundene — 1,33 D.

Der Werth 1,95 aber für die Polarisation in H_2SO_4 ist offenbar zu klein. Selbst Gaugain, der nach dem Oeffnen des Stromes mass, fand 1,97, und alle anderen Messungen bei geschlossenem Strome ergeben Werthe von im Mittel 2,3 D.

Meine Versuche ergaben mit Platten von 17 qcm eintauchender Oberfläche bei schwachen Intensitäten 2,21 D., bei

1) Raoult, l. c.

2) Beetz, Pogg. Ann. **90.** p. 42. 1853.

3) Macaluso, Nuov. Cim. (2) **11.** p. 156. 1874.

4) Poggendorff, Pogg. Ann. **70.** p. 177. 1847.

stärkeren 2,29 D. Bei Anwendung von Drähten von 0,0004 m Durchmesser, die nur 5 mm eintauchten, erhielt ich mit 3 D. nach der Wheatstone'schen Methode:

2,199 D.,

wiederum ohne Unterschied, ob die Flüssigkeit luftfrei oder lufthaltig.

Hallock bestimmte übrigens auch den Werth der Polarisation nach dem Oeffnen des Stromes, und zwar sobald der Ausschlag lesbar war, — bei Pt in H_2SO_4 nach fünf Secunden. Er erhält 1,67 D., ein Werth, der alle von mir gefundenen Werthe der Polarisation nach fünf Secunden bei weitem übersteigt.

Bei meinen Versuchen (Vorversuche I) ergaben Platten von 14 qcm eintauchender Oberfläche:

	eben geöffnet	nach fünf Sec.
Maximalwerthe	1,75 D.	1,51 D.
mittlerer Werth	1,68 „	1,37 „
Bei den später angestellten:		
Maximalwerthe	1,74 Cal.	1,31 Cal.
mittlerer Werth	1,69 „	1,27 „

letztere waren im Trog mit etwa 17 qcm eintauchender Oberfläche gewonnen.

Jener Hallock'sche Werth erreicht also sogar den mittleren Werth der Polarisation bei eben geöffnetem Strome.

Die Abnahme in den fünf Secunden würde nach Hallock noch nicht 10 Proc. betragen, während sie nach meinen Versuchen 19 Proc. beträgt. Dabei war der depolarisirende Strom bei Hallock während der fünf Secunden geschlossen (um dem Galvanometer Zeit zu geben, zur Ruhe zu kommen), also mussten sich noch kleinere Werthe der Polarisation ergeben. Leider kann man die noch vorhandenen Resultate über Abnahme der Polarisation damit nicht vergleichen, da sie entweder an einer einzelnen Electrode ausgeführt sind, wie bei Beetz und Streintz, oder bei sehr schwachen Strömen, wie bei Pearnell und Fleming, oder endlich mit momentan wirkenden, wie bei Bernstein.

Aus diesen Betrachtungen scheint mir mit grosser Sicherheit hervorzugehen, dass die Polarisation des Platins in angesäuertem Wasser einen Werth von 2,2 bis 2,3 Daniell hat, und dass jene früheren Versuche keineswegs allzugrosse Werthe ergaben. Zugleich aber, dass bei sichtbarer Gasentwickelung ein Evacuiren der Flüssigkeit und der Voltameterzelle gar keine Aenderung der Werthe der Polarisation hervorbringt.

II. Zur Frage der inconstanten Elemente.

Nach der Exner'schen Arbeit: Zur Theorie der inconstanten Elemente, ist eine grosse Anzahl Abhandlungen über jenen Gegenstand erschienen, die vielfach das Gepräge einer Polemik tragen.

Da die Frage in naher Beziehung zu der von mir behandelten stand, so habe ich einige Versuche mit Benutzung der beschriebenen Anordnungen angestellt, um die vorhandenen Angaben besser vergleichen zu können.

Was zunächst den Smee anbetrifft, so ist dessen electromotorische Kraft schon nach den verschiedensten Methoden und unter verschiedensten Verhältnissen bestimmt worden.

Joule[1]) bestimmt sie nach der Fechner'schen Methode, bei Anwendung von amalgamirtem Zink und platinirtem Silber, zu 0,65 D.

Beetz[2]) fand nach der Compensationsmethode 1,54 D.

Raoult[3]) erhält nach der Oppositionsmethode nach vorherigem Schluss des Elementes — getrennte Electroden:

bei Anwendung ausgekochter Säure	0,59 D.
„ „ lufthaltiger „	0,69 „
„ Erwärmen der Säure am Platin auf 100°	0,70 „
Naccari[4]) bei offenem Element	1,20 „
bei geschlossenem	0,72 „

später[5]) mit seinem neuen Compensationsschlüssel:

1) Joule, Phil. Mag. **24.** p. 113. 1844.
2) Beetz, Pogg. Ann. **90.** p. 42. 1853.
3) Raoult, Ann. de chim. et de phys. **2.** p. 345. 1864.
4) Naccari, Reg. Ist. Ven. (4) **2.** 1873. Nuov. Cim. (2) **9.** p. 48. 1873.
5) Naccari, Nuov. Cim. (2) **11.** p. 125. 1873.

bei offenem Element . . . . . 1,05 D.
bei geschlossenem . . . . . 0,47 „
bis
je nach Intensität des gegebenen Stromes . 0,58 „

Crova[1]) hat im Vacuum Messungen vorgenommen und gibt an . . . . . 0,735—0,801.

Davon sind bei wirklich geschlossenem Strome die Bestimmungen von Joule und von Crova, bei eben geöffnetem Strome die von Raoult und die von Naccari, und zwar bei diesem die letzteren wohl am zuverlässigsten; bei offenem Strome die von Beetz und die näher bezeichneten von Naccari.

Dazu kommen die Exner'schen Zahlen: offen 1,15 — eben geöffnet 0,731 D.

Davon ist nach Exner[2]) 1,15 eine zufällige Zahl; ein offenes Element kann je nach dem Sauerstoffgehalt der Umgebung einen Werth bis 2,15 D. erreichen. 0,731 stimmt mit dem theoretisch abgeleiteten 0,732 genau überein. Kleinere Werthe sind immer die Folge einer Auflösung von Zink in der Flüssigkeit.

Fromme erhält bei Anwendung reinen geglühten Platins für offenes Element mit getrennten Electroden 1,507 D. — Befanden sich beide Electroden in einem Gefäss, so sank der Werth bei Gegenwart von genügend Wasserstoff bis 0,708 D., und zwar desto schneller, je kleiner und je reiner die Oberfläche.

Die Angaben bei Stromschluss sind nach der Fuchs'schen Methode gewonnen und ergeben, wie zu erwarten, ausserordentlich geringe Werthe: 0,025—0,183 D., je nach Beschaffenheit der Platinelectrode. Sie sind als fehlerhaft zu betrachten.

Beetz[3]) findet für das offene Element . . . 1,52 D.
für das geschlossene . . . . . 0,72 „
Naccari und Guglielmo[4]) finden offen . . 1,41 „
geschlossen . . . . . 0,60 „

1) Crova, Pogg. Ann. **153.** p. 272. 1874.
2) Exner, Wien. Ber. **80.** p. 11. 1879.
3) Beetz, Wied. Ann. **10.** p. 348. 1880.
4) Naccari und Guglielmo, Atti di Torino **16.** p. 17ff. 1881.

Ayrton und Perry[1]) berechnen den Werth
eines Smee für Wasser auf . . . . . 1,143 D.
für verdünnte Schwefelsäure . . . . . 1,410 „

Hallock's Versuche sind alle bei geschlossenem Strome nach der Fechner'schen Methode und auch meist unter ganz besonderen Umständen angestellt.

Die vielen Angaben stimmen nur wenig miteinander überein. Es sind offenbar viele Umstände zugleich, welche auf die electromotorische Kraft eines solchen Elementes wirken.

Wenn daher Exner nur Sauerstoff und aufgelöstes Zink als Ursachen der Vergrösserung oder Verkleinerung der electromotorischen Kräfte ansieht, wenn Fromme einzig und allein dem Wasserstoff jede Aenderung zuschreibt, so scheint mir beides, sowohl nach meinen Erfahrungen als nach den vorhandenen Versuchen zu urtheilen, nicht correct.

Was die Wirkung von aufgelöstem Zink anbetrifft, so findet Fromme beim Zusetzen von $ZnSO_4$ zur Flüssigkeit eine Abnahme, aber nur eine geringe.

Naccari und Guglielmo erhielten bei mit $ZnSO_4$ versetzter Flüssigkeit, je nach dem Widerstand in der Schliessung, verschieden grosse Werthe der electromotorischen Kraft — bei grossem Widerstand erheblich über den von Exner angegebenen Werth von 0,73.

Hallock konnte in einem Smee mit getrennten Electroden, welches nach kurzer Schliessung bei 6700 S.-E. einen Werth von 0,31 ergab, keine Spur von Zn am Platin nachweisen. Auch stieg jener Werth 0,31 in fünf Minuten schon auf 0,61 — später bis 0,83. Wäre Zink an jenem kleinen Werth schuld gewesen, so hätte unmöglich eine solche Zunahme haben stattfinden können.

Wenn also auch Zink in der Lösung ein Herabdrücken der electromotorischen Kraft bewirkt, so ist es doch nicht ganz allein an der Schwächung der Elemente schuld.

Den grossen Einfluss des Wasserstoffes beweisen die Versuche Fromme's und Hallock's zur Genüge. Doch

1) Ayrton und Perry, Phil. Mag. (5) **11**. p. 50. 1881.

wäre es zu viel, wollte man anderen Factoren eine Einwirkung völlig absprechen.

Ich habe bei den verschiedenen Combinationen zwischen Pt, Zn, Cu, Ag Versuche angestellt, bei denen ich die electromotorische Kraft des offenen und des geschlossenen Elementes nach der Compensationsmethode bestimmte, zugleich aber auch die Werthe, welche sich ergeben, wenn an der positiven Electrode Wasserstoff electrolytisch entwickelt wird — und bei Platin auch die sich nach Wasserstoffentwickelung an demselben ergebenden.

Bei Zn | Cu erhielt ich: (Calom. = 1) für das offene Element 1,01—0,99; wurde Wasserstoff am Cu entwickelt, so sank der Werth bald bis 0,41. Bei Unterbrechung der Wasserstoffentwickelung, die doch sicher allen Sauerstoff am Cu entfernt hatte, stieg die electromotorische Kraft schon nach einer Minute auf den ursprünglichen Werth von 1,01.

Schloss man das Element ohne äusseren Widerstand (der innere war bedeutend), so sank die electromotorische Kraft fast unmerklich, höchstens auf 0,97.

Brachte man aber beide Electroden in dasselbe Gefäss, so sank die electromotorische Kraft plötzlich wieder auf 0,41.

Die Werthe 1,01 und 0,41 stimmen mit den früher nach der roheren Methode (Vorversuche II.) erhaltenen genügend überein. Ebenso mit den Beetz'schen.[1])

Die Versuche zeigen, dass in diesem Falle die Schwächung lediglich dem Wasserstoff zuzuschreiben ist. Denn beruhte die Schwächung nur auf Entfernung des Sauerstoffs, so könnte nach Exner der Werth nie unter 0,73 sinken und müsste so gross verbleiben, wenn nicht aufgelöstes Zink ihn verminderte. Wäre aber Zink die Ursache, so könnte unmöglich die electromotorische Kraft so bald wieder auf 1,01 steigen, ja letzteres ist ohne Anwesenheit von Sauerstoff nach Exner überhaupt nicht möglich; Sauerstoff war aber vollständig entfernt, wie der kleine Werth 0,41 beweist. Uebrigens ist auch die Uebereinstimmung der beiden Werthe 0,41 zu gross, als dass ihnen nicht dieselbe Ursache zu Grunde läge.

1) v. Beetz, l. c. p. 363.

Bei Zn | Ag ergab sich:

offen — Electrode getrennt		1,24 — 120
H am Ag — Werth fällt auf		0,38
Entwickelung unterbrochen	nach 1 Min.	0,97
„ „	„ 2 Min.	1,18
	bald	1,24

in demselben Gefässe geschlossen sinkt langsam bis . . . . . 0,53.

Auch hier stimmen die Werthe „offen" und „geschlossen" mit den von Beetz[1]) angegebenen auf etwa $^2/_{100}$ überein. Ebenso mit Fromme's „offen".

Bei Silber ist eine vollständige Uebereinstimmung der Werthe „in demselben Gefässe geschlossen" und „Wasserstoff am Silber" nicht vorhanden; überhaupt scheint eine Sättigung des Silbers mit Wasserstoff nur langsam vor sich zu gehen.

Bei Zn | Pt ergab sich:

Offenes Element — verschieden je nach Beschaffenheit des Platins:

die frühere Anode ergab 1,43—1,51
die frühere Kathode ergab 1,27—1,32.

Beide Platten ergaben auch in der That eine Potentialdifferenz 0,16.

Bei einer Reihe von Messungen, bei denen die Electrodengefässe durch eine siedende Wassermasse getrennt waren (siehe p. 71) ergab sich:

offenes Element . . .	1,49	geöffnet zeigt gleich über	1,29
lange geschlossen . . .	1,20	bald	1,44
Siedendes Wasser durch kaltes ersetzt:			
geschlossen	1,22	nimmt langsam ab . .	—
offen — Sauerst. am Pt	2,30	Wasserstoff am Platin .	0,70
Entwickel. unterbrochen	2,10		
Wasser wieder zum Sieden gebracht			
bleibt	0,70	Sauerstoff am Platin .	2,27

An anderen Tagen ergab sich bei verschiedenen Anordnungen:

$ZnPt_O$ 2,35 2,30 2,36, $ZnPt_H$ 0,69.

1) v. Beetz, l. c. p. 364.

Waren beide Electroden in demselben Gefäss, so war die electromotorische Kraft ziemlich constant 1,25

Wenige Minuten in sich geschlossen, zeigte das Element eine electromotorische Kraft . . . . . 0,71.

Das offene Element zeigt hier die grössten Unregelmässigkeiten — so weichen ja auch die früheren Angaben so sehr von einander ab. Es ist dies gewiss eine Folge der grossen Occlusionsfähigkeit des Platins für Gase. Herrscht ein Gas überwiegend vor, so ergeben sich ziemlich constante Werthe. So in den beiden Fällen: bei Sauerstoff 2,27—2,36 bei Wasserstoff 0,69—0,70.

Auch hier tritt eine Aenderung durch die vollkommene Trennung der Electroden nicht hervor.

Auch vollständige Uebereinstimmung von „geschlossen in demselben Gefässe" und „Wasserstoff am Platin" ist vorhanden.

Dass aufgelöstes Zink nicht an einem Fallen der electromotorischen Kraft schuld sei, geht übrigens auch aus einigen früheren Versuchen (Vorversuche II) hervor, bei denen sich für:

$ZnPt$ in $ZnSO_4$ 1,00 D., $ZnCu$ in $ZnSO_4$ 0,911 D. ergab.

Bei CuPt ergab sich:

das offene Element (getr. Electr.)	0,57 Cal.
Sauerstoff am Platin	1,30 „
Wasserstoff am Platin	−0,30 „
Entwickelung unterbrochen bis	0,51 „
Element in sich geschlossen, in zwei Minuten	0,07 „
bald	0,03 „

Für die beiden Fälle, in denen H oder O am Platin entwickelt wird, findet man ähnliche Werthe in der Beetz'schen Tabelle.[1]) Derselbe fand bei geschlossenem Strom:

Cu in $CuSO_4 \mid Pt_O$ in H_2SO_4 1,29 D.
Cu in $CuSO_4 \mid Pt_H$ in H_2SO_4 −0,34 D.

1) v. Beetz, Wied. Ann. 10. p. 357. 1880.

Bei AgPt ergab sich:

das offene Element (getr. Electr.)	0,35 Cal.
Sauerstoff am Platin	1,03 „
Wasserstoff am Platin sinkt bis	−0,48 „
unterbrochen — nimmt langsam zu.	
In demselb. Gefässe geschlossen, sinkt bald bis	0,03 „
geöffnet	0,25 „

In diesen beiden Fällen bringt Wasserstoffentwickelung an der Anode sogar eine Umkehrung des Stromes hervor, daher sind die Elemente, wenn sie in sich selbst geschlossen werden, bald erschöpft und sinken auf Null.

Beim Oeffnen steigt auch bei ihnen die electromotorische Kraft bald wieder zu dem ursprünglichen hohen Werth.

Alle Werthe sind in der Calomeleinheit ausgedrückt und müssen daher um etwa 3 Proc. vermindert werden, um zur Danielleinheit überzugehen.

Sie zeigen, dass ein derartiges Element bei kurzem Schluss bald auf Null sinkt oder einen Minimalwerth erreicht, der durch directe Wasserstoffentwickelung am positiven Pol ebenso erhalten wird.

Bildet man aus den angeführten Zahlen die Werthe der Wasserstoffpolarisation — („Wasserstoff am Platin" weniger „offen" etc.), so erhält man:

für Cu_H		0,55	Cal.	
„ Ag_H	gegen Zn	0,82	„	
„ Pt_H		0,80	„	0,83.
„ Pt_H	gegen Cu	0,87	„	
„ Pt_H	gegen Ag	0,83	„	

Die Werthe, die Fromme angibt, sind natürlich grösser, denn während seine Werthe für die offenen Elemente mit meinen im ganzen übereinstimmen, sind diejenigen bei geschlossenem Strome durch die Methode beeinflusst, und zwar vermindert. Der Werth für Pt stimmt sehr gut mit dem von Beetz angegebenen 0,80 D.[1]), ebenso der für Cu, den

1) Beetz, Wied. Ann. **10.** p. 363. 1880.

Beetz 0,54 findet. Bei Ag findet keine vollständige Uebereinstimmung statt −0,72 D. Es tritt auch die Unabhängigkeit des Werthes von der Natur der gegenüberliegenden Electrode deutlich hervor.

Uebrigens will ich hierbei bemerken, dass der grosse Werth der Polarisation bei Gold (s. Fromme) schon von Raoult beobachtet[1]) wurde, und zwar:

bei Au 0,99, bei Pt 0,95, bei Cu 0,42,

und übrigens auch schon von Becquerel gefunden worden war, welcher das Verhältniss angibt:

$$\frac{Au_H}{Pt_H} = \frac{48{,}88}{43{,}38}.$$

In derselben Weise kann man auch die Sauerstoffpolarisation des Platins ausrechnen. Sie ergibt sich aus den Versuchen:

mit Ag 0,68, mit Cu 0,73, mit Zn 0,81.

Die bei Anwendung von Zn | Pt erhaltenen Werthe ergeben also in der That Gleichheit der beiden Polarisationen.

Dass bei den Beetz'schen Versuchen dies nicht der Fall ist[2]), liegt wohl daran, dass die Methode den einen Werth grösser, den anderen kleiner als in Wirklichkeit angibt, da die Richtung der gemessenen Potentialdifferenz in beiden Fällen entgegengesetzt ist.

Aus der Summe der beiden einzelnen Polarisationen erhält man für die Gesammtpolarisation von Platin in Schwefelsäure:

bei Ag 1,50, bei Cu 1,60, bei Zn 1,60.

Freilich immer noch kleine Werthe. Der Grund davon liegt aber wohl in der Anwendung der Compensationsmethode. In der That stimmen jene Werthe mit den früheren, für eben geöffneten Strom vollkommen überein.

---

1) Raoult, Ann. de chim. et de phys. (4) 2. p. 365. 1864.
2) Beetz, Wied. Ann. 10. p. 368. 1880.

IV. *Ueber die Electricitätsleitung der Gase; von W. Hittorf.*

(Fortsetzung von Bd. 20. p. 755.)

§ 6. Weitere Eigenthümlichkeiten des Kathodenlichtes in Gasen von geringer Dichte.

50. Die stetige Ausdehnung, welche das Glimmlicht auf der Oberfläche der Kathode bei Zunahme der Stromstärke nach dem vorigen Paragraphen erfuhr, tritt beim galvanischen Strome, ganz wie beim Inductionsstrome, nur dann ein, wenn die Röhre, in deren Axe der negative Draht liegt, eine genügende Weite hat. Je geringer die Dichte des Gases ist, desto grösser muss der Durchmesser sein.

Auch in dieser Hinsicht darf ich mich auf meine erste Mittheilung beziehen, indem mit einer Ausnahme alle Verhältnisse, welche in § 4 derselben erörtert sind, für den galvanischen Strom gelten.

51. Als Beleg für diese Behauptung möge zunächst eine Versuchsreihe dienen, in welcher zwei cylindrische Röhren mit sehr verschiedenen Durchmessern ($10^1/_2$ cm und 1 cm) und gleichen Electroden, die denselben Abstand von einander hatten, einzeln in den Schliessungsbogen, welcher dieselbe Elementenzahl und die nämliche Widerstandssäule enthielt, abwechselnd aufgenommen wurden. Beim Durchgange des Stromes durch die einzelne Röhre war ihr Gas durch einen Hahn abgesperrt. Aluminiumdrähte von 12 cm Länge und 2 mm Dicke bildeten die Kathoden (*c*); die Anoden (*a*) waren Drähte desselben Metalles von derselben Dicke und durch den Abstand (17 mm) von ersteren getrennt (Fig. 7). Die Röhren befanden sich gleichzeitig an der Quecksilberpumpe und enthielten jedesmal Luft von derselben Dichte.

Bemerkungen zu der Tabelle XVI. Bei der Spannkraft der Luft von 1,45 mm (Nr. 1 und 2) und bei grösserer bildet sich das Glimmlicht auf dem Drahte der engen Röhre bedeutend leichter, obgleich beide Drähte aus demselben Stücke ursprünglich genommen waren. Solche Unterschiede kommen, namentlich beim Aluminium, fast immer vor.

Tabelle XVI.

Nr. des Versuches . . .	1.		2.		3.		3.		5.	
Spannkraft d. Luft in mm	1,45		1,45		0,9		0,9		0,5	
Zahl der Elemente . . .	300		300		300		300		300	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		50		100		50		100	
Durchm. der Röhre in cm	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1
Abl. d. Galv. II (v. 2 × 14 cm Rheost.)	59	78	103	145,5	57,5	61,5	97,5	107	54,5	25—33
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	2400	3175	4190	5920	2340	2500	3970	4355	2220	1180
Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr. . .	66,5	58	67,5	59,5	67	66	69	67	68,5	82—78
Länge des Glimml. in cm	4,5	4,5	12 ganz	8	8	4,5	12 ganz	7	12 ganz	1,5-2,5

Nr. des Versuches . . .	6.		7.		8.		9.	
Spannkraft d. Luft in mm	0,5		0,325		0,325		0,325	
Zahl der Elemente . . .	400		300		300		400	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		100		50		100	
Durchm. der Röhre in cm	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1
Abl. d. Galv. II (v. 2 × 14 cm Rheost.)	103,5	73—75	44	9—12	60,5	11,5	82	41—44
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	4210	3010	1790	430	2460	470	3340	1730
Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr. . .	76	93—88	73,5	90—88	78	91	84	105—102
Länge des Glimml. in cm	12 ganz	5	12 ganz	1,75	12 ganz	1,75	12 ganz	4

Nr. des Versuches . . .	10.		11.		12.	13.		14.	
Spannkraft d. Luft in mm	0,2		0,2		0,2	0,2		0,2	
Zahl der Elemente . . .	300		300		300	400		500	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		50		0	100		100	
Durchm. der Röhre in cm	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1
Abl. d. Galv. II (v. 2 × 14 cm Rheost.)	39,5	2—3,5	46	2	2	59	8	95—89	25—23
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	1610	81	1870	81	81	2400	330	3740	977
Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr. . .	78,5	98	84	98	97	91,5	117	103—107	139—140
Länge des Glimml. in cm	12 ganz	$^1/_2$	12 ganz	$^1/_2$	$^1/_2$	12 ganz	1	12 ganz	3

(Fortsetzung von Tabelle XVI.)

Nr. des Versuches . . .	15.		16.		17.		18.	19.	20.	
Spannkraft d. Luft in mm	0,125		0,125		0,125		0,08	0,08	0,08	
Zahl der Elemente . . .	300		400		500		300	500	600	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		100		100		100	100	100	
Durchm. der Röhre in cm	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	$10^1/_2$	$10^1/_2$	1
Abl. d. Galv. II (v. 2×14 cm Rheost.)	23	0	42	0	69,5	2,5—3	17,5	56	85	3
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	940	—	1710	—	2830	84	710	2300	3460	12
Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr. . .	84,5	—	99	—	117	152	90	127	140	182
Länge des Glimml. in cm	12 ganz	—	12 ganz	—	12 ganz	$^1/_2$	12 ganz	12 ganz	12 ganz	$^1/_2$

Nr. des Versuches . . .	21.	22.		23.	24.	25.	26.
Spannkraft d. Luft in mm	0,08	0,08		0,03?	0,03?	0,014?	0,014?
Zahl der Elemente . . .	600	800		300	1100	300	2200
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	0	100		100	100	100	100
Durchm. der Röhre in cm	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1	$10^1/_2$	1
Abl. d. Galv. II (v. 2×14 cm Rheost.)	3	155—163	160—256	8,5	10—87	3,5—4	0
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E	12	6470	—	346	—	125	—
Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr. . .	183	165—162	168—122	91	335—287	94—93	—
Länge des Glimml. in cm	$^1/_2$	12 ganz	8	12 ganz	$^1/_4$—2	12 ganz	—

Sie werden besonders gross, wenn der eine Draht bereits als Kathode für stärkere Ströme gedient hat, während der andere noch ungebraucht ist. Wir besprechen später die Veränderungen näher, welche das negative Glimmlicht auf der Oberfläche dieses Metalles erzeugt.

Das Glimmlicht bildet bei dieser Dichte der Luft eine Hülle, welche nur einen kleinen Theil des Zwischenraumes zwischen Kathodendraht und Glaswand in der engen Röhre füllt und daher überall neben sich die dunkle positive Entladung gestattet.

Bei fortschreitender Verdünnung nimmt die enge Röhre

eine rasch wachsende Spannungsdifferenz für den Durchgang des Stromes in Anspruch, indem ihr Glimmlicht immer mehr auf das der Anode zunächst liegende Ende der Kathode beschränkt bleibt. In der weiten Röhre ist dagegen stets die ganze Länge der Kathode mit demselben bedeckt.

Bei der Spannkraft der Luft 0,2 mm (Nr. 10 bis 12) ist die für den Durchgang des Stromes durch die enge Röhre erforderliche Spannungsdifferenz beinahe gleich derjenigen, welche 300 Elemente besitzen. Infolge davon ist die Stromstärke, welche 300 Elemente in der engen Röhre geben, von der Länge der aufgenommenen Widerstandssäule so gut wie unabhängig und bleibt auch bei Ausschaltung derselben unverändert, während die weite Röhre ganz anders sich verhält.

Bei der Spannkraft der Luft 0,125 mm (Nr. 15 bis 17) verlangt der Durchgang der Electricität in der engen Röhre bereits eine Spannungsdifferenz von nahe 500 Elementen; 300 und 400 Elemente, welche in der weiten Röhre leicht einen Strom geben, versagen ihn hier.

Bei der Spannkraft 0,08 mm (Nr. 18 bis 22) versagten auch 500 Elemente in der engen Röhre den Strom, 600 Elemente gaben nur einen ganz schwachen, während 300 Elemente für die weite Röhre noch genügten. Als 800 Elemente für die enge Röhre bei 100 mm Länge der Widerstandssäule genommen wurden, verstärkte sich der Strom bei der Fortdauer, indem die Ladung des Condensators abnahm. Das Glimmlicht dehnte sich bis auf die Länge von 8 cm aus. Positives weisses Licht ging von der Anode, ohne dunklen Raum zu lassen, als Streifen unmittelbar an der Glaswand neben der dunkeln Schicht des Glimmlichtes. Letzteres hatte nämlich durch seine hohe Temperatur occludirte Gase aus der Kathode frei gemacht und dadurch die beschriebenen Veränderungen hervorgebracht.

Bei der Spannkraft 0,03 mm? (Nr. 23 und 24) waren 1100 Elemente für die Strombildung in der engen Röhre nöthig, während 300 Elemente für die weite noch genügten. Erstere bewirkten in der engen Röhre in gleicher Weise eine Gasentwickelung aus der Kathode und infolge davon

trat eine stetige Abnahme der Spannungsdifferenz und eine Zunahme der Stromstärke ein.

Endlich bei 0,014 mm? gaben selbst 2200 Elemente nicht mehr einen Strom in der engen Röhre; 300 Elemente genügten noch eben für die weite. Stets wurde die Hülfe des Funkens herangezogen, wenn der Durchgang nicht von selbst erfolgte.

53. Bei noch weiter fortgesetzter Verdünnung genügen selbstverständlich 300 Elemente nicht mehr für die Strombildung in der weiten Röhre; aber die Elementenzahl, die nöthig wird, bleibt stets klein im Vergleich mit derjenigen, welche bei derselben Verdünnung die enge Röhre fordert.

In meiner ersten Mittheilung habe ich gezeigt, wie sich mit Hülfe der Quecksilberpumpe bei gleichzeitiger Erhitzung in engeren Röhren Verdünnungen erzielen lassen, bei welchen selbst die grossen Spannungsdifferenzen des Inductionsstromes, welchen Ruhmkorff'sche Apparate von mittlerer Grösse liefern, die Strombildung versagen. Hinreichend weite Röhren mit langen Kathoden bieten dem Durchgange der Electricität solche Hindernisse nicht.

Obschon diese Verhältnisse in meiner ersten Mittheilung nachgewiesen wurden, so sind sie doch bis in die neueste Zeit fast allgemein ignorirt worden. Die engen stark evacuirten Röhren mit nahe gestellten Electroden werden in allen Hand- und Lehrbüchern, die ich kenne, als Belege dafür aufgeführt, dass das Vacuum die Electricität nicht leite. Im verflossenen Jahre musste Edlund[1]) im Interesse seiner Aethertheorie darauf hinweisen, wie unrichtig diese Darstellung ist, und die Aufmerksamkeit der Physiker auf meine Angaben lenken.

54. In § 4 meiner ersten Mittheilung habe ich für den Inductionsstrom als die Ursache, die in den engen Röhren die Strombildung verhindert, die Schwierigkeit bezeichnet, welche in der Umgebung der Kathode die Entstehung der sogenannten positiven Entladung, der leuchtenden, wie der dunkeln findet. Man erkennt dieselbe auch für den galva-

1) Edlund, Wied. Ann. **15.** p. 514. 1882.

nischen Strom deutlich an den Lichterscheinungen, welche sich in der weiten Röhre zeigen.

Wie in Nr. 12 p. 9 meiner ersten Mittheilung beschrieben wurde und die Skizze (Fig. 4_a) dieser Abhandlung zeigt, unterscheidet man am negativen Glimmlicht gewöhnlich drei Theile. In unmittelbarer Berührung mit der Oberfläche der Kathode tritt ein schmaler, heller leuchtender Saum auf. Darauf folgt eine dickere dunkelere und deshalb durchsichtig scheinende Hülle. Von dieser hebt sich die dritte äusserste Schicht durch stärkeres Leuchten ab. Mit der Verringerung der Gasdichte und ebenso mit Zunahme der Stromstärke wächst die Dicke dieser Hüllen stetig. Man bemerkt nun sehr deutlich, wie das positive Licht nur bis zur mittleren dunkeln Schicht des Glimmlichtes sich ausdehnt und ganz scharf am äusseren Rande derselben abschneidet. Ist der Abstand der Electroden so klein, dass der positive Draht in diese dunkle Schicht hineinragt, so bleibt er, so weit er hineinreicht, ganz frei von Licht, während das ausserhalb liegende Stück sich mit einer leuchtenden Hülle umgibt. Sehr schön gibt sich die Thatsache ferner kund in der Lichterscheinung einer cylindrischen Röhre, deren Kathode ein in der Axe liegender Draht ist. Vermehrt man nämlich bei grösserer Verdünnung etwa durch Verringerung des Widerstandes die Stromstärke, so verkleinert sich stetig der dunkle Raum zwischen Glimmlicht und positivem Licht, indem letzteres sich ausdehnt. Ist es geschichtet, so vermehren sich seine Schichten und erscheinen bei genügender Stromstärke auch neben dem Kathodenlicht. Sie nehmen hier aber nie den ganzen Querschnitt der Röhre ein, sondern bilden leuchtende Ringe, welche auf der einen Seite von der Glaswand begrenzt sind und auf der anderen scharf an der dunklen negativen Schicht endigen.

In meiner ersten Mittheilung ist ein Glasgefäss angegeben und abgebildet[1]), welches zum Nachweis jener Schwierigkeit sich sehr gut eignet. Zwei weite Cylinder oder Kugeln sind nämlich durch eine gerade enge Röhre verbunden. In der gemeinschaftlichen Axe liegen zwei lange

1) Hittorf, Pogg. Ann. 136. Taf. II. Fig. 4. 1869.

Drähte als Electroden, welche in der engen Röhre endigen, und hier einen Abstand von nur 1 mm zwischen sich lassen. Eine andere enge Röhre von demselben Durchmesser, aber viel grösserer Länge stellt eine zweite Verbindung unter den beiden weiten Gefässen her.

Ich habe diesen Apparat später noch überraschender in seiner Wirkung von Geissler herstellen lassen, indem die letztgenannte Verbindungsröhre die grosse Länge von $3^3/_4$ m erhielt und, in zwei Spiralen aufgerollt, an die beiden weiten Gefässe angeschmolzen wurde (s. Fig. 8).[1]) Mit der Quecksilberpumpe lässt sich eine Verdünnung herstellen, bei welcher der Inductionsstrom nicht mehr durch den kleinen Abstand der Drähte von 1 mm geht, sondern die lange Spirale als Bahn benutzt. Letztere füllt sich mit positivem, oft geschichtetem Lichte, während die gerade Verbindungsröhre lichtleer wird.

55. Als ich mit dem galvanischen Strome anstatt des Inductionsstromes die Versuche in dem aus der ersten Mittheilung citirten Glasgefässe wiederholte, habe ich einen Irrthum, den die Benutzung des letztgenannten Stromes verschuldet, und welcher den Inhalt von Nr. 48 p. 211 jener Mittheilung bildet, erkannt. Wie dort angegeben, hatte ich nämlich gefunden, dass das Hinderniss für die positive Entladung in der Umgebung der Kathode bei dem Inductionsstrome bestehen bleibt, wenn man den Theil des negativen Drahtes, welcher in der engen Röhre liegt, mit einer Hülle aus einem festen Isolator (Glas) umgibt und so das Glimmlicht auf seiner Oberfläche daselbst so gut wie ausschliesst. Daraus hatte ich den Schluss gezogen, dass das Hinderniss für den positiven Strom in der Umgebung der Kathode auch dann besteht, wenn die hier vorhandenen Gastheilchen nicht in der Glimmlichtentladung begriffen sind. Dieser Schluss ist aber falsch. Denn vertauscht man die grossen Spannungsdifferenzen, welche in der inducirten Ruhmkorff'schen Rolle auftreten, gegen die kleineren der galvani-

1) Dieses Glasgefäss befand sich auf den internationalen Ausstellungen in London (Biedermann, Bericht p. 318) und in Paris (Specialkatalog für Deutschland p. 19).

schen Elemente, so erfolgt der Durchgang des Stromes durch die kurze, gerade Verbindungsröhre, wenn der negative Draht auf der Länge, welche innerhalb der letzteren liegt, von einer Glasröhre umgeben ist. Der ringförmige Zwischenraum zwischen derselben und der äusseren Wand füllt sich mit positivem Licht, und der lange Verbindungscanal bleibt bei Verdünnungen lichtleer, bei welchen er nach Entfernung der Glashülle die alleinige Bahn des Stromes abgibt.

Demnach müssen die Gastheilchen in dem Vorgange, welcher negatives Glimmlicht genannt wird, begriffen sein, wenn die positive Entladung verhindert werden soll. Dieselben Gasmolecüle nehmen gleichzeitig beide Arten der Leitung nicht an.

Dass der von mir früher benutzte Inductionsstrom trotz der Glashülle auf der Kathode die enge, kurze Röhre vermied und den langen Canal wählte, lag nur daran, dass den grossen Spannungsdifferenzen desselben gegenüber das Glas kein genügender Isolator bleibt; es bildet sich auf seiner Oberfläche schwaches Glimmlicht, welches bei voller Dunkelheit des Zimmers deutlich wahrgenommen wird. Obgleich ich diese Thatsache kannte und auch an jener Stelle erwähnt habe, nahm ich doch an, dass das Glimmlicht auf der Oberfläche des Glases seiner Schwäche wegen für diese Wirkung nicht ausreiche.

56. Es ist in neuester Zeit behauptet worden, das Hinderniss in dieser Röhre entstehe aus der Ladung der nahen Glaswände durch statische Electricität.[1]) Wie unrichtig diese Auffassung ist, habe ich schon Nr. 45 meiner ersten Mittheilung gezeigt, wo in der Mitte beliebig weiter Kugelgefässe dieselben Verhältnisse nachgewiesen wurden.

57. Es sind stets die beiden der Kathode nächsten Hüllen oder Schichten des Glimmlichtes, in welchen die positive Entladung so sehr erschwert ist. Mit der Zunahme der Gasdichte nimmt die Dicke dieser Hüllen rasch ab. Will man daher bei grösseren Dichten der Gase das Hinderniss

1) Puluj, Beibl. 7. p. 134. 1883.

nachweisen, so muss man die gerade Verbindungsröhre sehr enge nehmen.

In folgender Weise lässt sich diese Thatsache besser und auffallender zeigen. In einer cylindrischen, 1 cm weiten Glasröhre (Fig. 9 I) liegen als Electroden zwei Aluminiumdrähte so, dass die Kathode *c* die Axe einnimmt, während die parallele Anode *a* einen kleinen Abstand (1 mm) hat. Damit die Anziehung, welche grössere Spannungsdifferenzen zwischen ihnen veranlassen, keine Berührung herbeiführen kann, müssen die Drähte etwas dick (2 mm) genommen und ihre Enden festgelegt werden. Letzteres wurde einfach dadurch erzielt, dass auf das Ende der Kathode ein kurzes, zugeschmolzenes Glasröhrchen (*m*) geschoben ward, während die Anode mit ihrem Ende sich neben die Glasröhre, in welche die Kathode gekittet ist, legte und so von letzterer getrennt blieb.

Mit dieser Röhre I wurde gleichzeitig die cylindrische Röhre II von $5^1/_2$ cm Weite, deren Electroden, gleichdicke (2 mm) Aluminiumdrähte, in gewöhnlicher Weise in der Axe lagen, an der Quecksilberpumpe befestigt. Die Kathode hatte ungefähr dieselbe Länge wie in Röhre I, nämlich 8 cm, und stand 17 mm von der Anode ab. Beide Röhren wurden mit Stickstoff von derselben Spannkraft gefüllt und nacheinander in denselben Schliessungsbogen aufgenommen.

Tabelle XVII.

Nr. des Versuches .	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.		8.		
Spannkraft des Stickstoffes in mm . .	5		1,85		1,3		0,7		0,7		0,45		0,25		0,25		(
Zahl der Elemente .	400		400		400		400		300		300		300 u. 400	300	500		300
Länge der JCd-lösung (17 mm)	200		200		200		200		200		200		200	200	200		200
Röhre	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	II
Abl. d. Galv. II (von 2 × 14 cm) . . .	82,5	78	77	80	74	79,5	53,5	71	30	48,5	16	45	0	36	15-13	82	26
Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung d. Condens. durch d. Sp. d. Electr. . . .	44	49	48,5	47,5	52	48	70,5	54	65	48,5	79	52		59	140	75	71

Wenn in der engen Röhre I, solange die Verdünnung noch geringer ist, Durchgang des Stromes erfolgt, tritt das positive Licht auf der von der Kathode abgewendeten Seite der Anode auf, entfernt sich zuerst und wendet sich an der Glaswand, möglichst weit von der Kathode, zu der Glimmhülle derselben zurück. Diese Erscheinung wurde schon in der ersten Mittheilung für den Inductionsstrom beschrieben.

Die Tabelle zeigt deutlich, wie mit der Abnahme der Gasdichte die Strombildung in der engen Röhre immer schwieriger wird. In der weiten Röhre gaben 300 Elemente bei allen benutzten Dichten von selbst den stetigen Strom. Dagegen bedurften dieselben schon bei der Spannkraft 0,7 mm der Hülfe des Funkens, damit in der engen Röhre I der Durchgang der Electricität bleibend wird. Wenn derselbe bei den kleinen Spannkräften eintritt, so schwankt der Magnet des Galvanometers II hin und her, und das Telephon rauscht. Bei der Spannkraft 0,1 mm (Nr. 9) genügten 2000 Elemente nicht, um dem vom Funken eingeleiteten Durchgange Fortdauer zu geben.

58. Das Hinderniss für die Strombildung lässt sich noch vergrössern, indem man der Kathode die Anode in jeder Richtung möglichst nahe gegenüberstellt. Aus einem $^1/_{40}$ mm dicken Platinbleche war ein Cylinder ($a\,a$) von kleinem Durchmesser (2 mm) (Fig. 10) gebildet und mit den Enden in zwei dicke durchbohrte Stücke Platin mit Palladium eingelöthet. Das eine Stück hatte ein kurzes Schraubengewinde und war mit demselben in einen ausgebohrten Messingdraht p eingeschraubt. Dieser schob sich an dem anderen, ebenfalls ausgebohrten Ende, dicht anschliessend, über einen zweiten soliden Messingcylinder q, und eine silberne Spiralfeder r vermittelte zwischen beiden eine gute Berührung. In das Platinstück (n) am anderen Ende des dünnwandigen Platincylinders war ein dicker Kupferdraht (s) eingeschraubt. Das Ganze ist in eine Glasröhre so eingekittet, dass die Drähte s und q herausragten. Letztere gestatteten für Zwecke, die uns später interessiren, einen kräftigen electrischen Strom durch den Platincylinder zu leiten und denselben auf jede

Temperatur unterhalb der Schmelzhitze des Metalles zu versetzen. Durch die beschriebene Einrichtung konnte der Platincylinder sich ausdehnen, ohne dass Contact mit dem Axendrahte (*c*) eintrat. Für die Zwecke, die uns hier beschäftigen, blieb der Platincylinder auf gewöhnlicher Temperatur und bildete eine Anode, welche überall äusserst nahe den Platindraht (*c*) von 1 mm Dicke, welcher in der Axe lag und als Kathode diente, umgab. Berührung zwischen Draht und Cylinder wurde dadurch verhindert, dass ersterer mit dem einen Ende in der Axe eines dickwandigen Glasrohres eingekittet war, welches selbst in den Tubulus des Glasgefässes dicht passte. Um das andere Ende des Drahtes (*c*) ist ein kurzes zugeschmolzenes Glasröhrchen als Hülse und Führung geschoben.

Dieses Glasgefäss (III) und die vorher schon benutzte Röhre (II) wurden gleichzeitig an der Quecksilberpumpe befestigt, mit Stickstoff von derselben Dichte gefüllt und abwechselnd in denselben Schliessungsbogen aufgenommen.

Tabelle XVIII.

Nr. des Versuches . .	1.		2.			3.		4.		5.		6.		
Spannkraft des Stickstoffes in mm . . .	3,5		1,3			0,95		0,55		0,25		0,15		
Zahl der Elemente .	400		200	500	600	1100	1200	1200	1400	1600	1800	220	2200	22
Länge der JCd.-Lös. (17 mm weit) . . .	200		200	200	200	200	690	690	690	690	690	690	690	6
Röhre	II	III	II	III	III	III	III	III	III	III	III	II	III	I
Abl. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rh.) . .	81	70	23	0	8	0	17	0	24	0	4)	8	0	
Ausschl. des Galv. I v. d. Ladung des Condensators durch die Sp. der Electr. . .	48	58	45		183							50		

Schon bei der Spannkraft 3,5 mm nimmt der Durchgang der Electricität durch den kleinen Abstand $^1/_2$ mm der Electroden in der Röhre III eine grössere Spannungsdifferenz in Anspruch, wie derjenige durch den viel grösseren (17 mm) in der Röhre II.

Bei der Spannkraft 1,3 mm ist die für den Durchgang

in Röhre III nöthige Spannungsdifferenz beinahe diejenige von 600 Elementen; 500 Elemente versagten, auch bei Benutzung des Funkens. Nur bei dieser Dichte liess sich noch mit dem Condensator die Spannungsdifferenz der Electroden in dieser Röhre bestimmen. Bei weiter gehender Verdünnung ist die Entladung der galvanischen Kette hier nicht mehr stetig, sondern intermittirt. Der Charakter ändert sich vollständig, indem feine Metallfünkchen in grosser Zahl im Zwischenraume übergehen. Dem Geräusche, welches sie erzeugen, entspricht genau ein solches im Telephon. Die Fünkchen lassen deutliche Spuren auf dem Platin zurück. Um sie wahrzunehmen, hatte ich in einem anderen Versuche statt des geschlossenen Cylinders (*a*) einen Draht in Spiralwindungen um die Kathode gelegt und als Anode benutzt. Auch liessen sich dieselben gut erkennen, als zwei kreisrunde Metallplatten im Abstande von 1 mm in einer Glasröhre aufgestellt waren und als Electroden eines genügend verdünnten Gases dienten.

59. Das in den zwei letzten Tabellen niedergelegte Verhalten contrastirt so stark, wie möglich, mit der Vorstellung, welche die herrschende Theorie der electrischen Fluida von dem Funken hat. Dieselbe lässt bekanntlich die getrennten beiden Fluida, welchen sie die Oberflächen der Electroden als Sitze anweist, durch die Kräfte, welche aus der Abstossung der gleichnamigen und der Anziehung der ungleichnamigen Theilchen resultiren, den Druck des umgebenden Mediums überwinden und in dem Funkencanale, aus dem die Luft zurückgedrängt ist, zur Wiedervereinigung gelangen. Je kleiner der Abstand der Electroden, je dünner das umgebende Medium, desto leichter müsste dieser Vorgang erfolgen. Statt dessen finden wir gerade entgegengesetzt, dass eine um so grössere Spannungsdifferenz in Anspruch genommen wird, je mehr der Abstand der Electroden und der Druck des Gases sich vermindern.

§ 7. Verhalten der die Kathode umgebenden Gashülle bei grösserer Dichte.

60. In den Versuchen von § 5 blieb bei den kleinen dort benutzten Dichten der Gase die Spannungsdifferenz des

negativen Glimmlichtes, wie auch die Stromstärke wuchs, fast constant, solange dasselbe über die Oberfläche der Kathode sich ausdehnen konnte. Dabei erhielten sich Ansehen, Dicke und wie wahrscheinlich, die Temperatur desselben unverändert. War aber die Ausbreitung über die Fläche der Kathode nicht mehr möglich, so steigerte sich mit der Zunahme der Stromstärke rasch seine Spannungsdifferenz, indem gleichzeitig Dicke und Temperatur wuchsen.

Die im ersten Falle mit wachsender Stromstärke hinzukommenden neuen Theile des Glimmlichtes bilden sich bei der benutzten Anordnung in immer grösserem Abstande von der Anode. Die leitende Verbindung mit letzterer wird durch die Gastheilchen des umhüllenden dunklen Raumes, durch die sogenannte dunkle Entladung unterhalten, die sich sehr gut dazu eignet, da sie, wie wir § 4 feststellten, weit kleinere Spannungsdifferenzen unter gleichen Verhältnissen in Anspruch nimmt, wie die leuchtende positive.

61. Das Verhalten wird ein wesentlich anderes bei grösseren Dichten der Gase. Um die Intensität der Ströme genügend steigern zu können, musste das Aluminium, welches wir bis jetzt meistens benutzten, und welches das heisser werdende Glimmlicht alsdann geschmolzen hätte, durch das schwerflüssige Platin ersetzt werden. Nur wenn Electroden aus solchem Metall von genügender Dicke genommen werden, lassen sich Ströme von der grössten Stärke, welche meine galvanischen Elemente liefern können, durch die Gase dauernd leiten. Bis jetzt war fast immer eine längere oder kürzere Säule der schlechtleitenden Jodcadmiumlösung in dem Schliessungsbogen aufgenommen und dadurch wurden die grossen Stromintensitäten ausgeschlossen.

62. Als Uebergang zu den Versuchen mit grösseren Gasdichten und um den Unterschied besser hervortreten zu lassen, wollen wir zuerst noch die stärksten Ströme, welche meine Elemente, hintereinander verbunden, bei Ausschaltung der Widerstandssäule liefern, durch Stickstoff von kleiner Spannkraft verfolgen.

Dieselben beiden Glasröhren von $5^1/_2$ cm Durchmesser (Fig. 6) wurden in gleicher Anordnung wie früher, § 5, be-

nutzt. Statt der Drähte von Aluminium waren solche von Platin (1,6 mm dick) eingekittet. Die Kittungen sind durch Wasser kalt gehalten. Die 48 cm lange Kathode der Röhre I ragte hier 25 mm aus der Specksteinhülse und war 20 mm vom Ende der Anode entfernt. Die kurze Kathode der Röhre II trat wieder nur 6 mm aus der Specksteinplatte hervor und hatte denselben Abstand (20 mm) von der Anode.

Tabelle XIX.

Spannkraft des Stickstoffes 1,4 mm. Temperatur 15° C.

r. des Versuches . . .	1.		2.		3.	
hl der Elemente . . .	240		300		300	
inge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		100		50	
ihre	I	II	I	II	I	II
lenk. des Galv. II (von 2 × 14 cm Rheost.) . .	33,5	20—16	75,5	27,5	138	32
ttlere Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	1363	732	3073	1119	5617	1302
sschl. des Galv. I von ler Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	59	65—67	57	81	60	84
nge des Glimml. in cm	2,5	0,6	10+2,5	0,9	14+2,4	0,6

. des Versuches . . .	4.		5.		6.		7.	
hl der Elemente . . .	300		400		500		600	
nge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	0		0		0		0	
ihre	I	II	I	II	I	II	I	II
lenk. des Galv. II (von 2 × 2 cm Rheost.) . . .	185-165	8	300-280	12	405-360	15	425-420	20-19
ttlere Stromstärke $i \cdot 10^6$ n A.-E.	37975	1736	62930	2604	83002	3255	91682	4232
sschl. des Galv. I von ler Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	78	89-90	90-92	119	107	144,5	120-123	165-167
nge des Glimml. in cm	48 ganz	0,6	48 ganz	0,6	48 ganz	0,6	48 ganz	0,6

Nur wenige Bemerkungen sind zur Erklärung der Tabelle nöthig. Die starken Ströme, welche die Tauchbatterie nach Entfernung der Widerstandssäule in der Gasstrecke

mit langer Kathode gab, erfreuten sich keiner grossen Constanz, da die Lösung durch längere Benutzung etwas arm an Chromsäure geworden war.

Das Verhalten der beiden Kathoden entspricht dem früher § 5 gefundenen. Erst in Nr. 7 brachte das Glimmlicht, welches bereits in Nr. 4 auf der ganzen Länge der Kathode in Röhre I erschien, den Platindraht von 1,6 mm Dicke zum schwachen Glühen.

In der Röhre mit kurzer Kathode blieb die Spannungsdifferenz stets wenig unterhalb derjenigen, welche die benutzte Zahl von Elementen besass; infolge davon war die Stromstärke stets gering, auch wenn die Bahn keine Widerstandssäule enthielt. Das Glimmlicht strahlte hier in Nr. 6 bis zur Glaswand. Positives Licht war nur auf der Oberfläche der Anode. Ein dunkler Raum trennte dasselbe stets vom Glimmlichte.

Der Durchgang des Stromes erfolgte in allen Versuchen von selbst, mit Ausnahme von Nr. 1, wo die Hülfe des Funkens nöthig war.

63. Die Versuche wurden bei der grösseren Spannkraft des Stickstoffes 7,5 mm wiederholt.

Der Durchgang des Stromes musste in beiden Röhren durch den Funken eingeleitet werden, solange die Elementenzahl unter 600 lag (Nr. 1—4). Bei dieser grösseren Dichte des Stickstoffes bleiben die Spannungsdifferenzen kleiner, wie in der vorigen Tabelle, und die Ströme werden infolge davon stärker.

Tabelle XX.

Spannkraft des Stickstoffes 7,5 mm.

Nr. des Versuches	1.		2.	
Zahl der Elemente	300		300	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		50	
Röhre	I	II	I	II
Ablenk. des Galv. II (von 2×14 cm Rheost.)	87	83	152	123
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	3541	3378	6186	5006
Ausschl. d. Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	53	56.5	57,5	64
Länge des Glimmlichtes in cm	1,5	0,6	2,5	0,6

(Fortsetzung von Tabelle XX.)

Nr. des Versuches	3.		4.
Zahl der Elemente	300		400
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	0		0
Röhre	I	II	II
Ablenk. des Galv. II von 2 × 2 cm Rheost.)	358—340	44,5	55—49
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E. . . .	75733	9656	11284
Ausschl. d. Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	70—72	85	111
Länge des Glimmlichtes in cm . .	27	0,6	0,6

Nr. des Versuches	4.	5.	6.
Zahl der Elemente	400	600	800
			ganz eintauchend
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	0	0	0
Röhre	I	I	I
Ablenk. des Galv. II (von dem 4 mm dicken Platindraht abgezweigt) .	72—67	110—94	180—152
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E. . . .	99802	146 472	238 876
Ausschl. d. Galv. II von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d Electr.	75—78	78	85
Länge des Glimmlichtes in cm . .	30	36	38

Das Glimmlicht dehnt sich auch beim stärksten der benutzten Ströme (Nr. 6) nicht mehr über die ganze Länge der Kathode aus, ist aber beträchtlich heisser, wie in den dünneren Gasen. Schon bei 400 Elementen (Nr. 4) kam die lange Kathode, wenn kein Widerstand aufgenommen war, zum Gelbglühen, und noch heisser erschien sie in Nr. 5 und 6. Sie wurde aber noch nicht weissglühend.

64. Dieses erfolgte jedoch, als die Spannkraft des Stickstoffes auf 17,6 mm erhöht war.

Bei dieser Dichte des Stickstoffes war das blaue negative Glimmlicht kaum 1 mm dick. Es brachte bei den starken Strömen den Platindraht auf intensive Gelbglühhitze. Der Durchgang bedurfte stets der Hülfe des Funkens.

Mit Ausnahme des Versuches Nr. 6 der vorigen Tabelle waren die Elemente der Tauchbatterie nie bis über die Hälfte der Länge ihrer Kohlencylinder in die Chromsäurelösung

eingetaucht worden, um unnöthigen Verbrauch an Material zu vermeiden. Jetzt wurden sie aber in Nr. 3, um den Strom noch stärker zu erhalten, ganz eingetaucht.

Tabelle XXI.

Spannkraft des Stickstoffes 17,6 mm.
Es wurde nur Röhre I mit langer Kathode benutzt.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.
Zahl der Elemente	400	600	600 ganz eintauchend
Länge der JCd-Lösung	0	0	0
Ablenk. des Galv. II (von dem 4 mm dicken Platindraht abgezweigt) .	75—67	110—96	150
Mittlere Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	101 956	147 908	215 400
Ausschl. d. Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	72—73	76—78	80
Länge des Glimmlichtes in cm . .	13	16	

Infolge davon stellten sich neue Lichtverhältnisse ein, auf die ich bereits in der dritten Mittheilung aufmerksam gemacht habe. Unmittelbar nach Schluss des Stromes trat, wie früher, auf der Länge von etwa 17 cm der Kathode die ungefähr 1 mm dicke blaue Hülle Glimmlicht auf. Sie brachte den Draht zum starken Gelbglühen; dasselbe steigerte sich bald am unteren, der Anode nächsten Ende zum Weissglühen und Schmelzen des Drahtes.

Sowie diese hohe Temperatur eingetreten war, erblasste das blaue Glimmlicht daselbst und verschwand vollständig. Der Stickstoff strahlte hier kein erkennbares Licht aus, während die entfernteren Stellen der Kathode, welche blos stark gelb glühten, eine schwach leuchtende blaue Hülle behielten.

Das abtropfende Platin zerstörte die Röhre; die Zahlen der Tabelle beziehen sich auf den Anfangszustand.

65. Die Temperatur, bei welcher das negative Glimmlicht des Stickstoffes verschwindet, liegt demnach wenig unterhalb des Schmelzpunktes des Platins. In meiner dritten Mittheilung benutzte ich, um diese wichtige Thatsache mit Musse

zu beobachten und das störende Abtropfen des Metalles zu verhindern, als Kathode einen 4 mm dicken Platindraht, welcher auch bei längerem Durchgange des stärksten Stromes, den die damals vorhandenen 1600 Elemente, hintereinander verbunden, lieferten, nur am unteren Ende zu schmelzen begann.

Es war aber in hohem Grade wünschenswerth, noch stärkere Ströme benutzen zu können, um die Temperatur noch weiter zu steigern. Kohle, welche sich zunächst für die Electrode darbietet, ist nicht geeignet, da sie, wie wir unten sehen werden, die Erscheinung nicht rein hervortreten lässt.

Wie ich bereits an einer anderen Stelle[1]) mitgetheilt, verschaffte ich mir durch Vermittlung der Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a/M. aus der Platinschmelze von Johnson, Matthey et C. in London zwei prismatische Stäbchen aus reinem geschmolzenem Iridium und benutzte sie als Electroden. Ihr Querschnitt ist ein gleichseitiges Dreieck von 3 mm Seite, ihre Länge beträgt 6 cm. Sie wurden in dicken Messingdrähten befestigt und in eine 6 cm weite Glasröhre, wie Fig. 11 zeigt, eingekittet. Eine dünne Speicksteinplatte ist vor die Befestigungsstelle jedes Stäbchens gelegt und verhindert die Berührung der heissen Gase mit der Glasröhre, welche über jeden Messingdraht geschoben ist. Nur die Iridiumstäbchen hatten ihre Oberfläche unbedeckt und zwar auf der Länge von 48 mm. Die Kittung wurde durch kaltes Wasser dicht gehalten.

66. Solange die Dichte des Stickstoffes gering ist, bleibt wieder die Intensität des Stromes, auch wenn kein Widerstand neben der Gasstrecke aufgenommen ist, verhältnissmässig klein, da die Gashülle um die Kathode alsdann eine grosse Spannungsdifferenz in Anspruch nimmt. Die Iridiumelectroden unterscheiden sich hierin nicht von den anderen Metallen, obgleich sie die Wärme schlechter leiten. Es möge genügen, dies durch eine Versuchsreihe zu zeigen.

---

1) Hittorf, Wied. Ann. **119.** p. 73. 1883.

Tabelle XXII.

Spannkraft des Stickstoffes 1,35 mm. Abstand der Iridiumelectroden 25 mm:

Nr. des Versuches . .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Zahl der Elemente . .	300	300	300	300	400	600	800	1000
Länge in mm der JCd-Lösung (32 mm weit)	87	47	20	0	0	0	0	0
Abl. d. Galv.II (v. 2×2 cm Rheost.	32	40	50,5	89—50	100—65	125	180	230
Stromst. $i \cdot 10^6$ in A.-E.	6944	8680	10958	—	—	27125	39060	49910
Ausschl. d. Galv. I v. d. Lad. d. Condens. durch die Spann. d. Electr.	73	79	85	89	115	162	211	254

Bei 300 Elementen musste der Durchgang des Stromes durch den Funken eingeleitet werden; bei grösserer Anzahl der Elemente erfolgte er von selbst. In allen Versuchen war die Kathode auf der ganzen Länge mit Glimmlicht bedeckt.

In Nr. 4, wo die Widerstandssäule ganz entfernt war, entstand zuerst eine stärkere Ablenkung des Galvanometers II, die aber sogleich auf 50 abnahm. Ebenso verhielten sich in Nr. 5 noch 400 Elemente.

Das Glimmlicht, welches 600 Elemente, wenn kein Widerstand aufgenommen war, erzeugten, brachte den Iridiumstab zum Rothglühen; dasjenige der 800 und 1000 Elemente bewirkte bereits starkes Gelbglühen.

Die Anode war auf ihrem Ende mit positivem Licht bedeckt, blieb aber stets unter der Temperatur des Rothglühens.

67. In den sehr verdünnten Gasen bleibt also die Spannungsdifferenz der Gashülle um die metallische Kathode nur klein, und die Stromstärke kann nur gross erhalten werden, wenn das Glimmlicht auf der Oberfläche sich genügend ausdehnen kann. Dann ändert sich aber die Temperatur dieser Gashülle mit der Zunahme der Stromstärke so gut wie gar nicht. Wird das Glimmlicht hier auf eine kleine Fläche beschränkt, so ist eine bedeutende Zunahme der Strom-

intensität durch die rasch wachsende Spannungsdifferenz verhindert.

Wenn man daher nicht über eine ausserordentlich grosse Zahl von galvanischen Elementen verfügt, so bleibt kein anderer Weg übrig, um beides, sowohl die Stromstärke wie die Temperatur der Gashülle um die Kathode bedeutend zu steigern, als dem Gase grössere Dichten zu geben. Die Spannungsdifferenz der Electroden wird alsdann, wie wir sehen werden, klein. Um möglichst starke Ströme zu erhalten, ist es daher nicht mehr praktisch, die Zahl der Elemente zu vermehren.

Weit vortheilhafter wird es, den inneren Widerstand der Kette zu verringern, mit anderen Worten, die Dimensionen der Elemente zu vergrössern. Ich habe für diese Verhältnisse die 2400 Elemente, welche mir zur Verfügung stehen, in Reihen getheilt und diese nebeneinander für die Gasstrecke benutzt. In den Tabellen drücke ich die gebrauchte Combination durch Anwendung des Multiplicationszeichens aus. Durch 200×3 z. B. soll bezeichnet werden, dass drei Reihen, jede aus 200 hintereinander verbundenen Elementen bestehend, nebeneinander lagen und ihre Ströme gleichzeitig durch die Gasstrecke sandten, oder was auf dasselbe hinauskommt, dass 200 Elemente, von denen jedes einen dreimal kleineren Widerstand besass, benutzt wurden.

Tabelle XXIII.

Spannkraft des Stickstoffes 9,95 mm. Abstand der Iridiumelectroden 15 mm.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.
Zahl der Elemente	200×1 200×2	200×3	400×2
Länge der JCd-Lösung	0	0	0
Ablenk. d. Galv. II (vom (*a*) Cu-Draht abgezweigt)	0	7	—
Stromstärke J in A.-E.	—	0,07	
Ausschlag des Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	0	57—55	92—30—100

Der Abstand der Electroden war 15 mm, und der obere Stab diente stets als Kathode. Als blos eine und zwei

Reihen von 200 Elementen eingetaucht waren, bewirkte der Funke noch nicht den stetigen Durchgang. Letzterer trat erst ein, als 3 Reihen nebeneinander benutzt wurden. Das Glimmlicht brachte die Iridiumkathode nur bis zum Rothglühen. Der Strom blieb schwach, weil die Spannungsdifferenz der Electroden wenig unter derjenigen, welche die Kette selbst hat, lag. Er wurde auch daher nicht stärker, als 4 und 5 Reihen nebeneinander benutzt wurden.

Erst zwei Reihen von 400 Elementen bewirkten dies. Als der Funke den Durchgang veranlasst hatte, verband zuerst positives Licht, ohne einen dunklen Raum zu lassen, die Anode mit einer punktförmigen Stelle des negativen Iridiumstabes, die an seinem entferntesten Ende dicht neben der Specksteinplatte lag und weissglühend war. Dieser Durchgang erzeugte einen bedeutenden Ausschlag des Galvanometers II, dauerte aber nur wenige Augenblicke. Die ganze noch kalte Kathode bekleidete sich dann mit blauem Glimmlichte, das positive Licht verschwand im Abstande zwischen den Electroden ganz und blieb nur auf dem oberen Ende der Anode. Die Ablenkung des Galvanometers nahm ab, steigerte sich aber wieder in dem Maasse, als das heisse Glimmlicht die Kathode erhitzte. Mit eintretendem Weissglühen derselben verschwand das Glimmlicht vollständig; auch das Ende der Anode wurde stark glühend. Diese Hitze machte bald eine Menge der Gase, welche in den zum ersten mal so stark erhitzten Iridiumstäben occludirt waren, frei und liess die Spannkraft über 30 mm steigen. Die Stromstärke sank zum zweiten mal. Die aufgezählten Veränderungen folgten sich so rasch, dass der Magnet des Galvanometers II nicht zur Ruhe kam; daher konnten die Ablenkungen nicht bestimmt werden; nur die Spannungsdifferenzen der Electroden wurden beobachtet. Die Zahl 92 entspricht dem Zustande, bei welchem die kalte Kathode von Glimmlicht ganz bedeckt war. Die Zahl 30 wurde während des starken Weissglühens der Kathode erhalten und endlich die Zahl 100, als der Strom durch die entwickelten Gase sehr abgenommen hatte.

68. Die Glasröhre wurde leergepumpt und mit frischem Stickstoff gefüllt.

in Röhre III nöthige Spannungsdifferenz beinahe diejenige von 600 Elementen; 500 Elemente versagten, auch bei Benutzung des Funkens. Nur bei dieser Dichte liess sich noch mit dem Condensator die Spannungsdifferenz der Electroden in dieser Röhre bestimmen. Bei weiter gehender Verdünnung ist die Entladung der galvanischen Kette hier nicht mehr stetig, sondern intermittirt. Der Charakter ändert sich vollständig, indem feine Metallfünkchen in grosser Zahl im Zwischenraume übergehen. Dem Geräusche, welches sie erzeugen, entspricht genau ein solches im Telephon. Die Fünkchen lassen deutliche Spuren auf dem Platin zurück. Um sie wahrzunehmen, hatte ich in einem anderen Versuche statt des geschlossenen Cylinders (*a*) einen Draht in Spiralwindungen um die Kathode gelegt und als Anode benutzt. Auch liessen sich dieselben gut erkennen, als zwei kreisrunde Metallplatten im Abstande von 1 mm in einer Glasröhre aufgestellt waren und als Electroden eines genügend verdünnten Gases dienten.

59. Das in den zwei letzten Tabellen niedergelegte Verhalten contrastirt so stark, wie möglich, mit der Vorstellung, welche die herrschende Theorie der electrischen Fluida von dem Funken hat. Dieselbe lässt bekanntlich die getrennten beiden Fluida, welchen sie die Oberflächen der Electroden als Sitze anweist, durch die Kräfte, welche aus der Abstossung der gleichnamigen und der Anziehung der ungleichnamigen Theilchen resultiren, den Druck des umgebenden Mediums überwinden und in dem Funkencanale, aus dem die Luft zurückgedrängt ist, zur Wiedervereinigung gelangen. Je kleiner der Abstand der Electroden, je dünner das umgebende Medium, desto leichter müsste dieser Vorgang erfolgen. Statt dessen finden wir gerade entgegengesetzt, dass eine um so grössere Spannungsdifferenz in Anspruch genommen wird, je mehr der Abstand der Electroden und der Druck des Gases sich vermindern.

§ 7. Verhalten der die Kathode umgebenden Gashülle bei grösserer Dichte.

60. In den Versuchen von § 5 blieb bei den kleinen dort benutzten Dichten der Gase die Spannungsdifferenz des

negativen Glimmlichtes, wie auch die Stromstärke wuchs, fast constant, solange dasselbe über die Oberfläche der Kathode sich ausdehnen konnte. Dabei erhielten sich Ansehen, Dicke und wie wahrscheinlich, die Temperatur desselben unverändert. War aber die Ausbreitung über die Fläche der Kathode nicht mehr möglich, so steigerte sich mit der Zunahme der Stromstärke rasch seine Spannungsdifferenz, indem gleichzeitig Dicke und Temperatur wuchsen.

Die im ersten Falle mit wachsender Stromstärke hinzukommenden neuen Theile des Glimmlichtes bilden sich bei der benutzten Anordnung in immer grösserem Abstande von der Anode. Die leitende Verbindung mit letzterer wird durch die Gastheilchen des umhüllenden dunklen Raumes, durch die sogenannte dunkle Entladung unterhalten, die sich sehr gut dazu eignet, da sie, wie wir § 4 feststellten, weit kleinere Spannungsdifferenzen unter gleichen Verhältnissen in Anspruch nimmt, wie die leuchtende positive.

61. Das Verhalten wird ein wesentlich anderes bei grösseren Dichten der Gase. Um die Intensität der Ströme genügend steigern zu können, musste das Aluminium, welches wir bis jetzt meistens benutzten, und welches das heisser werdende Glimmlicht alsdann geschmolzen hätte, durch das schwerflüssige Platin ersetzt werden. Nur wenn Electroden aus solchem Metall von genügender Dicke genommen werden, lassen sich Ströme von der grössten Stärke, welche meine galvanischen Elemente liefern können, durch die Gase dauernd leiten. Bis jetzt war fast immer eine längere oder kürzere Säule der schlechtleitenden Jodcadmiumlösung in dem Schliessungsbogen aufgenommen und dadurch wurden die grossen Stromintensitäten ausgeschlossen.

62. Als Uebergang zu den Versuchen mit grösseren Gasdichten und um den Unterschied besser hervortreten zu lassen, wollen wir zuerst noch die stärksten Ströme, welche meine Elemente, hintereinander verbunden, bei Ausschaltung der Widerstandssäule liefern, durch Stickstoff von kleiner Spannkraft verfolgen.

Dieselben beiden Glasröhren von $5^1/_2$ cm Durchmesser (Fig. 6) wurden in gleicher Anordnung wie früher, § 5, be-

differenz waren ungefähr dieselben; ebenso verliefen die Lichterscheinungen, wie früher.

70. Es hatte grosses Interesse, zu untersuchen, ob die anderen Gase dem Stickstoff sich gleich verhalten und ihr Leuchten bei hinreichend hoher Temperatur verlieren. Mit Gasen, wie OO, Cl Cl etc., welche sich mit dem Iridium alsdann verbinden, ist der Versuch nicht ausführbar. Es bleiben blos HH und CO als geeignete übrig.

71. Tabelle XXV.

Versuche mit Wasserstoff. Abstand der Iridiumelectroden 15 mm. Widerstandssäule ausgeschlossen.

Nr. des Versuches . .	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Spannkr. des HH in mm	20	33,8	47,05	47,05	47,05	68,55
Zahl der Elemente . .	400 × 6	400 × 6	400 × 6	600 × 4	800 × 3	800 × 3
Abl. des Galv. II (vom (*b*) Cu-Draht abgezw.)	80	52—47	45	150—120	170—120	120
Mittlere Stromstärke J (in A.-E.)	0,5465	0,3415	0,3074	0,9222	0,9905	0,8197
Ausschl. d. Galv. I v. d. Ladung des Condens. durch d. Sp. d. Electr.	100	107—108	110	100—110	107—110	110

In allen Versuchen der Tabelle musste der Durchgang des Stromes durch den Funken eingeleitet werden.

In Nr. 1 erstreckte sich anfangs bläuliches, positives, ungeschichtetes Licht von der Anode bis zu einer in der Nähe des Specksteins liegenden, weissglühenden, kleinen Stelle der Kathode. Diesem Zustande entsprach die grösste Stromstärke. Als die Kathode durch das Glimmlicht gelbglühend geworden, nahm der Streifen positives Licht einen kleineren Querschnitt an und wurde geschichtet; dann verschwand er. Die Hülle Glimmlicht, welche die Kathode nicht bis zum Weissglühen brachte, blieb durch einen dunklen Raum vom positiven Licht auf der Anode getrennt. Letztere kam noch nicht ins Glühen. Die Zahlen der Tabelle gehören diesen Verhältnissen an.

Bei den grösseren Dichten des HH (Nr. 2 und 3) brachte die heisse Hülle die Kathode zum Weissglühen auf etwa $^3/_4$ ihrer Länge, obgleich die Stromstärke kleiner war. Das blosse Auge konnte kein Glimmlicht mehr erkennen. Das

mit langer Kathode gab, erfreuten sich keiner grossen Constanz, da die Lösung durch längere Benutzung etwas arm an Chromsäure geworden war.

Das Verhalten der beiden Kathoden entspricht dem früher § 5 gefundenen. Erst in Nr. 7 brachte das Glimmlicht, welches bereits in Nr. 4 auf der ganzen Länge der Kathode in Röhre I erschien, den Platindraht von 1,6 mm Dicke zum schwachen Glühen.

In der Röhre mit kurzer Kathode blieb die Spannungsdifferenz stets wenig unterhalb derjenigen, welche die benutzte Zahl von Elementen besass; infolge davon war die Stromstärke stets gering, auch wenn die Bahn keine Widerstandssäule enthielt. Das Glimmlicht strahlte hier in Nr. 6 bis zur Glaswand. Positives Licht war nur auf der Oberfläche der Anode. Ein dunkler Raum trennte dasselbe stets vom Glimmlichte.

Der Durchgang des Stromes erfolgte in allen Versuchen von selbst, mit Ausnahme von Nr. 1, wo die Hülfe des Funkens nöthig war.

63. Die Versuche wurden bei der grösseren Spannkraft des Stickstoffes 7,5 mm wiederholt.

Der Durchgang des Stromes musste in beiden Röhren durch den Funken eingeleitet werden, solange die Elementenzahl unter 600 lag (Nr. 1—4). Bei dieser grösseren Dichte des Stickstoffes bleiben die Spannungsdifferenzen kleiner, wie in der vorigen Tabelle, und die Ströme werden infolge davon stärker.

Tabelle XX.

Spannkraft des Stickstoffes 7,5 mm.

Nr. des Versuches	1.		2.	
Zahl der Elemente	300		300	
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	100		50	
Röhre	I	II	I	II
Ablenk. des Galv. II (von 2×14 cm Rheost.)	87	83	152	123
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	3541	3378	6186	5006
Ausschl. d. Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	53	56,5	57,5	64
Länge des Glimmlichtes in cm	1,5	0,6	2,5	0,6

(Fortsetzung von Tabelle XX.)

Nr. des Versuches	3.		4.
Zahl der Elemente	300		400
Länge in mm d. JCd-Lös. (17 mm)	0		0
Röhre	I	II	II
Ablenk. des Galv. II von 2 × 2 cm Rheost.)	358—340	44,5	55—49
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	75733	9656	11284
Ausschl. d. Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	70—72	85	111
Länge des Glimmlichtes in cm	27	0,6	0,6

Nr. des Versuches	4.	5.	6.
Zahl der Elemente	400	600	800 ganz eintauchend
Länge in mm d. JCd-Lös (17 mm)	0	0	0
Röhre	I	I	I
Ablenk. des Galv. II (von dem 4 mm dicken Platindraht abgezweigt)	72—67	110—94	180—152
Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	99802	146472	238376
Ausschl. d. Galv. II von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d Electr.	75—78	78	85
Länge des Glimmlichtes in cm	30	36	38

Das Glimmlicht dehnt sich auch beim stärksten der benutzten Ströme (Nr. 6) nicht mehr über die ganze Länge der Kathode aus, ist aber beträchtlich heisser, wie in den dünneren Gasen. Schon bei 400 Elementen (Nr. 4) kam die lange Kathode, wenn kein Widerstand aufgenommen war, zum Gelbglühen, und noch heisser erschien sie in Nr. 5 und 6. Sie wurde aber noch nicht weissglühend.

64. Dieses erfolgte jedoch, als die Spannkraft des Stickstoffes auf 17,6 mm erhöht war.

Bei dieser Dichte des Stickstoffes war das blaue negative Glimmlicht kaum 1 mm dick. Es brachte bei den starken Strömen den Platindraht auf intensive Gelbglühhitze. Der Durchgang bedurfte stets der Hülfe des Funkens.

Mit Ausnahme des Versuches Nr. 6 der vorigen Tabelle waren die Elemente der Tauchbatterie nie bis über die Hälfte der Länge ihrer Kohlencylinder in die Chromsäurelösung

eingetaucht worden, um unnöthigen Verbrauch an Material zu vermeiden. Jetzt wurden sie aber in Nr. 3, um den Strom noch stärker zu erhalten, ganz eingetaucht.

Tabelle XXI.

Spannkraft des Stickstoffes 17,6 mm.
Es wurde nur Röhre I mit langer Kathode benutzt.

Nr. des Versuches	1.	2.	3.
Zahl der Elemente	400	600	600 ganz eintauchend
Länge der JCd-Lösung	0	0	0
Ablenk. des Galv. II (von dem 4 mm dicken Platindraht abgezweigt) .	75—67	110—96	150
Mittlere Stromstärke $i \cdot 10^6$ in A.-E.	101 956	147 908	215 400
Ausschl. d. Galv. I von d. Ladung d. Condens. durch d. Spann. d. Electr.	72—73	76—78	80
Länge des Glimmlichtes in cm . .	13	16	

Infolge davon stellten sich neue Lichtverhältnisse ein, auf die ich bereits in der dritten Mittheilung aufmerksam gemacht habe. Unmittelbar nach Schluss des Stromes trat, wie früher, auf der Länge von etwa 17 cm der Kathode die ungefähr 1 mm dicke blaue Hülle Glimmlicht auf. Sie brachte den Draht zum starken Gelbglühen; dasselbe steigerte sich bald am unteren, der Anode nächsten Ende zum Weissglühen und Schmelzen des Drahtes.

Sowie diese hohe Temperatur eingetreten war, erblasste das blaue Glimmlicht daselbst und verschwand vollständig. Der Stickstoff strahlte hier kein erkennbares Licht aus, während die entfernteren Stellen der Kathode, welche blos stark gelb glühten, eine schwach leuchtende blaue Hülle behielten.

Das abtropfende Platin zerstörte die Röhre; die Zahlen der Tabelle beziehen sich auf den Anfangszustand.

65. Die Temperatur, bei welcher das negative Glimmlicht des Stickstoffes verschwindet, liegt demnach wenig unterhalb des Schmelzpunktes des Platins. In meiner dritten Mittheilung benutzte ich, um diese wichtige Thatsache mit Musse

zu beobachten und das störende Abtropfen des Metalles zu verhindern, als Kathode einen 4 mm dicken Platindraht, welcher auch bei längerem Durchgange des stärksten Stromes, den die damals vorhandenen 1600 Elemente, hintereinander verbunden, lieferten, nur am unteren Ende zu schmelzen begann.

Es war aber in hohem Grade wünschenswerth, noch stärkere Ströme benutzen zu können, um die Temperatur noch weiter zu steigern. Kohle, welche sich zunächst für die Electrode darbietet, ist nicht geeignet, da sie, wie wir unten sehen werden, die Erscheinung nicht rein hervortreten lässt.

Wie ich bereits an einer anderen Stelle[1]) mitgetheilt, verschaffte ich mir durch Vermittlung der Gold- und Silberscheideanstalt in Frankfurt a/M. aus der Platinschmelze von Johnson, Matthey et C. in London zwei prismatische Stäbchen aus reinem geschmolzenem Iridium und benutzte sie als Electroden. Ihr Querschnitt ist ein gleichseitiges Dreieck von 3 mm Seite, ihre Länge beträgt 6 cm. Sie wurden in dicken Messingdrähten befestigt und in eine 6 cm weite Glasröhre, wie Fig. 11 zeigt, eingekittet. Eine dünne Speicksteinplatte ist vor die Befestigungsstelle jedes Stäbchens gelegt und verhindert die Berührung der heissen Gase mit der Glasröhre, welche über jeden Messingdraht geschoben ist. Nur die Iridiumstäbchen hatten ihre Oberfläche unbedeckt und zwar auf der Länge von 48 mm. Die Kittung wurde durch kaltes Wasser dicht gehalten.

66. Solange die Dichte des Stickstoffes gering ist, bleibt wieder die Intensität des Stromes, auch wenn kein Widerstand neben der Gasstrecke aufgenommen ist, verhältnissmässig klein, da die Gashülle um die Kathode alsdann eine grosse Spannungsdifferenz in Anspruch nimmt. Die Iridiumelectroden unterscheiden sich hierin nicht von den anderen Metallen, obgleich sie die Wärme schlechter leiten. Es möge genügen, dies durch eine Versuchsreihe zu zeigen.

---

1) Hittorf, Wied. Ann. **119.** p. 73. 1883.

Kohle gegenüber den Metallen besitzt, gibt sie das günstigste Material für die Bogenentladung ab. Ich konnte letztere auch bei Spannkräften der Gase von 1 mm durch Benutzung von Kohleelectroden erhalten, wenn ich in meine Tauchbatterie ohne Einschaltung eines Widerstandes die Gasstrecke aufnahm. Es erzeugt sich dann auf der Kathode eine stark weissglühende, fast punktförmige Stelle, auf welche kein dunkler Raum folgt, sondern welche durch positives Licht mit der Anode verbunden ist. Gewöhnlich ändert jener heisse Punkt auf der Oberfläche der Kathode fortwährend seine Lage, ohne dass die ganze Kathode sich erwärmt und mit Glimmlicht bedeckt, vorausgesetzt, dass die Stromstärke gross genug bleibt. Alle Metalle, die ich als Electroden benutzt habe, auch das am schlechtesten leitende Iridium geben bei diesen geringen Dichten der Gase nur die Glimmentladung. Das Iridium gibt, wie wir in den vorangehenden Nummern gesehen, jene Bogenentladung nur bei grösserer Dichte und auch hier blos im Anfange, wenn der Strom am stärksten ist.

Die Kohle verdampft an der heissen punktförmigen Stelle der Kathode, und es zeigt sich hier das Swan'sche Spectrum.

Wird die Dichte der Gase unter 1 mm weiter erniedrigt, so wird auch für die Kohleelectrode die Bogenentladung unmöglich, und Glimmlicht bedeckt die Kathode. Ebenso tritt letzteres bei grösseren Gasdichten auf, wenn durch Einschaltung von Widerständen die Zuführung von Energie durch den Strom so geschwächt wird, dass jene weissglühende Stelle nicht bestehen kann.

Wenn man das Verhalten starker Ströme mit Electroden von Kohle untersuchen will, darf man nicht Stickstoff als Gas benutzen. Denn die Spannkraft des Stickstoffes vermindert sich beim Durchgang der starken Ströme rasch und stetig. Wahrscheinlich tritt eine Verbindung des Stickstoffes mit der Kohle zu Cyan ein, das in Paracyan übergeht und in dem schwarzen Absatze auf der Glaswand sich befinden muss. Ich habe keine genauere Untersuchung über diesen Vorgang noch angestellt, da ich die chemischen Verän-

derungen, welche die stetigen galvanischen Ströme bewirken, im Zusammenhange später bearbeiten will.

Das für Kohleelectroden geeignete Gas ist Wasserstoff. Bei Spannkräften zwischen 10 mm und 2 mm gibt dasselbe in dem Glasgefässe (Fig. 11) bei starken Strömen eigenthümlich geschichtetes positives Licht, welches ich mit metallischen Electroden nur in der Umgebung des negativen Glimmlichtes erhalten habe. Die hellen Schichten sind nämlich nicht auf dem ganzen Querschnitt der Röhre, wie sonst, leuchtend, sondern bilden leuchtende Ringe, deren Inneres dunkel ist. Sie umgeben sowohl das obere Ende der Anode, wie den Zwischenraum und die Kathode bis zu ihrer punktförmigen heissen Stelle. (Siehe Fig. 11_b.)

Bei grösserer Dichte des Gases bringen starke Ströme auf der Anode eine ausgedehntere Fläche zum Weissglühen, wie auf der Kathode, welche nur auf jenem kleinen Fleck intensiv heiss wird. Gleichzeitig vermindert sich die Spannungsdifferenz noch stärker, wie bei den Iridiumelectroden. Hieraus erklärt sich die allbekannte Thatsache, dass eine Anzahl grosser galvanischer Elemente, deren Spannungsdifferenz nur diejenige, welche bei starker Weissglühhitze der Kohlen besteht, erreicht, keinen Strom liefern, solange der kleinste Abstand diese Electroden trennt. Um den Davy'schen Bogen zu erhalten, müssen die Kohlen entweder mit einander in Berührung gebracht und, nachdem sie weissglühend an ihren Enden geworden, getrennt werden, oder ein starker Funke muss in dem Abstande derselben jene hohe Temperatur auf einen Augenblick erzeugen.

§ 8. Folgerungen aus den bis jetzt erkannten Verhältnissen der electrischen Gasströme. Wird die Kathode mit ihrer Hülle auf Weissglühhitze versetzt, während die Anode und die übrigen Theilchen kalt bleiben, so vermögen wenige Bunsen'sche Elemente in den stark verdünnten Gasen stetige Ströme zu unterhalten.

75. In § 4 der dritten Mittheilung habe ich bereits die wichtige Thatsache hervorgehoben und ausführlich erörtert, dass die Gasmolecüle, welche den sogenannten positiven

Theil der Glimmentladung bilden, sie mögen leuchten oder dunkel bleiben, relativ geringe Temperaturerhöhungen erfahren, solange die Dichte des Stromes nicht sehr gross wird. Die Stetigkeit, welche die galvanische Kette dieser Entladung gibt, macht es nämlich möglich, die Glasröhre, in welcher sie stattfindet, wie in Fig. 5, als Lufthermometer zu gebrauchen und aus der geringen Zunahme der Spannkraft des darin enthaltenen Gases, wenn Ströme von mässiger Intensität seinen ganzen Querschnitt durchfluthen, mit Bestimmtheit auf die kleinen Temperaturerhöhungen desselben zu schliessen. Selbstverständlich wäre dieser Schluss nicht berechtigt, hätte ich intermittirende Ströme, wie diejenigen der Inductionsrolle oder der Influenzmaschine, zu jenen Versuchen benutzt.

Es wurde ferner festgestellt, dass die gewöhnlichen farblosen nichtmetallischen Gase, solange blos ihre Temperatur erhöht und kein anderer Vorgang zwischen ihren Molecülen veranlasst ist, bis weit über die Iridiumschmelzhitze hinaus noch kein vom Auge erkennbares Licht ausstrahlen.

Haben endlich diese Gase die Temperatur, bei welcher feste Körper weissglühen, angenommen, so bleiben sie, wie § 7 gezeigt hat, und § 10 noch specieller lehren wird, beim Durchgange electrischer Ströme, selbst wenn die Intensität derselben mehr als zwei Ampère beträgt, auf der ganzen Bahn dunkel, die Entwickelung sowohl des positiven, wie des negativen Lichtes findet nicht mehr statt.

Die Spectra erster Ordnung in den Geissler'schen Röhren, welche Plücker und ich früher beschrieben haben, müssen daher als Phosphorescenzlicht betrachtet werden. Dasselbe gilt von dem Lichte, das Flammen, welche keine festen und flüssigen Theilchen enthalten, ausstrahlen.

76. Man kann sich noch auf einem anderen Wege, der für Vorlesungszwecke geeigneter ist, von der Thatsache überzeugen, dass mit der Temperatur der Weissglühhitze die Spectra der ersten Ordnung in den gewöhnlichen Gasen aufhören.

Eine Glasröhre 6 cm weit (Fig. 12) enthielt in zwei seit-

lichen Tubulus dicke Kupferdrähte (*m* und *n*) eingekittet, zwischen welchen ein als Spirale gewundener Platindraht gespannt ist. In der Axe befanden sich zwei Aluminiumdrähte, welche die Electroden in gewöhnlicher Weise abgaben. Wenn nun das verdünnte Gas zwischen denselben durch Hindurchleiten eines passenden Stromes leuchtend geworden ist, lässt man die Platinspirale durch einen zweiten galvanischen Strom von wenigen grossen Elementen weissglühend werden. Die Kittung ist dabei leicht durch kaltes Wasser, welches um die Tubulusröhren in bekannter Weise geleitet wird, dicht zu halten.

Ist Luft oder Stickstoff das benutzte Gas, so verschwindet in der Umgebung der heissen Spirale das positive Licht, und eine breite dunkle Schicht bildet sich hier. Unterbricht man den Strom in der Spirale, so kehrt mit der Erkaltung das positive Licht zurück und ist bereits wieder vorhanden, wenn der Draht noch stark roth glüht.

Macht man die Spirale selbst zur Anode des Gasstromes, so ändert das positive Licht, welches ihre Oberfläche bedeckt, mit wachsender Temperatur des Drahtes seine rothgelbe Farbe in die blaue und verschwindet bei der Weissglühhitze ganz.

77. Ist in der Röhre Wasserstoff oder Kohlenoxydgas, so genügt die Weissglühhitze, welche Platin, ohne zu schmelzen, erträgt, nicht, um die letzten Spuren des Leuchtens zu entfernen. Man erkennt noch im Spectroskop, welches auf die Umgebung der Spirale gerichtet wird, schwache Linien der Gasspectra. Um eine höhere Temperatur zu erhalten, wurde Platin durch Kohle ersetzt.

Ich habe dieselbe in der Gestalt cylindrischer Stäbchen von 1 mm Durchmesser, welche E. Carré in Paris anfertigt, benutzt. Sie wurden an beiden Enden galvanisch verkupfert, dann hier verzinnt und als Brücke zwischen zwei Metallnäpfchen, welche die leichtflüssige Legirung von Zinn, Cadmium, Blei und Wismuth enthielten, gelegt. Die getroffene Anordnung veranschaulicht Fig. 13. Eine 6 cm weite, vertical gestellte Glasröhre war an dem oberen Ende etwas verengt, so dass

eine Glaskappe sich hier aufkitten liess. Diese Glaskappe hatte zwei Tubulusröhren, in welche zwei dicke Kupferdrähte (*m* und *n*) eingekittet waren. Letztere sind an dem unteren Ende zu Näpfchen ausgebohrt. Jedes Näpfchen besass einen Längsschlitz von der Weite, dass das Kohlenstäbchen eben hindurchging, und liess sich durch eine Schraube, welche bis zur Kohle reichte, von unten schliessen. In dieser Lage konnte die Kohle beim Durchgang des starken Stromes ungehindert ihre Dimensionen ändern und blieb doch in guter leitender Verbindung mit den Kupferdrähten durch die Legirung, welche bald flüssig wird. Die Kohle wurde nicht selten bis zum Verdampfen und Erweichen erhitzt und zeigte sich dann in Graphit verwandelt. Klemmt man das Kohlenstäbchen fest zwischen die Kupferdrähte, so erhält es beim Heisswerden einen Sprung, und eine Unterbrechung des Stromes tritt ein. Die Kittungen lassen sich leicht durch Wasser kalt und dicht halten.

An dem anderen Ende der weiten Glasröhre befand sich ein Aluminiumdraht (*a*), der als zweite Electrode des Gasstromes diente. Das Kohlenstäbchen entwickelt, wenn es zum ersten mal in dem verdünnten Raume weissglühend wird, viel Gas, welches durch die Pumpe zu entfernen ist. Dann bleibt es aber lange Zeit brauchbar, wenn man dafür sorgt, dass seine Temperatur nicht zu plötzlich gesteigert wird.

Die starken Ströme für die Erhitzung der Platinspirale und des Kohlenstäbchens lieferte mir eine Bunsen'sche Tauchbatterie von 16 grossen Elementen. Die Zinkplatte, von welcher jede Seite 200 qcm gross ist, liegt in jeder Zelle zwischen zwei Kohlenplatten von gleicher Fläche. Je nach dem Widerstande des Schliessungsbogens wurden diese Elemente verschieden combinirt. Um von dem Kohlenstäbchen, welches 25 mm lang war, den mittleren freiliegenden Theil (12 mm lang) möglichst hoch zu erhitzen, erwies sich am vortheilhaftesten, je zwei der grossen Elemente zu einem zu verbinden, also acht doppelt so grosse Elemente hintereinander zu benutzen.

Auf diese Weise lässt sich eine Weissglühhitze her-

stellen, bei welcher auch in den Gasen *HH* und *CO* das positive und negative Licht vollständig verschwindet und im Spectroskop keine Linie ihrer Spectra erkannt wird.

78. Ich habe etwas ausführlich bei diesen Versuchen verweilt, da bereits Angaben vorliegen, nach denen Stickstoff in einem Haarröhrchen von 0,85 mm Durchmesser noch bei einer Temperatur von 86600° C. sein Phosphorescenzspectrum zeigen soll.[1]) Diese gewaltige Temperatur wurde aus der Wärme, welche Inductionsströme hier entwickelten, durch Rechnung gefunden. Es wird dabei angenommen, die einzelne Entladung des Inductoriums sei von so verschwindend kleiner Dauer, dass während derselben die gesammte entwickelte Wärme in der winzigen Masse des Gascylinders bleibe, und keine Mittheilung an das Capillarrohr stattfinde. Wie unrichtig diese Grundlage des Calcüls ist, ergeben obige Thatsachen.

79. Dieselben sind eigentlich nicht neu, sondern bereits so lange bekannt, als das Davy'sche Bogenlicht, welches galvanische Elemente erzeugen, mit dem Spectroskop untersucht worden ist. Dasselbe zeigt nämlich nur die Spectra der Kohle oder der Metalle, welche als Electroden benutzt wurden; diejenigen der Luft oder der Gase, in welchen der Bogen stattfindet, treten nicht auf. Vor kurzem haben Liveing und Dewar[2]) mitgetheilt, dass sie bei einer Maschine von De Meritens im Flammenbogen, welcher im Wasserstoff gebildet war, die *C*- und *F*-Linie deutlich wahrgenommen, während in demjenigen einer Siemens'schen Maschine die Linie *C* nur beim Oeffnen und Schliessen sichtbar, und *F* kaum erkennbar war. Liessen sie einen Tropfen Wasser auf den Flammenbogen in Luft fallen, so entstand ein explosives Auftreten der Wasserstofflinie, die an verschiedenen Stellen sehr verschieden breit erschienen.

Ich habe keine Gelegenheit gehabt, den Davy'schen Bogen der mächtigen electrodynamischen Maschinen, welche

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 301. 1879.
2) Leveing und Dewar, Beibl. 7. p. 371. 1883.

heute zur Verfügung stehen und Stromstärken bis 300 A.-E.[1]) liefern, zu untersuchen. Die hohe Temperatur, in welcher die gewöhnlichen Gase ihr Linienspectrum (Spectrum zweiter Ordnung) ausstrahlen, ist am leichtesten durch die momentanen Ströme des genügend geladenen Condensators zu erhalten.

80. Wir wenden uns jetzt zur näheren Besprechung des negativen Lichtes bei der Glimmentladung und vergleichen sein Verhalten mit demjenigen des positiven.

Als charakteristisch für das Kathodenlicht tritt uns sogleich die bedeutende Grösse der Spannungsdifferenz, welche dasselbe für sich in Anspruch nimmt, entgegen. Wenn wir in den Tabellen des § 4 von der gesammten Spannungsdifferenz der Electroden der Gasstrecke diejenige des positiven Theiles in Abzug bringen, so bleibt überall ein beträchtlicher Rest, der oft den weit grösseren Theil ausmacht und daher ganz für die Bildung des negativen Lichtes nöthig wird.

Die Spannungsdifferenz derselben Strecke des positiven Lichtes erscheint in den Versuchen des § 4 von der Stromstärke innerhalb weiter Grenzen unabhängig. Diejenige des negativen Lichtes, welches seinen Querschnitt unverändert behält, indem es auf dieselbe Fläche der Kathode angewiesen ist, nimmt dagegen in einem verdünnten Gase mit der Stromstärke entschieden zu. Diese Zunahme erfolgt aber nicht, wie bei den Metallen und Electrolyten, in proportionalem Verhältnisse, sondern viel langsamer. Das Gesetz, welches dieselbe regelt, wird nicht einfach sein. Constant bleibt die Spannungsdifferenz des negativen Lichtes bei zunehmender Stromstärke nur dann, wenn es sich auf der Oberfläche der Kathode frei auszudehnen vermag. Es muss seinen Querschnitt so vergrössern können, dass die Stromdichte in demselben nicht geändert wird.

Die Spannungsdifferenz derselben Länge des positiven Lichtes nimmt fast proportional mit der Dichte des Gases

1) C. W Siemens, Compt. rend. **96.** p. 43. 1883.

ab, und erscheint um so kleiner, je verdünnter dasselbe sich herstellen lässt. Je kleiner die Zahl der Molecüle auf einer gegebenen Strecke ist, eine desto kleinere Spannungsdifferenz genügt, um die Polarisation oder den Bewegungszustand des einzelnen Theilchens so zu verändern, dass es ein Leiter wird.[1]) Das negative Glimmlicht verhält sich in dieser Hinsicht ganz anders. Wenn es seinen Querschnitt nicht vergrössern kann, sondern auf dieselbe Fläche der Kathode beschränkt ist, so wächst seine Spannungsdifferenz rasch mit der Verdünnung des Gases und erreicht zuletzt die ausserordentlichen Werthe, die wir § 4 und 5 und in der ersten Mittheilung fanden.

81. Der relativ grossen Spannungsdifferenz an der Kathode entspricht eine bedeutend grössere Wärmeentwickelung und Temperaturerhöhung in den Schichten des Glimmlichtes. Der Unterschied ist so gross, dass er ohne Messung im Versuche sich geltend macht und schon früh aufgefallen ist. Der negative Draht kommt bei Stromstärken bereits zum Glühen, bei welchen der positive nur eine geringe Temperaturerhöhung erfährt.

In den einzigen Messungen, welche mir hierüber bekannt sind, und welche die italienischen Physiker Naccari und Bellati[2]) mit dem Inductionsstrom eines Ruhmkorff'schen Apparates angestellt haben, war die Wärmeentwickelung an der Kathode nach der einen Versuchsreihe achtmal, nach der anderen 22,8 mal grösser, als die gleichzeitige an der Anode. Diese Bestimmungen müssen, wenn die Gesetzmässigkeiten hervortreten sollen, mit der galvanischen Kette vorgenommen und dabei sowohl die Spannungsdifferenz, wie die Stromstärke berücksichtigt werden. Bis jetzt habe ich noch nicht Musse gefunden, diese Studien zu beginnen.

82. Eine Folge der hohen Temperatur, welche das Gas an der Oberfläche der Kathode schon bei mässiger Stromstärke annimmt, ist die allbekannte Thatsache, dass Theilchen dieser Oberfläche verflüchtigt und auf die umgebende

1) Conf. Faraday, Experim. Research. (12) Nr. 1375. p. 438. 1888.
2) Naccari und Bellati, Beibl. 2. p. 720. 1878.

Glaswand abgelagert werden. Die Metallspiegel, welche so entstehen, sind keineswegs, wie vielfach, insbesondere von Crookes angenommen wird, durch eine Abstossung bedingt. Denn die meisten Metalle verdampfen unter dem geringen Drucke der Gase, noch ehe sie Glühtemperatur angenommen haben. Platin erzeugt einen Spiegel, wenn die oben erwähnte Spirale von dem durchgeleiteten Strome in den verdünnten Gasen gelbglühend wird.

Das Aluminium, welches gewöhnlich keine Absätze gibt und daher mit Vorliebe als Kathode bei der Glimmentladung benutzt wird, verdankt dieses Verhalten allein seiner Schwerflüchtigkeit. Bei Benutzung der Tauchbatterie lässt sich aber ein so heisses Glimmlicht erhalten, dass auch dieses Metall einen Spiegel auf der Glaswand absetzt. Man braucht nämlich nur eine genügende Zahl von Elementen, ohne Jodcadmiumlösung aufzunehmen, blos durch die Gasstrecke zu schliessen. Ein cylindrisches Glasgefäss mit HH von 2 bis 3 mm Spannkraft enthielt in der Axe der Kathode einen 2 mm dicken Draht von Aluminium, welcher vertical im höchsten Theile lag, und dessen Kittung durch Wasser dicht gehalten war. Als 1000 Elemente direct mit den Electroden der Röhre verbunden wurden, bedeckte sich die Kathode mit Glimmlicht von prächtig meergrüner Farbe und erzeugte einen dicken grauen Spiegel auf der Glaswand. Das positive Licht, welches hier geschichtet war, wurde nicht mehr durch einen dunklen Raum vom Glimmlicht getrennt, sondern seine Schichten setzten sich als leuchtende Ringe, wie früher beschrieben, neben letzterem fort. Man hat nur eben Zeit, die schöne Lichterscheinung wahrzunehmen, da nach wenigen Secunden die Kathode abtropft und den Durchgang unterbricht.

83. Der experimentelle Beweis, mit dem Crookes seine Auffassung, dass an der Oberfläche der Kathode die Theilchen derselben und des Gases abgestossen und geradlinig fortgeschleudert werden, zu begründen gesucht hat, ist nicht stichhaltig. Das Radiometer mit den Aluminiumplatten, welche auf der einen Seite unbedeckt, auf der anderen mit Glimmer belegt sind, rotirt nämlich, wenn auf seiner freien Oberfläche negatives Glimmlicht hervorgerufen wird, nicht

durch den Rückstoss, sondern durch die starke Erwärmung, welche letzteres bewirkt. Davon überzeugt man sich leicht, wenn man das Radiometer, solange Glimmlicht seine Flügel bedeckt, an der Rotation hindert und erst nach Unterbrechung des electrischen Stromes frei lässt. Ich erreiche dies einfach durch ein kleines magnetisirtes Stahlstäbchen, welches in der Glocke des Radiometers an einem Faden von dem durch den oberen Tubulus gehenden positiven Drahte herabhängt. In senkrechter Lage legt es sich gegen einen Flügel des Radiometers und verhindert die Drehung. Hat der Strom unter diesen Verhältnissen einige Augenblicke Glimmlicht auf den Flügeln unterhalten, so wird er unterbrochen und durch einen äusseren Magnet das Stahlstäbchen vorsichtig, ohne dass es einen Stoss ertheilen kann, weggehoben. Das Radiometer setzt sich dann, von Glimmlicht frei, in schnelle Rotation, die lange andauert und nur in dem Maasse, als die Erkaltung zunimmt, sich verlangsamt.

84. In meiner ersten Mittheilung (p. 23) habe ich bereits auf die Veränderungen, welche das Aluminium durch das negative Licht der gewöhnlichen Glimmentladung erfährt, aufmerksam gemacht. Obgleich es bei derselben nicht verdampft, wird seine Oberfläche doch eigenthümlich aufgelockert, zu feinen Spitzen und Haaren ausgezogen. Diese dienen vorzugsweise als Ausgangspunkte der Kathodenstrahlen; sie werden in ihren letzten Enden glühend und erscheinen als zahllose wimmelnde Lichtpünktchen. An diesen Stellen ist die Ableitung der Wärme in die Metallmasse der Kathode erschwert und dadurch die Bildung und Erhaltung der heissen Gashülle erleichtert. Infolge davon nehmen gebrauchte, an der Oberfläche aufgelockerte Aluminiumdrähte eine kleinere Spannungsdifferenz unter denselben Verhältnissen für das Glimmlicht in Anspruch, wie frische. Aluminiumdrähte, welche nur als Anode gedient, zeigen solche Veränderungen nicht. Bei den anderen Metallen unterstützt die Verdampfung die Auflockerung der Oberfläche.

85. Man kann sich leicht direct überzeugen, dass, je näher eine Schicht des Glimmlichtes der Kathode liegt, desto grösser die Wärmeentwicklung in derselben ist. Bei stärkerer

Verdünnung nimmt nämlich jede der drei Schichten, welche das Auge an demselben unterscheidet, eine Dicke an, welche für die Aufnahme von Thermometer, mit engem cylindrischen Quecksilberbehälter, genügenden Raum bietet.

Eine Glasröhre (Fig. 14) bestand aus zwei Theilen, welche in der Weite (6 cm) etwas verschieden, sich ineinander schieben und zusammenkitten liessen. Sie enthielten zwei kreisförmige Kupferplatten (a und c) als Electroden, welche den ganzen Querschnitt der Röhre einnahmen und bei hinreichender Verdünnung des Gases auf den gegenüberstehenden Flächen sich ganz mit Licht bedeckten. Damit kein Glimmlicht auf der abgewendeten Fläche der Kathode entstehen konnte, war dieselbe mit einem Glimmerblatte hier bedeckt. Es besassen so positives und negatives Licht denselben Querschnitt und in jedem Punkte die nämliche Dichte des Stromes. Drei möglichst gleiche Thermometer waren in Tubulusröhren eingekittet. Das eine (1) befand sich mit seinem Behälter möglichst nahe der Kathode, ohne sie zu berühren, das zweite (2) lag in der äusseren, hellsten Schicht des Glimmlichtes, während das dritte (3) vom positiven Licht umspült wurde. Stets veränderte das Thermometer (1) seinen Stand am stärksten; viel weniger steigt in derselben Zeit Thermometer (2) und noch weniger Thermometer (3). Die Unterschiede sind um so grösser, je stärkere Ströme für die Glimmentladung benutzt werden.

86. Diesem Unterschiede in der Wärmeentwicklung entspricht ein solcher in dem Gefälle der Spannungen der verschiedenen Schichten des Glimmlichtes. Wir verstehen mit Ohm unter dem Gefälle den Differentialquotienten aus der Aenderung der Spannung in diejenige der Länge oder Dicke der Schicht oder die Spannungsdifferenz für die Dickeneinheit. In jener Röhre (Fig. 14_a) wurden die Thermometer (1) und (2) durch dünne Drähte von Platin (bd) ersetzt, welche als Sonden dienten, und in der früheren Weise die Spannungsdifferenzen der Dicken cb, cd oder bd, sowie ca durch die Ladungen des Condensators ermittelt. Der Abstand cb betrug 4 mm, derjenige cd 32 mm und endlich ca 90 mm. Die

folgende Tabelle XXVIII enthält die gefundenen Zahlen in bekannter Anordnung.

Tabelle XXVIII.

r. des Versuches . . .	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
annkraft des HH in mm	1,1	0,425					0,2				0,1			0,05
ahl der Elemente . . .	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600	600
länge d. JCd-Lös. (17 mm weit)	200	680	400	200	100	50	680	300	150	75	300	150	75	75
blenk. des Galv. III (von 2×14 cm Rheost.) . . .	31	8,5	13	23	41	75	8	17	31	50	8	16	24	9
usschlag des Galv. I (verweigt) durch die Ladung des Condensators														
v. d. Sp. d. El. *ca* (90 mm)	86	81	85	104	112	120	92	100	103	117	141	149	160	177
v. d. Sp. d. Strecke *cb* (4 mm)	63	49	56	73	85	94	54,5	67	75	89	73	85	95	79
„ „ „ „ „ *cd* (32 mm)	76	69	72	96	105	102	82	92	92	104	136	142	151	175
„ „ „ „ „ *bd* (28 mm)	13	19	16	22,5	20	8	27	24	17	14,5	63	57	55	94

Wenige Bemerkungen sind zum Verständniss der Tabelle nöthig. Die Spannungsdifferenz der Strecke *bd* wurde zur Controle jedesmal bestimmt. Sie ist dem Unterschiede aus denjenigen der Strecken *cd* und *cb*, wie es die Theorie verlangt, gleich.

Die Schicht *cb*, welche der Kathode zunächst liegt, hat, obschon ihre Dicke siebenmal kleiner ist, wie diejenige von *bd*, fast immer eine viel grössere Spannungsdifferenz. Das Verhältniss dieser beiden Spannungsdifferenzen wird mit der Dichte des Gases kleiner, indem das Glimmlicht alsdann sich ausdehnt. Bei derselben Dichte des Gases wächst es in dem Maasse, als die Stromstärke steigt. Ohne Zweifel nimmt das Gefälle der Spannungen in den aufeinanderfolgenden Schichten des Glimmlichtes stetig mit der Entfernung von der Kathode ab und vermindert sich in der Nähe derselben am raschesten.

Während dieser Bestimmungen hatte der Platindraht (*b*) auf der gegenüberliegenden Oberfläche der negativen Kupferplatte einen fast 2 mm breiten, parallelen schwarzen Streifen erzeugt und so ein verwaschenes Abbild von sich hervorgerufen. Es sind die Ladungsströme des Condensators die Ursache hiervon, indem dieselben eine stärkere Verdampfung der Oberfläche an dieser Stelle bewirken.

87. Zwischen dem Vorgange der Leitung durch die Gasmolecüle an der Kathode und der Wärmeentwicklung sowie der Temperaturerhöhung daselbst besteht noch ein innigerer Zusammenhang, als bis jetzt erörtert wurde. Alles, was die Temperaturerhöhung dieser Gastheilchen erschwert, erschwert denselben die Annahme von Leitungsvermögen oder drückt dasselbe herab. Es ist ein um so grösseres Gefälle der Spannungen an dieser Stelle nöthig, je leichter die Wärme dort abgeleitet wird.

Der Leitungsvorgang in den Theilchen auf der sogenannten positiven Strombahn wird durch diese Beziehung nicht beeinflusst. Hieraus werden das Verhalten des negativen Glimmlichtes bei zunehmender Verdünnung und der grosse Unterschied, der zwischen demselben und dem positiven Licht alsdann hervortritt, verständlich. Die Kathode repräsentirt gegenüber ihrer Gashülle eine gewaltige Masse, welche die Temperaturerhöhung der berührenden Molecüle um so schwieriger macht, je weniger dicht das Gas ist. Eine ganz ausserordentliche Leistung, welche auf keinem anderen Wege erreicht werden kann, verrichtet der electrische Strom, wenn er bei den grossen Verdünnungen die Theilchen des Glimmlichtes in der unmittelbaren Berührung mit dem Metall der Kathode so stark, wie es die Versuche ergaben, erhitzt. Um dieselbe recht zu würdigen, müssen wir uns der schönen Versuche von H. Deville erinnern, welcher im Innern einer weissglühenden engen Röhre, in deren Axe eine von kaltem Wasser durchflossene Kupferröhre lag, das Gas an der Oberfläche des Kupfers trotz der Nähe der weissglühenden Wand auf niederer Temperatur erhielt. Ich habe eine solche von kaltem Wasser durchflossene Kupferröhre mehrmals als Kathode in stark verdünnten Gasen benutzt und die Wandungen des Glases schon bei mässigen electrischen Strömen mit einem prächtigen Kupferspiegel belegt erhalten.

Dass für solche Leistungen an der Kathode in den stark verdünnten Gasen grosse Gefälle der Spannungen nöthig werden, dass die Verminderung der Zahl der Molecüle, welche in dem positiven Theile des Stromes das Gefälle erniedrigt, hier die entgegengesetzte Wirkung hat, wird daraus begreif-

lich. Aus der Constitution der Gase, wie sie die heutige Wärmelehre erkannt hat, erklärt sich auch, dass die Zunahme welche die mittlere Weglänge der Gasmolecüle bei Abnahme der Dichte erfährt, die Schichten des Glimmlichtes alsdann stetig wachsen lässt.

88. In der Optik unterscheiden wir eine zweifache Lichtentwicklung der Körper; eine solche, welche erst bei einer bestimmten Erhöhung der Temperatur eintritt, in der Glühhitze stets und demnach mit innerer Nothwendigkeit sich einstellt: das Glühen, und eine solche, welche bereits bei niederer Temperatur, aber nie von selbst erfolgt, sondern immer die Mitwirkung gewisser anderer Energiequellen verlangt: die Phosphorescenz.

Die Analogie zwischen diesen Vorgängen des Leuchtens und den electrischen Leitungsverhältnissen der Gase hat sich mir schon früh aufgedrängt. Wie die Electrolyse so deutlich zeigt, haben wir im electrischen Strom den Act der Mittheilung und Fortpflanzung von Veränderungen, welche in den intramolecularen Bewegungen der Massentheilchen entstehen und unterhalten werden. In den hohen Temperaturen jenseits der Glühhitze nehmen sämmtliche Gase, wie § 10 feststellen wird, infolge der Veränderung, welche die Wärmebewegung in der Constitution des einzelnen Molecüls bewirkt, Leitungsvermögen durch die kleinste Spannungsdifferenz an und erhöhen dasselbe ausserordentlich mit der Zunahme der Hitze. Dieselben Veränderungen im Molecül, welche die Wärme dort bewirkt, muss, wie ich glaube, die Electricität bei niederer Temperatur veranlassen, wenn Leitung an der Kathode entstehen soll. Diese Aenderung geht um so schwieriger vor sich und erfordert ein um so grösseres Gefälle der Spannungen, je mehr die Zunahme der Wärmebewegung oder der Temperatur erschwert ist.

Ohne diesen Vorgang an der Kathode scheint nun aber derjenige im positiven Theile der Glimmentladung unter den hier gegebenen Verhältnissen nicht möglich zu sein. Letzterer ist auf ersteren wahrscheinlich eben so angewiesen, wie die phosphorescirende Lichtentwicklung auf die fremde Energiequelle, welche sie bedingt. Anderenfalls begreift man nicht,

warum in den verdünnten Gasen die positive Leitung, welche eine so kleine Spannungsdifferenz in Anspruch nimmt, nicht allein auf der ganzen Strecke sich einstellt. Auch kennen wir gegenwärtig mehrere Beispiele, dass Processe entgegengesetzter Art auf der Bahn desselben Stromes sich gegenseitig compensiren.

89. Der Vorgang an der Kathode wird daher auch zeitlich demjenigen auf der positiven Bahnstrecke etwas vorangehen. Daraus erklärt sich dann einfach die Thatsache, welcher wir in § 6 dieser Mittheilung und schon § 5 der ersten begegneten. Das positive Licht mit der dasselbe bedingenden Leitungsart, kann in der Nähe der Kathode nicht entstehen, weil die Molecüle dasselbst bereits für den anderen Vorgang disponirt sind.

In § 10 werden wir ausserdem finden, dass in den heissen Gasen das Gefälle an der Anode unter Umständen grösser, wie dasjenige an der Kathode sein kann. Damit hängt die ausserordentliche Erschwerung der Strombildung zusammen, welche § 6 sich zeigte, als die ganze Anode in der nächsten Nähe der Kathode und daher innerhalb der dieselbe berührenden Schicht des Glimmlichtes sich befand.

Goldstein hat die interessante Entdeckung gemacht, dass wenn in derselben Glasröhre bei grosser Verdünnung der Gase mehrere Drähte gleichzeitig als Kathoden dienen, die Strahlen des einen in der Nähe des anderen ähnlichen Hindernissen, wie ich sie für das positive Licht nachgewiesen hatte, begegnen. Er hat seine Versuche in einer besonderen Schrift unter dem Titel: „Ueber eine neue Form electrischer Abstossung", Berlin 1880, ausführlich beschrieben. In dieser Darstellung lässt er die Strahlen von der zweiten Kathode, deren Nähe sie in ihrer geradlinigen Bahn passiren würden, sämmtlich abgelenkt oder abgestossen werden. Bei der Wiederholung und Modificirung der wichtigsten seiner Versuche finde ich aber, dass die Strahlen meistens in der Nähe der anderen Kathode endigen; nur diejenigen, welche in grösserem Abstand bleiben, werden abgelenkt und setzen ihren Weg fort.

Ich glaube, dass diese Thatsache mit der von mir am

positiven Lichte nachgewiesenen im wesentlichen zusammenfällt. Die von der Kathode entfernteren Schichten des Glimmlichtes nehmen, wie die Tabelle XXVIII zeigt, ein geringes Gefälle in Anspruch und verhalten sich in dieser Beziehung wie diejenigen des positiven Lichtes. In der nächsten Umgebung der Kathode sind die Molecüle aber jene schlechten Leiter und daher für alle Vorgänge der besseren Leitung nicht geeignet.

90. Aus den erörterten Verhältnissen der Glimmentladung ergibt sich von selbst das Verfahren, die Strombildung in den verdünnten Gasen kleinen electromotorischen Kräften zu ermöglichen. Es ist einfach die Gashülle der Kathode auf jene hohe Temperatur zu versetzen, bei welcher sie, wie schon § 7 gezeigt und § 10 eingehender darlegen wird, gutes Leitungsvermögen durch kleine Spannungsdifferenzen annimmt. Diese Folgerung, zu welcher die in der ersten Mittheilung niedergelegten Erfahrungen bereits führten, hatte ich früh, sowie die erste Tauchbatterie von 400 Elementen fertig geworden war, realisirt und am Schlusse der zweiten Mittheilung schon angekündigt.

Zu dem Ende nehmen wir als Kathode die schwerflüssigsten Leiter und erhitzen dieselben durch einen anderen electrischen Strom so stark als möglich. Die Gefässe Fig. 12 und 13 sind hierzu geeignet. Wird die Röhre mit der Platinspirale benutzt und durch letztere ein Strom geleitet, dessen Intensität man allmählich steigert, so zeigt sich, dass die Spannungsdifferenz der Electroden des Gasstromes keine bemerkbare Verminderung erfährt, solange das Platin starke Rothglühhitze noch nicht überschritten hat. Mit dem Gelbglühen der Spirale wird aber die Spannungsdifferenz kleiner und nimmt dann rasch bei weiterer Steigerung der Temperatur ab. Die Unterschiede werden selbstverständlich um so grösser, je verdünnter das benutzte Gas, und je kleiner die Strecke des positiven Lichtes ist.

Da das Platin zu bald für diese Versuche seinen Schmelzpunkt erreicht, so habe ich als Kathode vorzugsweise das Kohlenstäbchen (Fig. 13) verwendet, das stets im höchsten Theile der Glasröhre sich befand, während die Anode unten

lag. Um die Thatsache recht auffallend zu machen, sind die Verdünnungen möglichst gross zu erhalten und die Spuren Gas, welche die Kohle bei Zunahme der Glühhitze stets noch abgibt, fortwährend durch die Pumpe zu entfernen. So gelang es mir, wenn der Abstand zwischen den Electroden 4 cm betrug, noch durch zehn kleine Elemente meiner Tauchbatterie einen Strom zu erhalten, bei dem der Anodendraht mit schwachem blauen Lichte sich bedeckte. Wurde der Abstand 8 cm genommen, so waren hierzu 20 Elemente nöthig. Beim Abstand 14—16 cm gaben 40 Elemente mit Hülfe des Funkens einen stetigen Strom und füllten den Zwischenraum mit breit geschichtetem, intensiv blauem Lichte. Als endlich der Abstand auf 28 cm vergrössert war, lieferten 80 Elemente mit Hülfe des Funkens diesen stark leuchtenden Durchgang.

Ist keine Widerstandssäule hierbei eingeschaltet, so sind die Intensitäten dieser Ströme mit starker Lichtentwicklung recht bedeutend; sie gaben am Galvanometer Ablenkungen, welche $^1/_{10}$ Ampère entsprachen.

Bei Einschaltung eines Galvanometers erkennt man, wie sehr die Intensität des Stromes von der Temperatur der Kathode abhängt, und wie rasch sie mit derselben zunimmt. Ich hatte, um diese Beziehung deutlich wahrzunehmen, in den Strom der grossen Tauchbatterie, welcher die Kohle erhitzte, eine Tangentenbussole aufgenommen.

91. Zur Erzielung obiger Resultate ist eine Weissglühhitze nöthig, bei welcher die Kohle nicht weit von der Verdampfung entfernt bleibt. Noch vortheilhafter ist die höhere Temperatur, welche im Davy'schen Bogen besteht und die Kohle lebhaft verdampfen lässt. Ich konnte nur einen kleinen und schwachen Bogen mit der grossen Tauchbatterie herstellen, indem ich die 16 Elemente hintereinander verband. Zwei keilförmig gefeilte 3 mm dicke Carré'sche Kohlen (Fig. 15_a) lagen horizontal nebeneinander und berührten sich nur in wenigen Punkten. Die eine (m) war unbeweglich in einem dicken Kupferdrahte befestigt. Die andere (n) stak in einem magnetisirten Stahlcylinder (s), der um ein Scharnier am Ende eines dicken Kupferdrahtes drehbar war. Die

beiden Kupferdrähte befanden sich eingekittet in den Tubusröhren einer Glaskugel (Fig. 15). Sie wurden durch fliessendes Wasser in bekannter Weise kalt und dicht gehalten. Um den Nachweis gleichzeitig zu führen, dass die Lichtausstrahlung der weissglühenden Kathode keine Rolle bei dem leichten Durchgang der Electricität spielt, gab ich dem Gasgefäss hier die U-Form und kittete den Anodendraht (*a*) in die zweite Kugel desselben. Der kürzeste Abstand zwischen Kohle und Draht betrug 15 cm. Durch einen äusseren Magnetstab liess sich das bewegliche Kohlenstück beim Durchgang des Stromes der 16 grossen Elemente, welcher die positive der beiden Kohlen rasch verdampfte und abnutzte, längere Zeit in Berührung erhalten. Leider macht der Kohlendampf, der sich auf die Glaswand absetzt, die Kugel bald undurchsichtig. Hier entstand durch 15 kleine Elemente bei möglichst grosser Verdünnung, noch ein starker leuchtender Durchgang der Electricität. Beide Schenkel füllten sich mit schön geschichtetem blauem positivem Lichte. Bei zwölf Elementen bekleidete sich nur der positive Draht mit blauem Lichte, der Zwischenraum blieb dunkel.

92. Verlangt man nicht die leuchtende Entladung der Electricität, sondern blos den Durchgang derselben bei diesen grossen Verdünnungen, so genügen weit geringere electromotorische Kräfte, als oben angegeben sind. Als der Abstand der Electroden in der Röhre (Fig. 13) 6 cm war, gab ein kleines Element bei möglichst grosser Verdünnung und starkem Weissglühen der Kohle einen stetigen Strom, der das eingeschaltete, unverzweigte Galvanometer I 65 mm ablenkte.

Solche schwachen Ströme ohne jede Spur von Lichtentwicklung werden auch durch kleine electromotorische Kräfte bei grösseren Dichten der Gase erhalten. Als die Röhre (Fig. 13) mit demselben Abstande der Electroden von 6 cm Wasserstoffgas von 9 mm Spannkraft enthielt, lenkten 20 Elemente das unverzweigte Galvanometer I 15 mm ab; als die Spannkraft auf 4,3 mm erniedrigt wurde, gaben zehn Elemente die Ablenkung 25 mm; bei 2 mm Druck vermochten noch zwei Elemente eine solche von 10 mm zu bewirken.

Das Galvanometer I befand sich in so grosser Entfernung, dass der stärkste Strom, der durch die Kohle geleitet wurde, den Magnet desselben nur um 2 mm aus der Ruhelage ablenkte.

Die Intensitäten dieser schwachen Ströme ohne Lichtentwickelung sind ebenfalls im höchsten Grade von der Temperatur der Kathode abhängig. Als die U-Röhre mit dem kleinen Davy'schen Bogen Wasserstoff von 10 mm Spannkraft enthielt, gaben 20 Elemente einen stetigen Strom, der das unverzweigte Galvanometer I so stark ablenkte, dass die meterlange Scala nicht ausreichte.

Selbstverständlich habe ich mich überzeugt, dass diese Ströme nur entstehen, wenn die Kathode der Gasstrecke auf jener hohen Temperatur sich befindet. Schliesst man die Elemente in entgegengesetzter Richtung, so findet keine Ablenkung des Galvanometers statt. Um diesen Unterschied recht auffallend zu machen, hatte ich in der Röhre Fig. 13 den Abstand der Electroden auf 4 cm verringert. Hier, wo wenige Elemente das Galvanometer I stark ablenkten, wenn ihr negativer Pol mit der weissglühenden Kohle verbunden war, liessen 200 Elemente dasselbe in der Ruhelage, als der positive Pol genommen war.

93. Das beschriebene Verhalten zeigt auch, dass die Unstetigkeit der Glimmentladung, welche durch hinreichende Schwächung der Stromintensität, wie wir fanden, stets veranlasst werden kann, durch die Energie, welche das Kathodenlicht in Anspruch nimmt, bedingt wird.

Denn der Vorgang auf der positiven Bahnstrecke ist, wie wir schon § 3 andeuteten, bei den schwächsten Strömen stetig.

94. Obige Thatsachen stehen ohne Zweifel im engsten Zusammenhange mit dem Auftreten des dunklen Raumes zwischen dem negativen und positiven Lichte und mit den abwechselnd hellen und dunkeln Schichten des letzteren bei der gewöhnlichen Glimmentladung. Denn §. 4 haben wir festgestellt, dass das Gefälle der Spannung in den dunklen Strecken weit kleiner ist, wie in den hellen. Ich halte es für wahrscheinlich, dass Glimmlicht und leuchtende Schicht mit den grösseren Gefällen und der grösseren Wärmeent-

wickelung die Leitung in den dunkeln Molecülen ebenso bedingen, wie in obigen Versuchen die weissglühende Kathode den Durchgang durch das kalte Gas bei so geringen Spannungsdifferenzen ermöglicht. Gern hätte ich diesen interessanten und so unerwarteten Thatsachen eine noch eingehendere Untersuchung gewidmet um ihre quantitativen Beziehungen festzustellen. Aber die starken Ströme, welche die Chromsäureelemente der grossen Tauchbatterie liefern, sind zu wenig constant. Es ist unmöglich, die Weissglühhitze der Kohle längere Zeit so unverändert zu erhalten, als es für Messungen nöthig ist. Die electrodynamische Maschine wird in dieser Hinsicht günstiger sein. Leider gestatteten die beschränkten Mittel, mit welchen ich meine Experimentaluntersuchungen ausführen muss, nicht, eine solche zu erwerben.

95. Die erörterten Verhältnisse lassen sich auch benutzen, um positive und negative Electricität zu unterscheiden. Das Electroskop, welches ich auf dieselben basirte, hatte folgende Einrichtung. Eine U-förmige Glasröhre (Fig. 16) enthält in dem einen Schenkel an einem eingekitteten Metalldrahte ein Paar Goldblättchen; in dem anderen Schenkel war die Vorrichtung, welche ein Kohlenstäbchen durch einen starken Strom weissglühend zu machen gestattet.

Nachdem die Luft durch die Quecksilberpumpe aus der Röhre möglichst entfernt war, wurden die Goldblättchen geladen und zur Divergenz gebracht, indem man sie mit einem der Pole von 100 oder 200 Elementen berührte. Alsdann die Kohle im anderen Schenkel weissglühte, fielen die Blättchen sogleich zusammen, wenn die Ladung durch den positiven Pol bewirkt war. Sie behielten ihre Divergenz unverändert, wenn sie negativ electrisirt waren.

96. Es gibt noch einen zweiten Weg, auf welchem der Durchgang der Electricität in den verdünntesten Gasen ohne Schwierigkeit erfolgt. Man erzeugt nämlich in denselben einen Strom, der in sich zurückläuft, nur Gasmolecüle und keine Electroden benutzt. Diese Bedingung lässt sich durch

richtige Verwerthung der inducirenden Thätigkeit eines anderen Stromes erfüllen.

Die recurrirenden Ströme, welche Gassiot, Plücker, Salet u. a. in den mit verdünnter Luft gefüllten Röhren ohne Metallelectroden erzeugten, indem sie auf der Aussenwand zwei Stanniolbelege anbrachten und mit den Enden der Induktionsrolle verbanden, versagen bei möglichst grosser Evacuirung, weil hier unter jedem Beleg durch Influenz jeder der beiden Pole, also auch negatives Licht, entstehen müssen.

Um einen Inductionsstrom, der blos aus positivem Lichte besteht, zu erhalten, brachte ich zuerst eine möglichst evacuirte Röhre äquatorial zwischen die Pole meines grossen Electromagnets und commutirte den kräftigen electrischen Strom, der denselben erregt hatte. Es gelang mir aber nicht, eine Lichterscheinung im Innern der Röhre im Dunkeln wahrzunehmen.

Letztere erfolgt aber leicht, wenn man die Induction des Entladungsstromes einer Leydener Flasche benutzt. Um in den stark evacuirten Glasröhren, welche Geissler nach meinem Vorgange anfertigte, und welche in unseren Lehrbüchern als Belege, dass das Vacuum die Electricität nicht leite, figuriren, einen Strom mit intensiv weissblauem positivem Lichte zu erhalten, umgibt man dieselben mit einer Spirale, welche aus einem mit Guttapercha bekleideten Kupferdraht gewickelt ist. Der von mir benutzte Draht war 1 mm dick und gegen 3 m lang. Lässt man durch denselben eine Leydener Flasche sich entladen, so füllt sich das Innere der Röhre momentan mit demselben blauen Lichte, welches beim Weissglühen der Kathode oben erhalten wurde.

Zur Untersuchung des Spectrums dieses Lichtes war es wünschenswerth, dass die Entladungen sich rasch auf einander folgten. Am besten erreicht man dies mit Hülfe einer grösseren Inductionsrolle. Die inducirten Drähte meines Ruhmkorff'schen Apparates von mittlerer Grösse waren mit den Belegen einer kleinen Leydener Flasche (äusserer Beleg 500 qcm) und diese unter Aufnahme eines Funkenmikrometers mit den Enden der Spirale des Guttaperchadrahtes verbunden. Als die Kugeln des Mikrometers 2 mm

Abstand hatten, gaben die rasch aufeinander folgenden Entladungen der Flasche in der möglichst verdünnten Röhre von 2 cm Durchmesser ohne Electroden hellleuchtende Nebenströme. Das Spectrum ihres weissblauen Lichtes zeigte stets sehr stark die Linien des Quecksilberdampfes.

(Schluss folgt.)

V. *Ueber electrische Schwingungen; besonders über die Polarisationserscheinungen, welche durch dieselben hervorgebracht werden;* von *A. Oberbeck.*

(Vierte Abhandlung.)

(Hierzu Taf. I Fig. 6—10.)

Im Anschluss an meine früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand[1]), welche hauptsächlich die Polarisationserscheinungen verschiedener Metalle in Kochsalzlösungen behandelten[1]), hat Herr R. Falck die Polarisation von sechs Metallen durch Wasserstoff einerseits und Sauerstoff, Chlor, Brom und Jod andererseits in dem physikalischen Laboratorium der Universität Halle untersucht. Seine Beobachtungen hat derselbe in seiner Inauguraldissertation: „Beiträge zur galvanischen Polarisation durch Wechselströme", Halle 1883 dargestellt. Im Einverständniss mit dem Hrn. Verfasser werde ich die Zahlenwerthe, welche derselbe erhalten hat, weiter unten mittheilen. Zuvor schien es aber nothwendig, die Theorie der von uns beiden benutzten Beobachtungsmethode in etwas anderer Weise darzustellen, als dies zuerst von mir geschehen.

Meine früheren Entwickelungen beruhten auf der Annahme von F. Kohlrausch, dass die Polarisation von Metallplatten durch kleine electrolytisch ausgeschiedene Gasmengen der Dichtigkeit derselben, d. h. der auf der Flächeneinheit abgelagerten Menge oder der durch dieselbe hin-

1) Oberbeck, Wied. Ann. **19.** p. 213—228 und p. 625—649. 1883.

durchgegangenen Electricitätsmenge proportional ist. Diese Annahme hat sich aber nur für den Grenzfall ausserordentlich schwacher Belegungen als zulässig gezeigt. Es kam also darauf an, die Bedeutung der von Falck und von mir experimentell erhaltenen Zahlenwerthe unabhängig von jener speciellen Annahme in allgemeinerer Weise festzustellen.

Die hierauf bezüglichen Entwickelungen sind in dem ersten Abschnitte dieser Abhandlung zusammengestellt. Der zweite Abschnitt enthält die Beobachtungsresultate von Falck. Aus denselben habe ich eine Reihe von Folgerungen gezogen, welche die Grenzwerthe der Polarisation bei ausserordentlich geringen Belegungen der Platten betreffen, Dieselben sind in dem dritten Abschnitte enthalten.

I. Theorie der Beobachtungsmethode.

Zu den Beobachtungen diente, wie früher auseinander gesetzt, ein Sinusinductor mit zwei Multiplicatoren, deren Windungsebenen einen beliebig zu verändernden Winkel η miteinander bildeten. Dieselben dienten als Stromquellen für zwei verschiedene Stromkreise, von denen der eine die festen Rollen, der andere die bewegliche Rolle des Electrodynamometers enthielt. Der Ausschlag desselben infolge der electrodynamischen Wechselwirkung der beiden electrischen Schwingungen wurde beobachtet. Fallen die Windungsebenen der beiden Multiplicatoren zusammen ($\eta = 0$), so sollen die Wechselströme der beiden Kreise allgemein durch die Formeln dargestellt werden:

$$(1) \qquad \begin{cases} i_1 = A_1 \cos(n\pi t) + B_1 \sin(n\pi t), \\ i_2 = A_2 \cos(n\pi t) + B_2 \sin(n\pi t). \end{cases}$$

Wird nun der zweite Multiplicator um den Winkel η verstellt, so gilt für i_2 die Gleichung:

$$(2) \qquad \begin{cases} i_2 = A_2 \cos(n\pi t - \eta) + B_2 \sin(n\pi t - \eta) \\ \quad = (A_2 \cos\eta - B_2 \sin\eta) \cos(n\pi t) \\ \quad + (A_2 \sin\eta + B_2 \cos\eta) \sin(n\pi t). \end{cases}$$

Die Ablenkung der beweglichen Rolle ist dann durch den Ausdruck:

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{k}{T}\int_0^T i_1 i_2\, dt \\ &= \frac{k}{2}\Big\{ \cos\eta\,(A_1 A_2 + B_1 B_2) + \sin\eta\,(A_2 B_1 - A_1 B_2)\Big\} \end{aligned} \right.$$

darzustellen, wo k diejenige Ablenkung bedeutet, welche ein Strom von der Intensität Eins hervorbringt, wenn derselbe die festen und die bewegliche Rolle durchfliesst. Bei den Versuchen über die Polarisation wurden die Multiplicatoren senkrecht gestellt ($\eta = \pi/2$) und vor Einschaltung der Flüssigkeitszelle in den ersten Stromkreis durch passende Wahl der Widerstände des zweiten Stromkreises dafür gesorgt, dass die Ablenkung Null war. Dann muss zwischen den Constanten der beiden Stromkreise die Beziehung bestehen:

$$(4)\qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}\,.$$

Wird nun auf irgend eine Weise die Phase des ersten Stromkreises verändert, so erfolgt ein Ausschlag α. Derselbe kann zunächst als Function der Schwingungszahl angesehen werden. Durch passende Wahl der Treibgewichte des Sinusinductors wurde Sorge getragen, dass nahezu immer bei einer bestimmten Schwingungszahl — der Normalschwingungszahl — beobachtet wurde. Bei kleinen Abweichungen von derselben wurde die Ablenkung α auf die Normalschwingungszahl reducirt[1]) und soll dann mit α_0 bezeichnet werden.

Es mag ferner angenommen werden, dass bei der erwähnten Phasenveränderung der Widerstand des Stromkreises unverändert bleibt, oder dass wenigstens die Veränderung desselben sehr klein ist im Vergleich zu dem ursprünglichen Widerstande. Der erste Fall würde eintreten, wenn man in eine Magnetisirungsspirale des Stromkreises einen Eisenkern einführt. Dem zweiten Falle entspricht die Einschaltung einer Flüssigkeitszelle von kleinem Widerstande. In beiden Fällen kann man annehmen, dass ein neuer Wechselstrom in demselben Stromkreise zu fliessen beginnt, dessen Am-

1) Oberbeck, Wied. Ann. 19. p. 629. 1883.

plitude und Phase in einer gewissen Abhängigkeit von dem ursprünglichen Strome steht.

Diesen Zusammenhang durch eine einfache Gleichung auszudrücken, sind wir ausser Stande. Es ist weder die Abhängigkeit der inducirten, magnetischen Momente von den magnetisirenden Kräften, noch diejenige der electromotorischen Kraft der Polarisation von dem polarisirenden Strome genau bekannt.

Da aber der primäre Strom nach dem Gesetze einer einfachen Sinusfunction der Zeit mit einer Schwingungszahl n verläuft, so wird der secundäre Strom — wenigstens seinem Hauptttheile nach[1]) — demselben Gesetze folgen.

Bezeichnet man den secundären Strom durch i'_1, so kann man also setzen:

$$i'_1 = C_1 \cos(n\pi t) + D_1 \sin(n\pi t). \tag{5}$$

Rührt derselbe von einer eingeschalteten Flüssigkeitszelle her, so kann man ihn kurz als Polarisationsstrom bezeichnen.

Ist der Widerstand des betreffenden Stromkreises sehr gross, so kann man die electrischen Schwingungen in demselben einfach als Summe der beiden Einzelschwingungen i_1 und i'_1 ansehen. Bei der Wechselwirkung derselben mit den Schwingungen des zweiten Kreises erfolgt ein Ausschlag, für welchen nach den früheren Annahmen ($\eta = \pi/2$, Gültigkeit der Gleichung (4)) die Gleichung gilt:

$$\alpha_0 = \frac{k}{2}\left\{ D_1 A_2 - C_1 B_2 \right\}. \tag{6}$$

Nun wurde bei meinen früheren Untersuchungen, ebenso wie bei denjenigen von Falck, am Anfange und Ende jeder Versuchsreihe der Ausschlag beobachtet, welcher von der Wechselwirkung der beiden Ströme i_1 und i_2 bei Parallelstellung der Multiplicatoren ($\eta = 0$) herrührt. Nach Glei-

1) Es ist möglich, dass der secundäre Strom von der einfachen Form einer Sinusschwingung abweicht. Man hätte dann die Stromstärke durch eine Summe periodischer Functionen (Fourier'sche Reihe) auszudrücken. Bei der hier betrachteten, electrodynamischen Wirkung kommt nur das erste Glied in Betracht, wie ich vor kurzem bei einer anderen Gelegenheit (Sitzungsber. der Berl. Acad. 1883. p. 983.) gezeigt habe.

chung (1) erhält man für die hierbei erfolgende Ablenkung bei der Normalschwingungszahl:

$$\beta_0 = \frac{k}{2}\left\{A_1 A_2 + B_1 B_2\right\}. \tag{7}$$

Der Quotient der Ablenkungen α_0 und β_0, durch y bezeichnet, war das eigentliche Beobachtungsresultat in unseren Untersuchungen. Es ist aber:

$$y = \frac{\alpha_0}{\beta_0} = \frac{D_1 A_2 - C_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2},$$

oder nach Gleichung (4):

$$y = \frac{D_1 A_1 - C_1 B_1}{A_1^2 + B_1^2}.$$

Setzt man noch für den polarisirenden Strom:

$$i_1 = G\cos(n\pi t - \varepsilon),$$

für den entsprechenden Polarisationsstrom:

$$i_1' = H.\cos(n\pi t - \varepsilon'), \qquad \text{also:}$$

$$A_1 = G.\cos\varepsilon, \qquad B_1 = G\sin\varepsilon,$$

$$C_1 = H.\cos\varepsilon', \qquad D_1 = H\sin\varepsilon', \qquad \text{so ist:}$$

$$y = \frac{H}{G}\sin(\varepsilon' - \varepsilon). \tag{8}$$

Die Beobachtung liefert also direct das Verhältniss der Amplituden des secundären und des primären Stromes, multiplicirt mit dem Sinus ihres Phasenunterschiedes.

Welche Vorstellung man sich nun auch über die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft der Polarisation von dem primären Strome bilden mag, jedenfalls wird die erste Hälfte einer Schwingung zur Neutralisation der vorhandenen Belegung der Platten dienen, die zweite Hälfte dagegen eine neue Beladung der Platten mit Zersetzungsproducten bewirken, welche ihr Maximum erreicht, wenn der primäre Strom sein Zeichen wechselt.[1]) Dann würde die Phasendifferenz beider Ströme $\pi/2$ betragen, und die Bedeutung von y wird noch einfacher, indem diese Zahl das Verhältniss der beiden Stromamplituden ausdrückt. Da indess beide Ströme in einem und demselben Stromkreise fliessen, so kann man in diesem Falle an Stelle des Verhältnisses der Stromampli-

1) Vgl. F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148. p. 158. 1873.

tuden das Verhältniss der Amplituden der electromotorischen Kräfte setzen.

Bei den Untersuchungen von Falck betrug die electromotorische Kraft des primären Stromes nahezu zwei Daniell. Bei meinen früheren Untersuchungen hat sie ebenfalls in der Nähe dieses Werthes gelegen.

Die Grössen $2y$ geben also die Maxima der electromotorischen Kräfte des Polarisationsstromes in Daniell'schen Elementen.

Man kann endlich den Grössen y noch eine dritte Bedeutung beilegen. Die Beobachtungsmethode beruht, wie oben bemerkt, auf der Phasenverschiebung, welche der primäre Strom infolge der Polarisation der Metallplatten erfährt. Bezeichnet man dieselbe mit φ, erinnert man sich der Gleichungen:

$$i_1' = G.\cos(n\pi t - \varepsilon), \qquad i_1' = H.\cos(n\pi t - \varepsilon')$$

und setzt: $\quad i_1 + i_1' = K\cos(n\pi t - \varepsilon - \varphi),$

so ist: $\quad K\cos\varphi = G + H.\cos(\varepsilon' - \varepsilon),$

$$K\sin\varphi = H.\sin(\varepsilon' - \varepsilon).$$

Also:

$$(9) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{H.\sin(\varepsilon' - \varepsilon)}{G + H.\cos(\varepsilon' - \varepsilon)}.$$

Lässt man die oben angeführte, jedenfalls sehr wahrscheinliche Annahme gelten, dass $\varepsilon' - \varepsilon = (\pi/2)$, so ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{H}{G} = y.$$

Aus den beobachteten Werthen y lässt sich also die Phasenverschiebung berechnen, welche der primäre Strom infolge der eingetretenen Polarisation erfahren hat.

Was die in den Formeln vorkommende Phasendifferenz $\varepsilon' - \varepsilon$ betrifft, so möchte ich noch bemerken, dass dieselbe nach der Kohlrauch'schen Annahme und bei grossem Widerstande des Stromkreises $\pi/2$ beträgt. Aber auch bei Abweichungen von diesem Werthe ändert sich der Sinus in der Nähe von $\pi/2$ nur wenig. Es ist daher anzunehmen, dass das Verhältniss der Stromamplituden für kleine Stromdichtigkeiten wirklich der Grösse y gleich, für grosse Stromdichtigkeiten dagegen etwas grösser als y ist.

Zum Verständniss der in dem folgenden Abschnitte mitgetheilten Beobachtungen füge ich noch hinzu, dass die Grössen y bei verschieden grossen Electrodenflächen x bestimmt wurden. Dieselben sind nach Quadratmillimetern gemessen. Ausser diesen beiden Grössen wurden auch noch die Producte yx mitgetheilt, welche constant sein müssten, wenn die electromotorische Kraft der Polarisation der durch die Flächeneinheit hindurch gegangenen Electricitätsmenge proportional wäre.

II. Beobachtungsresultate von R. Falck.

Als Electroden wurden folgende Metalle in Plattenform benutzt: Aluminium, Gold, Nickel, Palladium, Platin und Silber. Die Platten waren theils ganz aus dem betreffenden Metalle hergestellt, wie beim Aluminium, Nickel, Palladium, Silber, theils, wie bei den beiden übrigen, als dünne Blättchen auf Messingplatten isolirt befestigt worden. Es konnte dies deshalb geschehen, weil nur die eine Seitenfläche der Platten in Wirksamkeit trat, die andere und die Seitenkanten durch Schellacküberzug isolirt wurden. An zwei Klemmen eines Holzklotzes wurden die Platten in einer Entfernung von 8 mm so befestigt, dass ihre freien Seitenflächen einander zugekehrt waren. Dieser Holzklotz war an einem Stativ angebracht und konnte mittelst einer Mikrometerschraube gehoben und gesenkt werden, sodass immer nur ein genau abgemessener Theil der Platten in die Flüssigkeit eintauchte. Um für alle Platten einen möglichst gleichartigen Oberflächenzustand herzustellen, wurde denselben mittelst einer Putzpommade ein hoher Grad von Politur verliehen, welche die Platten von allen etwaigen Verunreinigungen ihrer Oberflächen befreite. Diese Politur wurde vor jeder Versuchsreihe erneuert. Nachdem nämlich alle Beobachtungsreihen schon einmal durchgeführt waren, war es infolge einer unrichtigen Notiz erforderlich, Nickel in Jodkalium noch einmal zu untersuchen. Da die Platten inzwischen jedoch etwas angelaufen waren, so schien es zweckmässig, ihre Politur zu erneuern. Und nun zeigte sich, dass die jetzt erhaltenen Werthe für α_0 bedeutend grösser ausfielen wie

früher. Dieser Umstand also liess eine wesentliche Abhängigkeit der Grösse der Polarisation von dem Oberflächenzustand der Platten erkennen; vor jeder Versuchsreihe wurde daher eine sorgfältige Politur der Platten vorgenommen. Eine nachfolgende Behandlung derselben mit absolutem Alkohol und destillirtem Wasser entfernte etwa noch vorhandene Fetttheilchen.

Als Flüssigkeiten wurden benutzt concentrirte Lösungen von schwefelsaurem Kalium, Chlorkalium, Bromkalium und Jodkalium. Die Belegung der Electroden fand also abwechselnd mit Wasserstoff und resp. Sauerstoff, Chlor, Brom und Jod statt.

Die folgenden Tabellen enthalten die Electrodenflächen x, die Quotienten y und die Producte $y.x$, deren Bedeutung aus dem Gesagten ja bekannt ist.

I. Aluminium.

Die Platten hatten eine Breite von 10 mm. Hier war es geboten, besonders lange die Wechselströme durchzuleiten, da erst nach geraumer Zeit die Ausschläge sich einem Grenzwerthe näherten. Dieselben wurden nicht eher notirt, als bis zwei aufeinander folgende Beobachtungen annähernd gleiche Werthe zeigten. Auch musste besondere Sorgfalt auf die Politur und Reinigung der Platten verwandt werden, da sich mit der Zeit auf denselben ein Ueberzug bildete.

x	K_2SO_4		KCl		KBr		KJ	
	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$
50	0,6525	32,63	0,5713	28,57	0,5365	26,83	0,4615	23,08
100	0,5383	53,83	0,4983	49,83	0,4424	44,24	0,4270	42,70
200	—	—	0,4333	86,66	0,3998	79,96	0,3812	76,24
300	0,5001	150,03	0,4072	122,16	0,3736	112,08	0,3702	111,06
400	—	—	0,3590	143,60	0,3647	145,88	0,3481	139,24
500	0,4424	221,20	0,3255	162,75	0,3345	167,25	0,3416	170,80

Die Polarisation in K_2SO_4 übertrifft die in den anderen Flüssigkeiten um ein Bedeutendes. Die Reihenfolge der Polarisirbarkeit in den einzelnen Flüssigkeiten ist die durch die Anordnung derselben in der Tabelle gegebene.

II. Gold.

Benutzt wurden kleine Goldplatten von 5 mm Breite.

x	K_2SO_4		KCl		KBr		KJ	
	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$
50	0,2306	11,53	0,1382	6,91	0,1170	5,85	0,1246	6,23
100	0,2060	20,60	0,1184	11,84	0,0961	9,61	0,1045	10,45
150	0,2046	30,69	0,1082	16,23	0,0778	11,67	0,0937	14,06

Während die Polarisation in K_2SO_4 diejenige in den anderen Flüssigkeiten fast um das Doppelte übertrifft, tritt in der Reihenfolge der Polarisirbarkeit die Reihe für KJ gleich hinter die für KCl, in KBr fällt die Polarisation am schwächsten aus.

Platten von 10 mm Breite wurden bis zu einer Fläche von 500 qmm eingetaucht. Da jedoch an dieser Stelle immer noch kein Grenzwerth der Producte $y.x$ eintrat und gerade das Material vorlag, so wurden auch grössere Platten von 20 mm Breite bis zu einer Tiefe von 100 mm eingetaucht. Auch bei diesem Metalle mussten die Wechselströme besonders lange durchgeleitet werden, bevor die Ausschläge sich einander näherten.

III. Nickel.

x	K_2SO_4		KCl		KBr		KJ	
	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$
50	0,3105	15,53	0,3287	16,44	0,3574	17,88	0,3820	19,10
100	0,3283	32,83	0,3261	32,61	0,3516	35,16	0,3632	36,32
300	0,3117	93,51	0,3374	101,22	0,3679	110,37	0,3357	100,71
500	0,3098	154,90	0,3150	157,50	0,3331	166,55	0,3271	163,55
1000	0,2806	280,60	0,2917	291,70	0,2841	284,10	0,2516	251,60
1500	0,2063	309,45	0,2243	336,45	0,2219	332,85	0,2110	316,50
2000	0,1515	303,00	0,1573	314,60	0,1690	338,00	0,1636	327,20

Wie aus der Tabelle ersichtlich, tritt erst von 500 qmm an eine Abnahme der y ein. Im allgemeinen liefert die Polarisation des Nickels in allen vier Flüssigkeiten gleiche Werthe. Jenseits 1500 qmm nähern sich die Producte $y.x$ einem Grenzwerthe.

IV. Palladium.

Die Platten hatten eine Breite von 7 mm. Für K_2SO_4 konnten die Ausschläge erst nach einiger Zeit notirt werden, da die Schwankungen im Anfange zu gross waren.

x	K_2SO_4		KCl		KBr		KJ	
	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$
70	0,3636	25,45	0,3336	23,35	0,2642	18,49	0,2010	14,07
140	0,3061	42,85	0,2680	37,52	0,2113	29,58	0,1656	23,18
210	0,1676	35,20	0,1016	21,33	0,0850	17,85	0,0847	17,79

Auch hier ist die Reihenfolge der Polarisirbarkeit in den einzelnen Flüssigkeiten die durch die Anordnung in der Tabelle gegebene. Die Polarisation in K_2SO_4 beträgt ungefähr das Doppelte von der in KJ. Auffällig ist die Abnahme der y von 140 zu 210 qmm Plattengrösse, welche sich bei allen Flüssigkeiten kundgibt.

V. Platin.

Da es interessant schien, eine obere Grenze zu kennen, so wurden kleine Platten von 5 mm Breite bei 25 und 50 qmm eingetauchter Fläche untersucht. Zu den anderen Reihen wurden Platten von 20 mm Breite verwandt. Während sich für K_2SO_4 bei den ersten Versuchen Schwankungen zeigten, fielen später und bei den anderen Flüssigkeiten die Ausschläge nach Umlegen des Commutators ziemlich gleich aus.

x	K_2SO_4		KCl		KBr		KJ	
	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$
25	0,2534	6,34	0,1799	4,50	0,1806	4,52	0,2370	5,92
50	0,2112	10,56	0,1597	7,99	0,1340	6,70	0,2320	11,60
100	0,1822	18,22	0,1197	11,97	0,0936	9,36	0,1928	19,28
200	0,1458	29,16	0,0917	18,34	0,0645	12,90	0,1480	29,60
300	0,1233	36,99	0,0691	20,73	0,0516	15,48	0,1293	38,79
400	0,1114	44,56	0,0630	25,20	0,0375	15,00	0,1195	47,80

Die Polarisation nimmt anfangs schnell, später langsamer ab. Wenn man von einigen Unregelmässigkeiten absieht, so fallen die Werthe der Producte $y.x$ für K_2SO_4 und KJ fast gleich aus; die für KCl betragen ungefähr nur $^2/_3$ der vorigen, und die für KBr gestalten sich noch kleiner.

VI. Silber.

Die Platten hatten eine Breite von 5 mm. Von allen Metallen zeichnete sich dieses durch die Leichtigkeit der

Beobachtung aus, indem die Ausschläge sehr bald constant wurden.

x	K_2SO_4		KCl		KBr		KJ	
	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$	y	$y.x$
50	0,2234	11,17	0,0685	3,43	0,0627	3,14	0,0525	2,63
100	0,1542	15,42	0,0447	4,47	0,0449	4,49	0,0360	3,60
150	0,1469	22,04	0,0338	5,07	0,0360	5,40	0,0225	3,38

Die Polarisation in K_2SO_4 übertrifft die in den übrigen Flüssigkeiten um das Vierfache. In Betreff der Polarisirbarkeit folgen die Flüssigkeiten wie in der Tabelle.

III. Folgerungen aus den mitgetheilten Beobachtungen.

Falck hat die gefundenen Zahlenwerthe ganz in derselben Weise, wie ich es früher gethan, durch Curven dargestellt, wobei die Electrodenflächen x als Abscissen, die y als Ordinaten dienten.

Da indess die electromotorischen Kräfte der Polarisation (y) als Functionen der durch die Flächeneinheit (1 qmm) hindurchgegangenen Electricitätsmengen anzusehen sind, so dürfte es zweckmässiger sein, letztere direct einzuführen. Dieselben können leicht berechnet werden. Bezeichnet man die ganze, in einer Halbschwingung durch die Flüssigkeit hindurchgegangene Electricitätsmenge mit e, diejenige für 1 qmm mit e_1, so ist:

$$e_1 = \frac{e}{x}.$$

Setzt man zur Berechnung von e die Stromstärke einfach:

$$i = \frac{nE}{w} \cos \frac{\pi t}{T},$$

was bei dem grossen Widerstande des Kreises wohl gestattet ist, so ist:

$$e = \int_0^{\frac{T}{2}} i\,dt = \frac{E}{\pi w}.$$

Falck hat die Grösse E direct mit einem Daniell'schen Element verglichen und = 0,022 gefunden. Der Wider-

stand betrug 3098 S.-E. Nimmt man ein Daniell zu 11,7 an, so ist in absolutem, electromagnetischem Maass:

$$e = 0{,}000\,026\,45,$$

woraus e_1 durch Division mit x erhalten wird.

Da ferner y das Verhältniss der Amplituden der electromotorischen Kräfte des secundären und primären Stromes bedeutet, letztere aber bei der Normalschwingungszahl:

$$n = 80;\ n.E = 90.\ 0{,}022 = 1{,}98 \text{ Daniell},$$

so ist, wie oben bemerkt, in runder Summe $2y$ die electromotorische Kraft der Polarisation in Daniells.

Hiernach habe ich die Beobachtungen von **Falck** umgerechnet und in den folgenden Tabellen 1 bis 5 zusammengestellt. Und zwar enthalten die ersten vier Tabellen die Zahlenwerthe für die Metalle: Aluminium, Nickel, Platin, Gold und Silber in den Lösungen von K_2SO_4, KCl, KBr, KJ, während die fünfte Tabelle die Beobachtungen an Palladium in allen vier Flüssigkeiten wiedergibt.

Tabelle 1.

Lösung von K_2SO_4.

e_1	Al	Ni	Pt	Au	Ag
$1{,}32 . 10^{-8}$	—	0,308	—	—	—
1,76 „	—	0,413	—	—	—
2,65 „	—	0,561	—	—	—
5,3 „	0,885	0,620	—	—	—
6,6 „	—	—	0,223	—	—
8,8 „	1,000	0,623	0,247	—	—
13,2 „	—	—	0,292	—	—
17,6 „	—	—	—	0,409	0,293
26,5 „	1,077	0,657	0,364	0,412	0,308
53,0 „	1,305	0,621	0,422	0,461	0,447

Tabelle 2.

Lösung von KCl.

$1{,}32 . 10^{-8}$	—	0,315	—	—	—
1,76 „	—	0,449	—	—	—
2,65 „	—	0,583	—	—	—
5,3 „	0,651	0,630	—	—	—
6,6 „	0,718	—	0,126	—	—
8,8 „	0,814	0,675	0,138	—	—
13,2 „	0,867	—	0,183	—	—
17,6 „	—	—	—	0,216	0,068
26,5 „	0,997	0,652	0,239	0,237	0,089
53,0 „	1,143	0,657	0,319	0,276	0,137

Tabelle 3.

Lösung von KBr.

e_1	Al	Ni	Pt	Au	Ag
$1{,}32 \cdot 10^{-8}$	—	0,338	—	—	—
1,76 „	—	0,444	—	—	—
2,65 „	—	0,568	—	—	—
5,3 „	0,669	0,666	—	—	—
6,6 „	0,729	—	0,075	—	—
8,8 „	0,747	0,735	0,103	—	—
13,2 „	0,800	—	0,129	—	—
17,6 „	—	—	—	0,155	0,072
26,5 „	0,885	0,703	0,187	0,192	0,089
53,0 „	1,073	0,715	0,268	0,234	0,125

Tabelle 4.

Lösung von KJ.

$1{,}32 \cdot 10^{-8}$	—	0,327	—	—	—
1,76 „	—	0,422	—	—	—
2,65 „	—	0,503	—	—	—
5,3 „	0,683	0,654	—	—	—
6,6 „	0,696	—	0,239	—	—
8,8 „	0,740	0,671	0,259	—	—
13,2 „	0,762	—	0,296	—	—
17,6 „	—	—	—	0,187	0,045
26,5 „	0,854	0,726	0,385	0,209	0,072
53,0 „	0,923	0,764	0,464	0,249	0,105

Tabelle 5.

e_1	Palladium in den Lösungen von:			
	K_2SO_4	KCl	KBr	KJ
$12{,}6 \cdot 10^{-8}$	0,335	0,203	0,170	0,169
18,9 „	0,612	0,536	0,423	0,331
37,8 „	0,727	0,667	0,528	0,402

Die Zahlenwerthe dieser Tabellen sind in den entsprechenden Figuren 1 bis 5 durch Curven dargestellt, wobei als Abscissen die Electricitätsmengen e_1 (mit 10^8 multiplicirt), als Ordinaten die electromotorischen Kräfte der Polarisation in Daniells dienen.

Bei der Betrachtung der einzelnen Curven ist zunächst zu berücksichtigen, dass dieselben sämmtlich vom Nullpunkt ausgehen müssen. Wenn nun auch die Beobachtungen nicht bis ganz in die Nähe desselben fortgesetzt werden konnten, so sind dieselben doch in den meisten Fällen so weit geführt,

dass der Verlauf der Curven für sehr kleine Werthe von e_1 nicht zweifelhaft sein kann. Mit Ausnahme der Palladiumcurven steigen dieselben zuerst schneller, dann langsamer an und scheinen sich einem Maximalwerthe zu nähern. Schon bei sehr kleinen Electricitätsmengen wird derselbe vollständig vom Nickel erreicht. Aehnlich ist der Verlauf bei dem Aluminium, nur dass hier noch ein weiteres Anwachsen stattfindet, so dass die electromotorische Kraft dieses Metalles die höchsten Werthe erreicht, welche überhaupt beobachtet wurden. Die Curven für Platin, Gold und Silber zeigen eine viel geringere Abweichung von der geraden Linie, als die beiden ersten. Sehr merkwürdig ist dagegen der Verlauf der Palladiumcurven. Dieselben sind in ihrem unteren Verlauf convex, haben einen Wendepunkt und werden dann concav. Man übersieht auf den ersten Blick, dass die charakteristische Form sämmtlicher Curven eines Metalles in allen vier Flüssigkeiten dieselbe ist und nur von der Natur des Metalles abhängt.

Könnten die polarisirten Electroden als Condensatoren von constanter Capacität aufgefasst werden, so müssten alle Curven vom Nullpunkt aus in geraden Linien verlaufen. Die Capacität der Flächeneinheit wäre dann der Cotangente des Winkels der Geraden mit der Abscissenaxe gleich.

Dies ist nicht der Fall. Die electromotorische Kraft der Polarisation (P) ist eine complicirtere Function der Ladung (e_1). Denkt man sich aber im Nullpunkt eine Tangente an die Curve gelegt, so kann man die Cotangente des Neigungswinkels derselben mit der Abscissenaxe als Capacität für unendlich kleine Ladungen bezeichnen. Setzt man also:

$$P = f(e_1),$$

so ist diese Grenzcapacität:

$$c_0 = \frac{de_1}{dP}, \text{ für } e_1 = 0. \tag{10}$$

Blondlot[1]), welcher sich vor kurzem mit der Untersuchung dieses Gegenstandes beschäftigt hat, hat c_0 als An-

1) Blondlot, Thèse de docteur. Recherches expérimentales sur la capacité voltaïque. Paris 1881.

fangscapacität (capacité initiale) bezeichnet und einige allgemeine Sätze über dieselbe ausgesprochen, auf welche ich noch zurückkommen werde.

Es schien mir von Interesse, aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial die Werthe der Anfangscapacität zu berechnen. Da für unendlich kleine Ladungen die Annahme von Kohlrausch gilt, so kann die Berechnung der Capacität nach den Regeln ausgeführt werden, welche ich früher angegeben habe. Für meine damalige Versuchsanordnung war die Capacität nach der Formel:

$$c = \frac{2}{0{,}665 \,.\, yx} \text{ Mikrofarad}$$

zu berechnen.[1]) Hierbei war $n = 80$ als Normalschwingungszahl angenommen. Bei der etwas grösseren Schwingungszahl (90), welche bei den Versuchen von Falck benutzt wurde, hat die Zahlenconstante einen etwas anderen Werth, und die Formel lautet:

$$c = \frac{2}{0{,}722 \,.\, yx} \text{ Mikrofarad.} \tag{11}$$

Es kam nun darauf an, die Grenzwerthe von yx für sehr kleine e_1 oder für sehr grosse Electrodenflächen zu ermitteln.

In einigen Fällen sind die Beobachtungen so weit ausgedehnt, dass man die Producte unmittelbar aus denselben entnehmen kann. Dies ist zunächst für alle vier Flüssigkeiten bei Nickel der Fall, wo die letzten Producte yx in allen Reihen constant werden, und zwar betragen diese Grenzwerthe:

für K_2SO_4 : 306	für KBr : 335
„ KCl : 325	„ KJ : 320.

Dieselben sind also nahezu gleich.

Ferner werden Grenzwerthe erreicht von Platin in KBr zu 15 und von Silber in KJ zu 3,5.

In allen übrigen Fällen wurde die Constanz der Producte nicht erreicht, doch ist eine Annäherung an dieselbe in den meisten Fällen nicht zu verkennen.

---

1) Oberbeck, Wied. Ann. 19. p. 646. 1883.

Ich habe daher versucht, aus den letzten Beobachtungen (für die kleinsten Werthe von e_1) die Grenzwerthe jener Producte zu berechnen. Zu dem Zwecke habe ich angenommen, dass sich y als Function von e_1 für kleine Werthe dieser Grösse durch die Näherungsformel:

$$y = ae_1 - be_1^3 \tag{12}$$

ausdrücken lässt. Diese Form wurde gewählt, damit y für negative Werthe von e_1 einfach sein Zeichen wechselt. Setzt man dann:

$$e_1 = \frac{e}{x},$$

so ist:

$$y = \frac{a \cdot e}{a} - \frac{be^3}{x^3}, \qquad yx = ae - \frac{be^3}{x^2},$$

oder wenn man einführt:

$$ae = A,\ be^3 = B,$$

$$yx = A - \frac{B}{x^2}. \tag{13}$$

A ist dann der gesuchte Grenzwerth für $x = \infty$.

Die Constanten A und B können aus zwei Beobachtungen der Producte yx mit den zugehörigen Werthen von x berechnet werden. Für Nickel war, wie oben bemerkt, eine solche Berechnung nicht mehr nöthig. Bei den übrigen Metallen, mit Ausnahme des Palladiums, habe ich die Rechnung nach den Beobachtung von Falck durchgeführt. Das Palladium wurde hiervon ausgeschlossen, weil aus den Curven desselben ersichtlich ist, dass B im Gegensatze zu den übrigen Metallen einen negativen Werth haben müsste. Für Aluminium in K_2SO_4 wurde benutzt:

$$x = 500, \quad yx = 221, \quad x = 400, \quad yx = 150.$$

Hieraus folgt: $A = 261$.

Bei den drei anderen Lösungen ist der Verlauf der Zahlenwerthe für grössere x nahezu identisch. Die geringen Abweichungen können durch kleine Unterschiede der Oberflächenbeschaffenheit erklärt werden.

Nimmt man für diese drei Flüssigkeiten die Mittelwerthe:

$$x = 500, \quad yx = 167, \quad x = 400, \quad yx = 143,$$

so folgt: $A = 210$.

Bei dem Platin ist wieder der Verlauf der Zahlen für K_2SO_4 und für KJ nahezu übereinstimmend. Setzt man für beide Flüssigkeiten:

$$x = 400, \quad yx = 46{,}2, \quad x = 300, \quad yx = 37{,}9,$$

so ist: $A = 56{,}9$.

Für Platin in KCl ist:

$$x = 400, \quad yx = 25{,}2, \quad x = 300, \quad yx = 20{,}7$$

und $A = 31$.

Für Platin in KBr brauchte, wie oben bemerkt, die Rechnung nicht ausgeführt zu werden.

Bei Gold in K_2SO_4 wurden die Werthe benutzt:

$$x = 150, \quad xy = 30{,}7, \quad x = 100, \quad yx = 20{,}6,$$

hieraus $A = 38{,}8$.

Für die drei übrigen Lösungen konnten die Mittelwerthe:

$$x = 150, \quad yx = 14, \quad x = 100, \quad yx = 10{,}6$$

benutzt werden. Also: $A = 16{,}7$.

Bei Silber in K_2SO_4 war:

$$x = 150, \quad yx = 22{,}0, \quad x = 100, \quad yx = 15{,}4.$$

$$A = 27{,}3.$$

Bei den Lösungen von KCl und KBr stimmten die Zahlenwerthe nahezu überein, daher:

$$x = 150, \quad yx = 5{,}2, \quad x = 100, \quad yx = 4{,}5.$$

$$A = 5{,}8.$$

Bei KJ ergab sich direct aus den Beobachtungen der Grenzwerth: $A = 3{,}5$.

Aus diesen Zahlen wurden nach Gl. (11) die Capacitäten in Mikrofarads berechnet und in Tabelle 6 zusammengestellt.

Tabelle 6.

Lösung	Al	Ni	Pt	Au	Ag
K_2SO_4	0,0106	0,0091	0,0487	0,0714	0,1015
KCl	0,0132	0,0085	0,0894	0,1659	0,4776
KBr			0,1832		
KJ			0,0487		0,7914

Ueber die Werthe der Anfangscapacität liegt, wie schon oben bemerkt, eine Untersuchung von Blondlot vor. Der-

selbe hat aus seinen Versuchen die folgenden beiden Schlüsse gezogen:

1. Die Anfangscapacität ist unabhängig von dem Sinne der Polarisation.

2. Dieselbe ist unabhängig von der Natur der Flüssigkeit.

Da die Methode der Wechselströme die Untersuchung der Einzelpolarisationen nicht gestattet, so ist der erste Satz bei den obigen Berechnungen als gültig angenommen worden. Was den zweiten Satz betrifft, so hat Blondlot nur eine einzige Zahlentabelle angeführt, wobei die Anfangscapacität einer Platinelectrode in verdünnter Schwefelsäure = 1 gesetzt wurde. Dieselbe Zahl ergab sich zwar auch noch für mehrere andere Flüssigkeiten; für einige aber schwanken die Zahlen zwischen den Grenzen 0,75 und 1,5. Streng bewiesen ist der fragliche Satz also nicht. Wäre derselbe richtig, so müssten die Anfangscapacitäten für jedes einzelne Metall einen und denselben von der Flüssigkeit unabhängigen Werth haben. Dies ist nun bei Aluminium und Nickel nahezu der Fall.

Platin ist ein Metall mit sehr leicht veränderlicher Oberflächenbeschaffenheit und deshalb weniger geeignet zur Prüfung eines solchen Gesetzes. Dagegen sind die Unterschiede der Capacitäten beim Silber sehr bedeutend. Ueberhaupt fällt die Capacität bei Sauerstoffabscheidung meist erheblich kleiner aus als bei Chlor, Brom, Jod. An absoluten Werthen für die Anfangscapacitäten hat Blondlot nur einige Zahlen für Platin in Schwefelsäure mitgetheilt. Hiernach liegt die Capacität von 1 qmm, je nach dem Oberflächenzustand derselben, zwischen den Grenzen 0,0388 und 0,1554, welche Zahlen von derselben Grössenordnung sind, wie die von mir mitgetheilten.

Zum Schlusse möchte ich noch darauf hinweisen, dass die zum Theil recht erheblichen, electromotorischen Kräfte ausserordentlich kleinen Mengen ausgeschiedener Substanzen ihre Entstehung verdanken.

Da die bei der Zersetzung wirksame Electricitätsmenge 0,000 026 45 in electromagnetischem Maasse betrug, die Einheit aber 0,0094 mg Wasser zersetzt, so war die ganze Wassermenge : $25 . 10^{-8}$ mgr, welcher eine Abscheidung von

$2{,}8 \cdot 10^{-8}$ mg Wasserstoff und äquivalenter Mengen von O, Bl, Br, J entsprach.

Bei Nickel wurden die Gesammtwerthe der electromotorischen Kraft von etwa 0,6 Daniell schon bei Electrodenflächen von 500 qmm erreicht. Dies entspricht einer Wasserstoffbelegung von:

$$0{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ mg für 1 qmm.}$$

Beim Aluminium wurden Werthe der electromotorischen Kraft von 0,8 bis 1 Daniell bei einer Beladung von 10^{-10} mg für 1 qmm erreicht. Dabei ist noch zu bemerken, dass auch diese Mengen noch als obere Grenzwerthe anzusehen sind, da selbst in der kleinen Zeit einer Schwingung ($\frac{1}{30}$ sec.) möglicher Weise noch Verluste durch Diffussion, sei es nach Seiten des Metalles oder nach Seiten der Flüssigkeit stattgefunden haben könnten. Dass solche Verluste wirklich eintreten, dafür scheint mir das eigenthümliche Verhalten des Palladiums zu sprechen, welches sich bekanntlich durch seine starke Absorptionsfähigkeit für Wasserstoff vor allen anderen Metallen auszeichnet. Die bei schwachen Ladungen verhältnissmässig sehr geringen, electromotorischen Kräfte desselben können sehr wohl durch eine nahezu vollständige Absorption der kleinen Wasserstoffmengen erklärt werden.

Die Zahlen für die Anfangscapacitäten gestatten, die Dicke der electrischen Doppelschicht an der Grenze Metall-Flüssigkeit[1]) zu berechnen, da dieselbe mit der Capacität der Flächeneinheit in der Beziehung:

$$d = \frac{1}{4\pi c}$$

steht, wobei die Capacität auf electrostatisches Maass bezogen werden muss.

Die Abstände der Doppelschicht hängen hauptsächlich von dem Metall, weniger von der Natur der Flüssigkeit ab. Aus der Tabelle 6 ergeben sich die folgenden Zahlen für Lösungen von KCl oder KBr:

---

1) Vgl. v. Helmholtz, Wied. Ann. 7. p. 337. 1879; Gesamm. Abh. 1. p. 855—858.

Nickel: $d = \frac{1}{961\,300}$ mm, Aluminium: $d = \frac{1}{1{,}493\,000}$ mm,

Gold: $d = \frac{1}{18{,}160\,000}$ mm, Silber: $d = \frac{1}{54{,}020\,000}$ mm.

Halle a. S., November 1883.

VI. *Ueber die Bestimmung der magnetischen Horizontalintensität mit Anwendung der Wage; von A. Toepler.*

(Aus den Sitzungsber. der k. Academie der Wissenschaften zu Berlin vom 18. October 1883; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Man hat neuerdings Magnetstäbe, welche nach Art der Wage auf Schneiden schwingen, als Variationsinstrumente für die Verticalcomponente des Erdmagnetismus in Anwendung gebracht. Nach dem Princip der Wage gebaute Apparate für die absolute Bestimmung der Intensität, insbesondere der horizontalen, sind mir nicht bekannt. Man scheint um horizontale Axen drehbare Vorrichtungen für nicht recht geeignet zu halten, falls es sich um genaue Absolutbestimmungen handelt[1]), obwohl die Drehmomente, welche unter mittleren Breiten an starken Magneten von den beiden Componenten des Erdmagnetismus bewirkt werden, gross genug sind, um den Versuch einer Ermittelung durch Wägung zu rechtfertigen. Vielleicht fehlt es nur an geeigneten Methoden. Nachdem F. Kohlrausch in einer verdienstvollen Arbeit[2]) auf die Schwierigkeiten und Ungenauigkeiten der Schwingungsbeobachtungen hingewiesen hat, nachdem H. v. Helmholtz durch sein sinnreiches Verfahren, Stabmomente zu wägen[3]), gezeigt hat, dass noch kleinere magnetische Kräfte als die in Rede stehenden der Bestimmung mittelst der Wage zugänglich sind, halte ich die Mittheilung der nachfolgenden Wägungsbeobachtungen nicht für überflüssig. Die

1) Vgl. Maxwell, Electr. and Magn. 2. p. 111 u. 112.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 737. 1882.

3) H. v. Helmholtz, Berl. Sitzungsber. vom 5. April 1883. p. 405.

dabei eingeschlagene Methode schien mir wegen ihrer Einfachheit und Bequemlichkeit der experimentellen Prüfung werth zu sein. Die Resultate stimmen, wenngleich ich dieselben mit Rücksicht auf die Unvollkommenheit der angewandten Hülfsmittel nur als vorläufige bezeichnen kann, sehr gut überein.

Die Tragsäule einer gewöhnlichen Wage sei sammt dem Glasgehäuse auf einem lothrechten Zapfen befestigt, mit welchem sie ohne Erschütterungen um die Verticale gedreht werden könne. Für die genau senkrechte Einstellung der Drehaxe seien geeignete Vorrichtungen vorhanden. Die Drehungen seien an einem Theilkreise ablesbar.[1]) Die Platten, auf welche sich die Mittelschneide stützt, seien vermittelst einer feinen Libelle genau in die Horizontalebene eingestellt. Der Einfachheit halber sei angenommen, dass die beiden sogenannten Endschneiden mit der Mittelschneide in eine Ebene fallen. Dementsprechend mögen in dem theoretischen Schema der Wage die Bestandtheile Balken, Mittelschneide und Zeiger als drei zu einander senkrechte, starre Linien gedacht sein, auf welche sich die weitere Betrachtung bezieht. In der Mitte des Balkens sei ein Magnet befestigt. Die Projection seiner Axe auf die Schwingungsebene, d. h. diejenige Ebene, welche Balken und Zeiger enthält, bilde mit der Zeigerrichtung den Winkel α. Die Componente des magnetischen Momentes nach der Richtung der bezeichneten Projection sei M'. Sei ferner die Schwingungsebene in die Ebene des magnetischen Meridians eingestellt, und endlich sei das System durch Belastungen Q_0 und Q_1 der Endschneiden so ins Gleichgewicht gebracht, dass der Balken nahe horizontal, und zwar unter dem kleinen Neigungswinkel γ einspielt. Dann gilt eine Gleichung von der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} Q_0 l_0 \cos\gamma + Ba \sin(\beta+\gamma) + VM' \sin(\alpha+\gamma) \\ \quad + HM' \cos(\alpha+\gamma) - Q_1 l \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Hierin bedeuten V und H die beiden Componenten des Erdmagnetismus, B das Gewicht des Balkens einschliesslich des

1) Unter welchen Umständen der Theilkreis durch wenige Einstellungsmarken ersetzt werden kann, geht aus der weiteren Beschreibung hervor.

Magnetes, a den Abstand des Schwerpunktes der fest verbundenen Bestandtheile von der Mittelschneide, β den Winkel dieses Abstandes mit der Zeigerrichtung, l_0 und l endlich die Abstände der Endschneiden von der Mittelschneide. Die Grössen Q_0, Q_1 und B sind selbstverständlich auf absolutes Maass bezogene Schwerkräfte.

Wird die Wage nun um 180° auf ihrem Zapfen gedreht, so ändert sich mit Bezug auf das System nur das Vorzeichen des Drehmomentes von H. Auf der einen Seite der Wage bleibe die Belastung Q_0 ungeändert; durch ein entsprechendes Gewicht Q_2 kann der Wagebalken unter demselben Neigungswinkel γ abermals zum Einspielen gebracht werden. Sei dies geschehen, so ist:

$$(2) \quad \begin{cases} Q_0 l_0 \cos\gamma + Ba \sin(\beta+\gamma) + VM' \sin\alpha+\gamma) \\ \quad - HM' \cos(\alpha+\gamma) - Q_2 l \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Dass dieselbe Neigung des Balkens stattfindet, ist daran zu erkennen, dass der Zeiger der Wage vorher und nachher auf denselben Punkt der Scala weist, da diese an der Drehung theilnimmt. Aus der Differenz der beiden Gleichungen verschwinden die Glieder mit Q_0, B und V, falls V und M' denselben Werth behalten. Nun ist M' im allgemeinen verschieden wegen des inducirenden Einflusses der Erde. Dieser an sich geringe Einfluss kann jedoch als völlig gleich gelten, wenn die Magnetaxe in beiden Fällen nahe senkrecht auf der Richtung von H steht, d. h. wenn α und γ nicht gross sind. Unter letzterer Voraussetzung wird das V enthaltende Glied klein. Man kann also auch von dem Einflusse der Variationen von V selbst unter ungünstigen Umständen absehen.

Ich will zunächst den speciellen Fall im Auge behalten, dass die Magnetaxe in die Schwingungsebene fällt, dass also der Magnet beim Spielen der Wage ungefähr lothrecht steht. Dann ist M' das magnetische Moment M selbst. Die beiden Operationen, welche ich zusammen eine Doppelwägung nennen will, ergeben:

$$HM(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\gamma) = \tfrac{1}{2}(Q_1 - Q_2) l.$$

Je kleiner α ist, desto mehr verschwindet der Einfluss von γ. Beträgt α weniger als zehn Minuten, so wird mit

grosser Annäherung HM durch $\frac{1}{2}(Q_1 - Q_2).l$ gemessen, selbst wenn γ mehrere Winkelgrade beträgt.[1])

In dem obigen theoretischen Schema bedeutet der Zeiger ein Loth auf die Ebene der drei Schneiden. Dass derjenige Zeiger, welcher in Wirklichkeit die Einstellungen und Ausschläge markirt, mit diesem Loth nicht nothwendig zusammenfallen muss, braucht wohl kaum erwähnt zu werden. Die Wägungsoperationen können auch in der bekannten Weise mit schwingender Wage und Umkehrpunkten ausgeführt werden, wenn nur die aus den Umkehrpunkten abgeleiteten Einstellungen jedesmal auf denselben sonst willkürlichen Punkt der Scala bezogen werden. Bei den unten mitgetheilten Beobachtungen bestand der Zeiger aus einer am unteren Magnetende befestigten, sehr feinen Messingnadel, deren Bewegung vor einer kleinen Scala mit dem Fernrohr beobachtet wurde. Will man sich der Spiegelbeobachtung mit Fernrohr und Scala bedienen, so müssen letztere an der Umdrehung theilnehmen. Es ist nicht schwierig, eine dementsprechende Vorrichtung in kleinen Dimensionen an dem Gehäuse anzubringen, ähnlich wie ich es an anderen Instrumenten mit Erfolg bereits versucht habe.

Wenngleich die Verticalcomponente V aus dem Resultat der Doppelwägung verschwindet, so übt sie doch einen Einfluss aus, und zwar auf die Empfindlichkeit. Da diese nur bei der Bestimmung der kleinsten Bruchtheile der Gewichte in Frage kommt, so genügt eine Näherungsformel. Man findet aus (1) und (2) leicht, dass eine kleine Gewichtszulage Δ an der spielenden Wage eine Drehung δ hervorruft, welche durch:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{l.\Delta}{B.a.\cos\beta + VM}$$

bestimmt ist. Wird die Wage in bekannter Weise auf grosse Empfindlichkeit eingestellt, so rückt der Schwerpunkt der

1) Von der Aenderung von H in dem Zeitraume einer Doppelwägung ist abgesehen; diese Vernachlässigung scheint mir in den meisten praktischen Fällen erlaubt zu sein. Unter welchen Voraussetzungen und in welcher Weise gleichzeitig stattfindende Variationsbeobachtungen zu berücksichtigen sind, kann auf Grund der obigen Betrachtungen leicht angegeben werden.

fest verbundenen Massen über die Mittelschneide, ohne dass das System aufhört, stabil zu sein. Den Einfluss des V enthaltenden Gliedes beobachtet man leicht, indem eine erhebliche Schwächung des Magnetes sofort eine Erhöhung der Empfindlichkeit zur Folge hat. Da bei den Beobachtungen immer nur kleine Belastungen vorkommen, so kann der Balken sehr dünn sein, sodass die Masse des beweglichen Systemes sich hauptsächlich auf den Magnet beschränkt. Namentlich ist zu beachten, dass die Schalen sehr leicht sein können. Der letztere Umstand kommt, wenn auch nicht der oben definirten Empfindlichkeit, so doch der Beweglichkeit der Wage zu Gute. Die Adhäsion und Reibung an den Endschneiden wird klein, das Instrument gibt selbst bei nicht ganz vollkommener Beschaffenheit dieser Schneiden kleine Veränderungen der Drehmomente sicherer an. Die Schalen der zu den unten mitgetheilten Beobachtungen benutzten Wage bestanden aus leichten Metallscheibchen, welche mittelst sehr zarter, federnder Kupferblechbügel direct an die Endschneiden angehängt waren. Die Masse einer Schale sammt Bügel betrug nur 0,41 g. Die Endschneiden waren Ringschneiden aus Messing, welche ich übrigens durchaus nicht als zweckmässig empfehlen will. Theoretisch würde dem Bedürfniss durch eine einarmige Wage genügt werden. Aus nahe liegenden Gründen habe ich die symmetrische Gestalt des Balkens beibehalten.

Von der nahe richtigen Einstellung des Magnetes überzeugte ich mich auf folgende Weise. Der Magnet bestand aus zwei gleichgrossen Lamellen von zusammen 332 g Gewicht. Dieselben waren mitten durchbohrt und parallel zu einander diesseits und jenseits des Messingbalkens so an diesem befestigt, dass die Drehkante der Mittelschneide thunlichst genau durch die Mitten der Lamellen ging. Die Lamellen waren nach der bekannten, von Lamont häufig benutzten Form an den Enden dachförmig zugespitzt. Ihre Länge betrug etwa 250 mm und war nahe gleich der Entfernung der Entschneiden voneinander. Die von dem Balken und den Lamellen gebildete kreuzförmige Anordnung wurde mit passender Unterlage auf die drehbare Platte des Theil-

kreises gelegt und die Mittelschneide mit der Drehaxe parallel gerichtet. Diese Einstellung geschah mit Benutzung der Spiegelbilder auf den beiden polirten Schneidenflächen ähnlich wie beim Reflexionsgoniometer. Zugleich wurde die Kante in die Drehaxe selbst gerückt. Nun wurde ein Fernrohr mit Fadenkreuz so eingestellt, dass bei der Drehung am Theilkreise nacheinander die Bilder der Endschneiden und der Lamellenenden durchs Gesichtsfeld liefen. Passiren die Enden ein und derselben Lamelle das Sehfeld in gleicher Höhe, so steht die Lamelle senkrecht zur Schneide, sind die Drehwinkel, gemessen zwischen je einem Lamellenende und den beiden Endschneiden, gleich gross, so steht die Lamellenaxe senkrecht auf der Ebene der Endschneiden. Es ergab sich, dass keine für die Zwecke meiner Beobachtungen in Betracht kommenden Abweichungen vorhanden waren. Zugleich ergab sich, dass der Winkelabstand der Endschneiden nahe 180° betrug. Die Lamellen waren in der Axe einer Spirale magnetisirt worden. Da das beschriebene Verfahren das Zusammenfallen der magnetischen mit der geometrischen Axe voraussetzt, so muss es bei strenger Anforderung durch ein besseres ersetzt werden. Ich habe andere Prüfungsmittel bisher nicht untersucht, will aber bemerken, dass mir eine einfache und den Anforderungen ensprechende Probe in der bifilaren Aufhängung geboten zu sein scheint. Der Balken darf an einer empfindlichen Bifilarsuspension in keiner Stellung zum Meridian ein horizontales Drehmoment zeigen, falls er so aufgehängt ist, dass die Ebene der Schneiden horizontal liegt. Von dem letzteren Umstande könnte man sich durch Libellen versichern, welche vorher in geeigneter Weise an der Wage regulirt sind.[1])

1) Die Wage selbst gibt übrigens ein indirectes Hülfsmittel an die Hand, um die Stellung des Magnetes in der Hauptsache zu controliren. Man bestimme HM zunächst, indem der Arm l um einen beliebigen, aber bei beiden Wägungen übereinstimmenden kleinen Winkel γ nach aufwärts einsteht; dann wiederhole man die Doppelwägung, indem derselbe Arm ein wenig nach abwärts neigt. Die beiden Doppelwägungen unterscheiden sich durch Grösse und Vorzeichen von γ; ergeben beide dasselbe Resultat, so ist die Einflusslosigkeit von γ, d. h. die genügende

Die Länge des Hebelarmes l, an welchem die Bestimmung von $Q_1 - Q_2$ vorgenommen wurde, ergab sich aus der Entfernung der Endschneiden und dem durch vertauschte Wägung in bekannter Weise ermittelten Verhältniss $l_0 : l$.

Ueber die Operation des Wägens ist noch das Folgende zu bemerken. Selbstverständlich darf die Wage nicht, während sie schwingt, gedreht werden. Das Abheben und Wiederaufsetzen des Balkens mittelst der Arretirungsvorrichtung halte ich für unsicher, falls es sich um sehr feine Differenzwägungen handelt, da bei dieser Manipulation aus leicht ersichtlichen Gründen häufig kleine Ruhelagenverschiebungen vorkommen. Ich verfuhr daher folgendermassen. Nachdem die erste Wägung vollendet war, legte ich auf die Schale eine Zulage von 2 g, sodass sich das betreffende Balkenende auf einen mit der Tragsäule verbundenen festen Anschlag mit Korkpolster auflegte. In diesem Zustande wurde die Drehung um 180° bewerkstelligt. Nach Entfernung der obigen Zulage fand dann die zweite Wägung statt. Aus denselben Gründen wurde das Auflegen und Abheben der kleinen Gewichtsstücke, wenn nöthig, bei frei schwingender Wage vorgenommen, was bei der elastischen Beschaffenheit der Schalenaufhängung ganz unbedenklich war. Das Gehäuse war zu diesem Zwecke mit kleinen verschliessbaren Oeffnungen versehen.

Endlich ist zu erwähnen, dass eine Wage, welche den angegebenen Constructionsbedingungen entspricht, keines anderweitigen Hülfsmittels zur Orientirung bedarf. Um die Schwingungsebene in den Meridian zu stellen, dreht man entweder die Wage versuchsweise auf dem Theilkreise, bis die das Gleichgewicht herstellende Belastung einer Schale ein Maximum oder Minimum wird, oder — zweckmässiger — man bringt die Wage in irgend einer Stellung durch Gewichte zum Einspielen und dreht sie dann unter Anwendung der besprochenen Vorsichtsmaassregel so lange, bis sie bei demselben Gewichte wieder einspielt. Die Halbirung des

Kleinheit von α bewiesen. Selbstverständlich würde die Ausführung eine vorzügliche Schneide voraussetzen.

Drehwinkels ergibt die Meridianstellung mit erheblicher Genauigkeit.

In dem Folgenden will ich einige Zahlenergebnisse aus meinen Beobachtungen mittheilen, um die Sicherheit und Genauigkeit der Wägungsoperationen darzuthun. Die oben beschriebene Wage hatte ich anfänglich zu Vorlesungszwecken bauen lassen; die Mittelschneide[1]) ruhte auf Stahllagern. Da ich bemerkte, dass das Instrument trotz seiner rohen Beschaffenheit bis auf etwa $^1/_{1000}$ übereinstimmende Wägungen ergab, so liess ich die Mittelschneide sorgfältig bearbeiten und versah sie mit genau justirten, ebenen Unterstützungsplatten aus Achat. Die Endschneiden blieben unverändert, jedoch vertauschte ich die constant belastete Schale (Q_0) mit einem etwas schwereren Messingbügel, dessen nach innen zugeschärfte Biegung auf der betreffenden Endschneide auflag.

In den folgenden Tabellen ist die „nördliche", resp. „südliche" Richtung des Armes l, an welchem die zu belastende Schale hing, durch n, resp. s gekennzeichnet. Das Nordende des Magnetes zeigte abwärts, sodass $Q_1 > Q_2$ war.

Die Empfindlichkeit wurde vermittelst einer am oberen Magnetende befindlichen Schraube so regulirt, dass bequem mit schwingender Wage gearbeitet werden konnte. Bei den unten mitgetheilten Beobachtungen entsprach einer Zulage von 1 mg eine mittlere Verschiebung des Einstellungspunktes von 3,63 Scalentheilen. Die Mitte der Scala entsprach der Lesung 12,5. Bei jeder Wägung wurde die Schale soweit mit ganzen Milligrammstücken belastet, dass der Zeiger hinreichend nahe der Mitte oscillirte. Die Decimalen ergaben sich für die Bestimmung von $Q_1 - Q_2$ aus der auf Milligramm reducirten Differenz der beiden Einstellungen des Zeigers. In den Tabellen ist diese Differenz zu der Differenz der Schalenbelastungen zu addiren, da die Scala von links nach rechts getheilt war, und der Beobachter den Arm l zur Rechten hatte.

Die eben besprochene Art, kleine Bruchtheile des Milli-

1) Dieselbe bestand aus glashartem Stahl; selbstverständlich ist die Anwendung eines unmagnetischen Materials vorzuziehen.

grammes durch grossen Zeigerausschlag zu messen, will ich jedoch keineswegs als zweckmässig bezeichnen. Die Discussion der Gleichung (3) ergibt, dass der durch 1 mg bewirkte Ausschlag um so mehr von den Variationen der im Nenner vorkommenden Grössen, also auch von der Temperatur beeinflusst wird, je grösser dieser Ausschlag ist. Der oben angegebene Mittelwerth gilt bei den nachstehenden Beobachtungen auch nur innerhalb der engen Grenzen, in denen sich die Beobachtungstemperaturen bewegten. Viel zweckmässiger ist es ohne Zweifel, die Empfindlichkeit der Wage herabzustimmen, dafür aber die Winkelablesung durch optische Hülfsmittel zu verfeinern, welche meinem Instrumente fehlten.

Wenn ich nun rasch nach einander eine grössere Anzahl von Wägungen jedesmal bei umgekehrter Stellung des Balkens vornahm, so bemerkte ich meistens eine allmähliche Zu- oder Abnahme von $Q_1 - Q_2$. Es ist nöthig, zu entscheiden, ob diese Veränderungen dem zu messenden Drehmomente HM oder etwaigen Veränderungen in dem Zustande der Wage zuzuschreiben sind. In der Hauptsache liefert die Methode selbst ein bequemes Hülfsmittel der Controle, welches ich an den Beobachtungen in Tabelle I erläutern will. Diese Beobachtungen fanden unter ungünstigen

I.

Richtung von l	1. Belastung der Schale mg	2. Einstellung des Zeigers Scalenth.	3. Differenzen der Einstellungen Scalenth.	4. mg	5. Reducirte Werthe mg	6. Mittel der Einstellungen
n	342	14,66				
			2,71	0,75	0,75	13,31
s	164	11,95				
			2,70	0,74	0,76	13,30
n	342	14,65				
			2,61	0,72	0,75	13,35
s	164	12,04				
			2,44	0,67	0,72	13,26
n	342	14,48				
			2,30	0,63	0,70	13,33
s	164	12,18				
			2,32	0,64	0,73	13,34
n	342	14,50				
			2,16	0,60	0,70	13,42
s	164	12,34				
			2,26	0,62	0,74	13,47
n	342	14,60				
			2,27	0,63	0,77	13,46
s	164	12,33				
			2,19	0,60	0,75	13,42
n	342	14,52				
			2,18	0,60	0,77	13,43
s	164	12,34				
			2,03	0,56	0,75	13,36
n	342	14,37				
				Mittel	0,74	13,37

Verhältnissen, nämlich vormittags bei rasch zunehmender Temperatur statt, indem das nach Süden gelegene Beobachtungslocal zum Theil den directen Sonnenstrahlen ausgesetzt war.

Die Einstellungen in Columne 2 sind aus je fünf Umkehrpunkten erhalten. Aus den Beobachtungen in 1 und 2 folgen zwölf Werthe der Differenz $Q_1 - Q_2$, welche man in Milligrammen erhält, indem man zu $342-164 = 178$ die betreffenden Decimalen aus 4 addirt. $Q_1 - Q_2$ nimmt also langsam von 178,75 mg bis 178,56 mg ab. Je zwei benachbarte Werthe stimmen jedoch sehr nahe überein. Nimmt man von irgend zwei benachbarten Zahlen der Columne 2 nicht die Differenz, sondern das arithmetische Mittel, so erhält man denjenigen Punkt der Scala, bei welchem die Wage durch die Belastung $\frac{1}{2}(342 + 164)$ mg einspielen würde, falls sie bei der betreffenden Beobachtung von dem Einflusse der Horizontalintensität befreit wäre.[1]) Nun sind in Columne 6 die successiven Mittelwerthe der Einstellungen zusammengestellt. Sie sind als constant zu betrachten, da eine Einheit der letzten Decimale $^1/_{363}$ mg bedeutet und somit die grösste Abweichung vom Mittel ($^1/_{36}$ mg) auf Lesungsfehlern beruhen kann. Die von der Horizontalkraft befreite Wage hat also während der Versuchsdauer keine merkliche Störung der Gleichgewichtslage erfahren. Eine solche Störung

1) Bezeichnet man mit G_1, resp. G_2 die Belastungen, welche bei nördlicher, resp. südlicher Stellung der Schale vom Gewichte S auf diese aufgelegt wurden, mit q_1, resp. q_2 die zugehörigen Einstellungen des Zeigers, die Scalentheile jedoch in Milligramm umgerechnet, so ergeben sich diejenigen Gesammtbelastungen der Endscheide, welche vor und nach der Umdrehung den Zeiger auf den mittleren Theilstrich bringen würden, wie folgt

$$Q_1 = G_1 + \frac{q_1 - q_2}{2} + S, \qquad Q_2 = G_2 - \frac{q_1 - q_2}{2} + S.$$

Hieraus folgt $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) + S$. Innerhalb je zweier benachbarter Einstellungen kann man von der Aenderung von HM absehen. Daher fällt, wenn man nach Analogie der früheren Formeln (1) und (2) die Gleichgewichtsgleichungen für die beiden Stellungen der Wage aufstellt und addirt, das Glied mit HM heraus. Die halbe Summe der Gleichungen enthält $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$ und drückt den oben bezeichneten Gleichgewichtsfall aus.

bemerkt man an den Mittelzahlen sofort, z. B. wenn der Balken abgehoben und wieder aufgesetzt worden ist (s. unten). Die Constanz der mittleren Einstellung sagt selbstverständlich über den Temperatureinfluss auf das messende Drehmoment $\frac{1}{2}(Q_1 - Q_2).l$ nichts aus. Dieser Einfluss ist im allgemeinen zu berücksichtigen, kommt aber bei einer beschränkten Anzahl rasch wiederholter Wägungen nicht in Betracht. Die Temperatur stieg während der reichlich dreiviertelstündigen Zeitdauer der obigen Versuchsreihe um etwa $2^1/_2{}^0$. Die daraus berechnete Verlängerung von l würde nur einen Unterschied von 0,008 mg des ersten und letzten Wägungsresultates erklären. Die beobachtete Veränderung scheint mir übrigens im vorliegenden Falle schon aus dem Temperatureinflusse auf das magnetische Moment M hinreichend erklärlich zu sein.[1]) Ein Umstand kann allerdings noch in Frage kommen. Ich bin nicht ganz sicher, ob nicht der Balken bei dem zwölfmaligen Stellungswechsel gegen seine Unterstützung und somit auch gegen den Meridian eine kleine Verdrehung erfahren hatte, welche aus der mittleren Einstellung selbstverständlich nicht erkannt werden konnte. Der Einfluss einer solchen Verdrehung würde jedenfalls klein sein, da dieselbe mit dem Cosinus in das Resultat eingeht. Bei den späteren Beobachtungen habe ich mich von ihrer Abwesenheit durch Marken an der Arretirungsvorrichtung, welche den Balken vor und nach sämmtlichen Wägungen abhob, überzeugt. Fehler der bezeichneten Art würden übrigens bei der Benutzung einer geeigneten Spiegelablesung sofort mit Schärfe erkannt werden.

Wenn man voraussetzt, dass die beobachtete Veränderung eine gleichförmige gewesen sei, und danach die Zahlen in Columne 4 durch Addition von $(n-1).0{,}017$ mg zum $n$ten Gliede auf den Anfangszustand reducirt, so erhält man die sehr gut übereinstimmenden Zahlen der Columne 5. Zuweilen ergaben sich Beobachtungen, bei welchen durch längere Zeit Veränderungen des magnetischen Drehmomentes nicht bemerklich waren. So erhielt ich z. B. an einem anderen Tage rasch nach einander die Wägungen:

1) Ein Intensitätsvariometer war nicht aufgestellt.

179,15 179,12 179,12 179,10 179,11 mg
179,12 179,13 179,09 179,10 mg.

Hier sowohl als auch in Columne 5 der Tabelle I beträgt die grösste Abweichung vom Mittel noch nicht $^1/_{4000}$ der zu wägenden Grösse. Man kann danach ungefähr die Sicherheit einer einzelnen Doppelwägung bemessen, freilich unter Voraussetzung sehr vorsichtiger Behandlung der Wage. Grössere Uebereinstimmungen erhalte ich auch nicht bei Ablenkungsbeobachtungen am Magnetometer mit Spiegel und Scala, von ganz besonders günstigen Umständen vielleicht abgesehen. Jedoch zweifle ich nicht, dass Wagen gebaut werden können, welche unter den in Rede stehenden Verhältnissen noch genauere Resultate ergeben.

Es gibt übrigens ein einfaches Mittel, um die vorhergehenden Angaben zu bestätigen. Stellt man die Schwingungsebene in die Westost-Richtung ein und überlässt die Wage sich selbst, so ist sie den Declinationsvariationen unterworfen. Unter Voraussetzung der oben bezeichneten Genauigkeit muss eine Declinationsschwankung von einer Minute einen wahrnehmbaren Einfluss auf die Einstellung haben. Dies war in der That der Fall. Ich äquilibrirte die Wage in der bezeichneten Lage durch geeignete Schalenbelastung und liess sie durch 48 Stunden auf der Schneide balanciren. In zehn ganz willkürlichen Zeitpunkten wurde der Stand des Zeigers mit starker Fernrohrvergrösserung bis auf $^1/_{20}$ Scalenth. abgelesen und zugleich der Stand einer gedämpften Spiegelbussole notirt, welche selbstverständlich dem Einflusse der Wage entzogen war. Die Zahlen der Tabelle II, bei denen die Ablesungen an der Spiegelbussole zugleich Winkelminuten bedeuten, sind ohne weiteres verständlich.

Bezieht man die Aenderungen auf irgend eine der Beobachtungen als Ausgangspunkt, z. B. auf die für die Lesungen an der Wage bequem gelegene siebente Beobachtung, so erkennt man aus den betreffenden Zahlen der beiden letzten Columnen, dass die Variationen der Declination mit denen der Wagenstände so nahe proportional gehen, als es überhaupt erwartet werden konnte. Die Scalenablesungen

an der Wage geben die Declinationsvariationen in durchschnittlich etwas mehr als zehnfach verkleinertem Maassstabe wieder, was auch der Rechnung entspricht. Die geringe Veränderlichkeit der Beobachtungstemperatur mag dem Experimente allerdings günstig gewesen sein.[1])

II.

Zimmer-temperatur C°	Ablesungen an der Bussole	Ablesungen an der Wage	Aenderungen der Declination	Aenderungen d. Standes der Wage
20,3	508,6	11,35	— 1,7	—0,15
20,8	508,0	11,25	— 2,3	—0,25
19,1	517,6	12,10	+ 7,3	+0,60
19,4	511,0	11,55	+ 0,7	+0,05
19,5	506,9	11,15	— 3,4	—0,35
20,0	507,0	11,20	— 3,3	—0,30
20,2	510,3	11,50	± 0,0	±0,00
20,0	513,6	11,80	+ 3,3	+0,30
19,4	514,5	11,90	+ 4,2	+0,40
18,6	520,6	12,30	+10,3	+0,80

In dem Folgenden gebe ich ein Beispiel für die Bestimmung der Horizontalintensität. Der Raum, in welchem die Beobachtungen stattfanden, war keineswegs für erdmagnetische Arbeiten bestimmt. Derselbe war aussergewöhnlich starken magnetischen Localeinflüssen unterworfen, welche den niedrigen Stand der mittleren Intensität völlig erklären.[2]) Selbstverständlich waren veränderliche Localeinflüsse soweit ausgeschlossen, dass zufällige Störungen bei den Beob-

1) Nachdem diese Mittheilung bereits abgeschlossen war, hat mein Assistent J. Freyberg den oben erwähnten Einfluss der Declinationsschwankungen durch genauere Beobachtungen mit Spiegelablesung bestätigt.

2) Der betreffende Gebäudetheil enthält eiserne Deckenbalken, deren Längsrichtung ungefähr in den Meridian fällt. Ausserdem befindet sich, von anderen Eisenmassen abgesehen, unter dem Raume eine grosse Luftheizungsanlage mit etwa funfzig eisernen Heizröhren von 260 mm Durchmesser und mehr, welche ebenfalls die angegebene Richtung haben. Dass die Intensität am Orte des Magnetometers vermuthlich einen merklich anderen Werth besass, als bei der Wage, kommt nicht in Betracht, da es mir nur auf die vergleichsweise Prüfung der Wägungsoperationen ankam. Für die Wahl des Locals entschied die Abwesenheit von Erschütterungen.

achtungen nicht stattfanden. Am 14. Juli waren von J. Freyberg in demselben Raume unmittelbar nacheinander zwei Bestimmungen nach der Gauss'schen Methode ausgeführt worden, bei welchen die Schwingungen registrirt und die wichtigsten Correctionen mit Einschluss des inducirten Magnetismus berücksichtigt waren. Dabei hatten sich für H die Zahlen 1,8260 und 1,8283 [$mm^{-1/2} mg^{1/2} sec^{-1}$] ergeben. Auch mit dem Silbervoltameter und der Tangentenbussole war nahe derselbe Werth gefunden worden. An dem Orte des Schwingungsapparates wurde die Wage aufgestellt; das Ablenkungsmagnetometer blieb an seinem Platze. Es war Vorsorge getroffen, dass der Magnet sammt Wagebalken sofort nach der Wägung auf einem mit Einstellungsmarken versehenen Schlitten befestigt und dem Magnetometer, einer kleinen Spiegelbussole, in erster Hauptlage gegenübergestellt werden konnte. Die Berechnung von H geschah nach den Formeln:

$$HM(1 + k) = \tfrac{1}{2}(Q_1 - Q_2) . lg ,$$

und:

$$2M\left(1 + \frac{\varkappa}{r^2}\right) = H . r^3 (1 + \Theta) \operatorname{tg} \varphi ,$$

worin die beiden Q nunmehr die Bedeutung von Massengrössen haben. Der bei der Wägung durch die Verticalintensität inducirte Magnetismus ist durch die Correction k berücksichtigt, welche für vorliegenden Zweck mit hinreichender Annäherung als constant gelten kann. Sie wurde nach bekannter Methode bestimmt und betrug für meine Lamellen 0,00877. Die ein für alle mal bestimmte Constante $\varkappa$ des zweiten Gliedes der Ablenkungsbeobachtung betrug 20669,7 mm^2; sie stimmt gut mit der Angabe von Kohlrausch überein, dass der aus dem zweiten Gliede gefolgerte „Polabstand" auf $^5/_6$ der Stablänge zu schätzen sei. Ferner kommen in Rechnung:

Schwerebeschleunigung für Dresden . . $g = 9809{,}81$ mm sec^{-2}
Torsionsverhältniss der Ablenkungsbussole $\Theta = 0{,}00129$
Länge des Hebelarmes . . . . . $l = 124{,}95$ mm.

Am 1. September vormittags wurden unmittelbar nacheinander zwei vollständige Bestimmungen ausgeführt, jede aus vier Wägungen und vier Ablenkungen bestehend. Letztere

beziehen sich auf den mittleren Abstand $r = 965{,}3$ mm. Der Kürze halber sind für die Ablenkungen nur die Mittel angegeben.

III.

Erste Bestimmung

1 Belastung der Schale mg	2 Einstellung des Zeigers	3 Differenz der Einstellungen Scalenth.	3 Differenz der Einstellungen mg	4 Mittel der Einstellungen
(*n*) 342	14,87	—	—	—
(*s*) 164	11,68	3,19	0,88	13,28
(*n*) 342	14,80	3,12	0,86	13,24
(*s*) 164	11,77	3,03	0,84	13,29

Mittelwerth $Q_1 - Q_2 = 178{,}86$
Mittlere Ablenkung $\varphi = 4^\circ\,13'\,10''$
Anfangstemperatur $= 21{,}2^\circ$

$[\text{mm}^{-1/2}\,\text{mg}^{1/2}\,\text{sec}^{-1}]$ $H = 1{,}82847$

Zweite Bestimmung

1 Belastung der Schale mg	2 Einstellung des Zeichers	3 Differenz der Einstellungen Scalenth.	3 Differenz der Einstellungen mg	4 Mittel der Einstellungen
(*s*) 164	11,48	—	—	—
(*n*) 342	14,34	2,86	0,79	12,91
(*s*) 164	11,55	2,79	0,77	12,95
(*n*) 342	14,31	2,76	0,76	12,93

$Q_1 - Q_2 = 178{,}77$
$\varphi = 4^\circ\,13'\,0''$
Endtemperatur $= 22{,}3^\circ$

$H = 1{,}82862$

Auch hier sieht man aus den Columnen 3, dass die Wage während der Wägungsoperationen eine langsame Veränderung des magnetischen Drehmomentes anzeigte, welche sich aus der ersten Bestimmung in die zweite hinein fortsetzte, und zwar über die inzwischen stattgehabte erste Ablenkungsbeobachtung hinweg. Die grosse Regelmässigkeit dieser Veränderung ist allerdings als Zufall anzusehen. Zugleich zeigen die zur Controle gerechneten Zahlen unter 4, dass sich innerhalb eines und desselben Wägungssatzes die Einstellung der von der Horizontalkraft befreiten Wage

durchaus nicht geändert hatte. Wohl aber war durch das Abheben und Wideraufsetzen des Balkens eine dauernde Verschiebung des mittleren Einstellungspunktes vor sich gegangen. Auf die Wägungen innerhalb des zweiten Satzes hat das keinen Einfluss; höchstens hat man in solchem Falle durch Zulage von 1 mg zu prüfen, ob die Empfindlichkeit unverändert geblieben ist.

Der Umstand, dass je eine Wägungsbeobachtung mit je einer nachfolgenden Ablenkung combinirt wurde, ist dadurch gerechtfertigt, dass es weniger Zeit kostete, die Wage auseinander zu nehmen, als sie wieder zusammenzusetzen. Uebrigens ergibt die Combination der ersten Ablenkungsbeobachtung mit der zweiten Wägung einen Werth für H, welcher sich von den in der Tabelle angegebenen Zahlen auch nur in den Einheiten der vierten Decimalstelle unterscheidet. Diese gute Uebereinstimmung ist nicht Zufall. Die Resultate, welche ich an zwei anderen Tagen aus unmittelbar nacheinander angestellten Beobachtungen erhielt, zeigten ebenfalls den oben bezeichneten Grad der Uebereinstimmung. Am 30. August erhielt ich nacheinander 1,8284 und 1,8291, Tags darauf übereinstimmend 1,8295 und 1,8295. Leider konnten gleichzeitige Variationsbeobachtungen, um alle Resultate aufeinander zu beziehen, nicht angestellt werden. Ueberhaupt will ich nicht in Zweifel ziehen, dass das beschriebene Wägungsverfahren noch in manchen Einzelheiten zu verbessern wäre. Dass die Umdrehung der Wage genügend langsam, und zwar mit einem geeigneten Kurbelmechanismus zu geschehen hat, ist selbstverständlich. An meiner Wage war ein solcher vorhanden.

Die von F. Kohlrausch angegebene bifilargalvanische oder bifilarmagnetische Methode[1]) bietet den Vortheil, dass man das Product und den Quotienten aus H und M gleichzeitig beobachtet, womit zugleich die Bestimmung des inducirten Magnetismus wegfällt. Ich glaube, dass dieser Vor-

1) Vgl. die oben citirte Abhandlung. Ich kann über die Methode nicht aus eigner Erfahrung sprechen, möchte jedoch zu Gunsten der Wägung bemerken, dass dieselbe nur eine Längenmessung, nämlich die des Schneidenabstandes, anstatt dreier beim Bifilarapparat fordert.

theil auch bei der Wägungsmethode erzielt werden könnte. Man stelle sich vor, der Magnet bilde mit der Mittelschneide einen Winkel von etwa 45°, seine Axe liege bei horizontal gestelltem Balken in der durch die Mittelschneide gelegten Verticalebene. Sei die Wage wieder wie oben in den Meridian gestellt, so geht die in die Schwingungsebene fallende Componente des magnetischen Momentes nach Gl. (1) und (2) in die Wägungsbeobachtung ein, während die Componente nach der Schneidenrichtung hauptsächlich die Fernewirkung des Magnetes in dieser Richtung bestimmt. An einem in dieser letzteren Richtung aufgestellten Magnetometer würde zugleich mit der oben besprochenen Doppelwägung der doppelte Ablenkungswinkel beobachtet werden können. Für die Ermittelung des Winkels zwischen der Magnetaxe und der Schneide und für die genaue Einstellung des Magnetometers, auf welche es freilich ankommen würde, lassen sich geeignete Methoden vorschlagen.

Dass für die Bestimmung der verticalen Componente des Erdmagnetismus ein ähnliches Wägungsverfahren eingeschlagen werden kann, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Man benutzt, wie beim Wild'schen Variationsinstrumente[1]), einen in horizontaler Lage auf einer Schneide spielenden Magnet, welcher jedoch mit Schalen zu versehen ist. Die Einflüsse der Horizontalintensität werden dadurch beseitigt, dass die Wägungen bei westöstlicher Stellung des Magnetes stattfinden. In die Doppelwägung tritt an Stelle der Umdrehung die Ummagnetisirung des Magnetes ein, welche vermittelst einer Magnetisirungsspirale nöthigenfalls ohne Zerlegung des Instrumentes bewerkstelligt werden kann. Das Product $(Q_1 - Q_2).l$ misst die Grösse $V.(M_1 + M_2)$, unter M_1 und M_2 die im allgemeinen verschiedenen magnetischen Momente vor und nach dem Ummagnetisiren verstanden. Das Verhältniss dieser Momente kann gleichzeitig mit den Wägungen aus der Wirkung auf ein in der Richtung des Balkens aufgestelltes Magnetometer erkannt werden, zu welchem Zwecke die Wage um die verticale Axe drehbar

1) Vgl. Th. Edelmann, die erdmagnetischen Apparate der Polarexpedition im Jahre 1883, Münch. 1882.

zu machen ist. Der obsolute Werth von M_1 oder M_2 kann vorher oder nachher durch Vergleich mit einem Magnete von bereits bekanntem Momente bestimmt werden. Aus vorläufigen Versuchen glaube ich schliessen zu dürfen, dass das angedeutete Verfahren sich bei der praktischen Ausführung hinreichend einfach gestalten werde, um auch für die Verticalintensität brauchbare Bestimmungen zu ergeben.

VII. *Ein einfacher Versuch zur Versinnlichung des Zusammenhanges zwischen der Temperatur eines glühenden Drahtes und der Zusammensetzung des von ihm ausgehenden Lichtes;* *von Wilhelm von Bezold.*

Die längst bekannte, schon in den Bezeichnungen Rothgluth und Weissgluth zum Ausdrucke gebrachte Thatsache, dass die Zusammensetzung des von einem glühenden Körper ausgestrahlten Lichtes in hohem Grade von der Temperatur abhängig ist, und dass bei Steigen der letzteren die brechbareren Strahlen immer stärker vertreten werden, hat in neuerer Zeit erhöhtes Interesse gewonnen, da ein richtiges Verständniss derselben für die Beurtheilung electrischer Beleuchtungsarten von grösster Bedeutung ist.[1])

Dies veranlasst mich, einen Versuch zu beschreiben, den ich schon vor etwa zehn Jahren gemacht und auch bei Gelegenheit von Vorlesungen vorgezeigt habe, der die genannte Thatsache in ungemein einfacher und lehrreicher Weise versinnlicht:

Bringt man einen horizontal gespannten Draht, am besten einen Platindraht[2]), in die Flamme eines Bunsen'schen Gasbrenners, und zwar nahe an die Spitze derselben, so zeigt der Draht in der Mitte eine weissglühende Stelle,

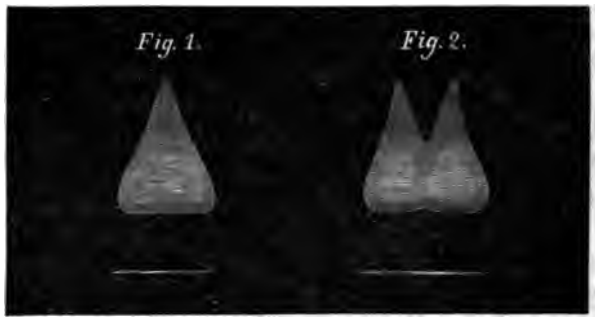
1) S. Wilh. Siemens, Electrotechn. Zeitschr. 4. p. 113 ff. 1884.

2) Nicht zu dünner Eisendraht eignet sich ebenfalls zu dem Versuche, während Kupferdraht für diesen Zweck nicht zu gebrauchen ist.

an welche sich nach beiden Seiten hin rothglühende allmählich immer schwächer leuchtende Stücke anschliessen.

Betrachtet man nun den glühenden Draht durch ein Prisma mit horizontal liegender brechender Kante, und zwar so, dass das violette Ende nach oben abgelenkt erscheint, so erblickt man ein Spectrum von der in Fig. 1 abgebildeten Gestalt.

Ueber einer breiten rothen Basis mit abgerundeten Ecken sieht man bei stets abnehmender horizontaler Erstreckung der Reihe nach die Spectralfarben, sodass das ganze Bild nach oben in eine verwaschene violette Spitze ausläuft. Man hat den Eindruck, als habe man eine Flamme vor sich, die, unten sehr breit, sich stark nach oben zuspitzt und dabei von unten nach oben in den Spectralfarben gefärbt ist, so zwar, dass nach der Spitze hin immer brechbarere Farben erscheinen.



Dieser Versuch zeigt auf einen Blick, dass das glühende Stück des Drahtes seiner ganzen Ausdehnung nach rothes Licht aussendet, dass gegen die Mitte zu aber, wo das Glühen immer stärker wird, demselben mehr und mehr brechbarere Strahlen beigemischt sind.

Rückt man mit dem Drahte tiefer herunter und zugleich in das Innere der Flamme, sodass ein Theil des Drahtes in den dunklen Kern zu liegen kommt, dann zeigt der Draht zwei weissglühende Stellen, die beide nach rechts und links von schwächer glühenden begleitet sind, und das Spectrum gewährt alsdann den Anblick von Fig. 2. Man glaubt, eine Flamme mit breiter rother Basis und zwei violetten Spitzen

zu sehen, während zwischen beiden wieder die Spectralfarben in der bekannten Reihenfolge vertreten sind.

Bei den beiden Figuren wurde jedesmal unten das Bild des glühenden Drahtes beigefügt, wie es sich dem blossen Auge zeigt, und darüber die Erscheinung dargestellt — natürlich ohne Farben —, wie man sie bei Betrachtung durch das Prisma erhält.

Verschiebt man den Draht aus der zuletzt beschriebenen Stellung, wobei er den dunklen Kern durchsetzte, langsam horizontal, sodass er schliesslich den Mantel der Flamme nur mehr berührt, so geht die in Fig. 2 versinnlichte Erscheinung zuerst in die in Fig. 1 dargestellte über. Bei weiterer Annäherung an den Mantel wird aber das flammenartig aussehende Bild immer kleiner und farbenärmer, es erfährt oben und an den Seiten fortgesetzte Abnahme, sodass man zuletzt nur mehr ein ganz kleines Flämmchen zu sehen glaubt, das unten roth und abgerundet, nach oben eine gelbe oder grüne Spitze zeigt.

Bei diesen Versuchen scheint mir besonders ein Punkt Beachtung zu verdienen, und dies ist die krummlinige Begrenzung der rothen Basis, oder wenigstens die Abstumpfung der beiden unteren Ecken.

Diese Eigenthümlichkeit lehrt nämlich, dass mit steigender Temperatur das Spectrum auch nach dem rothen Ende hin eine wenn auch nur unbedeutende Erweiterung erfährt, d. h. dass Strahlen, welche bei mässiger Intensität unsichtbar, mithin zu den ultrarothen zu rechnen sind, bei Erhöhung der Temperatur infolge gesteigerter Helligkeit sichtbar werden. Freilich ist auch dies eine längst bekannte Thatsache, doch tritt sie hier besonders schlagend hervor.

Ueberraschend ist es auch, innerhalb ein und derselben Farbe kein rascheres Wachsthum der Helligkeit vom Rande des flammenartigen Bildes nach der Mitte zu, oder wenn die Erscheinung die in Fig. 2 dargestellte Gestalt besitzt, nach den gerade unterhalb der Spitzen gelegenen Punkten hin zu beobachten, auch wenn der direct betrachtete Draht diese Helligkeitszunahme in sehr auffallender Weise zeigt. Dies beweist, dass das Wachsthum der Helligkeit eines glühenden

festen Körpers bei zunehmender Temperatur vorzugsweise von der Beimischung vorher nicht vertretener stärker brechbarer Strahlen herrührt, und dass die Steigerung der Intensität der auch bei niedrigeren Temperaturen bereits ausgesendeten Strahlen hierbei erst in zweiter Linie in Betracht kommt.

Uebrigens stelle ich nicht in Abrede, dass der Versuch gerade unter dem zuletzt aufgestellten Gesichtspunkte nur beschränkte Beweiskraft besitzt, da subjective Täuschungen gerade nach dieser Richtung hin nicht ausgeschlossen sind.

München, im October 1883.

VIII. *Erwiderung auf Hrn. Voigt's Kritik; von E. Ketteler.*

Der unlängst von Hrn. W. Voigt an anderer Stelle[1]) veröffentlichte Aufsatz: „Ueber den gegenwärtigen Stand der Krystalloptik", bot mir Veranlassung, zum Verfasser desselben in einen näheren Briefwechsel zu treten, und als dessen unerwartete nachträgliche Folge habe ich, wie es scheint, den lebhaften Angriff zu betrachten, den Hr. Voigt kürzlich in den Annalen[2]) gegen mich gerichtet hat.

In jenem Ueberblicke über die Theorien der Doppelbrechung und des Lichtes überhaupt werden dieselben in zwei Kategorien gebracht, je nachdem sie dem in den krystallisirten Medien befindlichen Aether selbst krystallinische Structur beilegen oder nicht. Damit soll eine andere Eintheilung nahezu zusammen fallen, ob man nämlich auf Grund der Hypothese von der molecularen Structur der Körper die Elasticitätstheorie in voller Strenge aufbaut oder dabei wenigstens vorläufig auf Grund der Annahmen, dass die elastischen Reactionskräfte lineare Functionen der Dilatationen sind, und dass das Gesetz der Erhaltung der Energie

1) Voigt, Neues Jahrb. f. Mineralogie. 1. p. 22. 1883.
2) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 691. 1883.

auch auf Krystallbewegungen auszudehnen sei, von der molecularen Grundhypothese absieht. Als der hervorragendste Vertreter der ersteren Richtung gilt dem Verfasser Hr. C. Neumann[1]), „dessen Theorie allein unter allen nur auf der molecularen Hypothese basirt und keine ihr fremden Hülfsannahmen benutzt." Das Ergebniss derselben ist bekanntlich, dass entweder das Gesetz, nach welchem zwei Aethertheilchen auf einander wirken, aus zwei Gliedern besteht, von denen das eine der vierten, das andere der sechsten Potenz ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist, dass dann zugleich Schwingungs- und Polarisationsrichtung auf einander senkrecht stehen, und dabei die Krystallerscheinungen dem Gesetze der Erhaltung der Energie nicht gehorchen, — oder dass anderenfalls, sofern sie letzterem wirklich genügen sollten, das obige Attractionsgesetz hinfällig wird, und Schwingungs- und Polarisationsrichtung zusammenfallen.

Die zweite Behandlungsweise sieht der Hr. Verfasser als nicht völlig befriedigend an, er nennt sie sozusagen „die mathematische", da sie, ohne auf die Molecularwirkungen zurückzugehen, sich mit der Vorstellung einer sehr feinen Substanz (des Aethers) begnüge und mittelst in derselben angenommener Kräfte zu den Gesetzen Fresnel's zu gelangen suche.

Was insbesondere die Dispersionserscheinungen betrifft, so hält auch Voigt die directe Einwirkung der ponderablen Theilchen auf die Aetherbewegung für ein Mittel zur Erklärung derselben, meint aber, dass dasselbe weder theoretisch noch experimentell bisher genügend untersucht sei. Dahingegen verzichtet er vorderhand auf jede mechanische Erklärung der Absorption, die eben auf solange unmöglich sei, als man noch keine Vorstellung über die Wärmebewegung habe, in der die lebendige Kraft des „absorbirten" Lichtes bestehe. Man sieht, dass Hr. Voigt damit alle Erklärungen, namentlich der anomalen Dispersion, sowie dieselben von Sellmeier, Helmholtz, Lommel und mir gegeben sind, gleich vollständig verwirft. Leider verschweigt

1) C. Neumann, Math. Ann. 1. p. 325. und 2. p. 182.

er dabei nur, ob auch Fourier's Theorie der Leitungswärme der gleichen Kritik anheim fallen soll.

Ueber meine Theorie heisst es p. 25: „Wenn Ketteler (und Boussinesq) zwischen den ponderablen und den Aethertheilchen keine oder wenigstens keine merklichen Attractionskräfte wirkend denken, sondern die ponderablen Molecüle als träge Massen im Aetherfluidum schwimmend und von diesem bewegt, aber so wenig verschoben annehmen, dass dabei noch keine merkliche (elastische) Einwirkung der Nachbarmolecüle eintritt, so ist dies allerdings eine anschauliche Vorstellung und ihre Fruchtbarkeit zur Erklärung mannigfaltiger optischer Phänomene gewiss sehr beachtenswerth. Da aber die analytischen Mittel zur Bestimmung der Bewegung eines so complicirten Systemes noch fehlen, so erfordert eine Behandlung dieser Hypothese noch mannigfache, vorläufig willkürliche Annahmen.“ Die offenbar in diesen Sätzen liegende wohlwollende Beurtheilung erscheint in der That um so gerechtfertigter, als meine Auffassung die einzige ist, welche ohne irgend welche theoretische Voreingenommenheit sich mit allen Erfahrungsthatsachen aus dem Gebiete der Dispersion und Absorption sowie der Metall- und Krystallreflexion abzufinden sucht, und welche bei jedem Schritt, den sie vorwärts that, das von Voigt als Willkür Bezeichnete als einen geradezu erdrückenden Zwang empfunden hat. Da indess „tauglichere Kräfte, die mit mehr Geschick die Mechanik der Aetherkörperschwingungen in dem hier bezeichneten Sinne hätten weiter fördern können“[1]), sich nicht vorfanden, so habe ich die übernommene Aufgabe fortgeführt und trotz mehrfacher vorübergehender Schwankungen zu einem gewissen Abschluss zu bringen vermocht.

Wenn bei meinen bisherigen Auseinandersetzungen[2]) mit Hrn. Lommel für mich wesentlich nur materielle Gründe den Ausschlag gaben, so tritt mir jetzt Hr. Voigt in seiner letzten Arbeit[3]) mit der schneidigen Schärfe logischer Prin-

1) Worte von mir in Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 444. 1877.
2) Vergl. insbesondere Wied. Ann. 18. p. 387 und 631. 1883.
3) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 691. 1883.

cipien gegenüber und sucht insbesondere den Beweis zu führen, dass meine Hauptgleichungen den Sätzen der Elasticitätslehre widersprechen. Ohne den Grund zu kennen, der diese plötzliche Aenderung in der Auffassung bewirkt haben mag, werde ich zunächst abwehrend, dann aber im folgenden Aufsatz in positiver Form zeigen, dass der Hr. Gegner den Schwerpunkt meiner Entwickelungen vielfach verrückt und sie missverständlich auffasst.

1) Wenn Hr. Voigt zunächst die Elasticitätstheorie auf jeder Seite seines Aufsatzes gegen mich in Schutz nimmt, so ist ausdrücklich zu constatiren, dass er unter Elasticitätslehre nur die Elasticitätstheorie der festen Körper versteht. Und wenn er ausnahmsweise p. 691 von der Elasticitätslehre als von den Principien der allgemeinen Dynamik und der gebräuchlichen Anschauungen über die Constitution der Materie spricht, so dürfte diese sich von dem ganzen Tenor der Arbeit abhebende Parenthese wohl erst nachträglich eingeschoben sein. Was der Hr. Verf. unter der Constitution der Materie versteht, ist der obigen Ausführung zufolge das Cauchy'sche Punktsystem, und scheinen die Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie über Wesen und Unterschiede der drei Aggregatzustände etc. Hrn. Voigt wohl als allzu hypothetisch, als dass er darauf bauen möchte. Dahingegen hält er Elasticitätstheorie und Hydrodynamik in schulmässiger Starrheit auseinander, und da er diesmal Uebergänge zwischen den beiderseitigen Erscheinungsgebieten nicht mehr zulassen möchte, so betrachtet er meine Formeln schon aus diesem Grunde als unstatthafte Zwitterwesen.

Es wird indes gut sein, die Hrn. Voigt möglicher Weise unbekannt gebliebene experimentelle Grundlage jeder Dispersionstheorie, sowie dieselbe seit meiner Untersuchung über die Farbenzerstreuung der Gase[1]) klar liegt, in einigen Worten darzulegen. Habe ich damals experimentell erwiesen, dass der Abstand zweier Spectrallinien eines Gasspectrums der Dichtigkeit des Gases proportional, und dass daher zweitens

1) Ketteler, Farbenzerstr. d. Gase. Bonn 1865.

die relative Anordnung der Farben in diesem Spectrum von der Dichtigkeit unabhängig ist, so ist die spätere Ausdehnung dieses letzteren Schlusses auf alle Aggregatzustände[1]) inzwischen auch von Hrn. Lorenz[2]) durch weitere Versuche als zulässig erwiesen. Dazu kommt dann noch in zweiter Linie das wichtige, wenngleich nur genähert richtige Gesetz von der Constanz des Brechungs- und des Absorptionsvermögens. Wie sich nun aber die Elasticität der Gase von der der festen Körper hinlänglich weit unterscheidet, als dass sie Punkt für Punkt nur scheinbar durch die gleichen Formeln umfasst wird, so gilt fast das Entgegengesetzte von den Lichtschwingungen in denselben. Um diese also nicht blos scheinbar, sondern wirklich zu erklären, dazu bedarf es folglich einer anderen Grundlage als der Elasticitätslehre der festen Körper.

Die moderne Chemie construirt sich bekanntlich ihre Molecüle aus einer Vielheit von Atomen, ja setzt sich die complicirteren derselben sogar aus einzelnen Atomgebilden zusammen. Wenn ich daher mit Sellmeier, Helmholtz und Lommel in Consequenz dessen mir vorstelle, dass die einzelnen Bestandtheile gegen einander relativer Lagenänderungen fähig, indess durch mehr oder minder starke Reibung in ihrer Stabilität geschützt sind, so erklärt Hr. Voigt (p. 694) die Bewegungsgleichung des mit Reibung behafteten Pendels:

$$m' \frac{d^2\xi'}{dt^2} = - \varkappa \xi' - \gamma \frac{d\xi'}{dt}$$

ausdrücklich als mit den Grundvorstellungen der Elasticitätstheorie in Widerspruch. Er nennt das „gebräuchliche Anschauungen über die Constitution der Materie."

Nun habe ich aber, was freilich Hr. Voigt ignorirt, meine Principien weiter auch auf das System Gravitationspendel / Luft angewandt und angedeutet, dass dieselben nicht minder in der Akustik, in welcher doch zufolge den Arbeiten v. Helmholtz's jene Gleichung ihre hervorragende

1) Ketteler, Sitzungsb. d. Niederrh. Gesellsch. f. Nat. und Heilk. p. 93. 1868.

2) Lorenz, Wied. Ann. **11.** p. 70. 1880.

Bedeutung hat, ja selbst in der Electricitätslehre (bezüglich der durch Inductionsströme erregten Schwingungen) mutatis mutandis zur Wegräumung bisher hervorgetretener Widersprüche mit wahrscheinlichem Erfolge führen werden. Wenn ich bei alledem die vorgetragene Theorie des Lichtes — und Schalles — eine elastische nenne, so dürfte das unbestritten dem ganz gewöhnlichen Sprachgebrauche entsprechen.

2) Was jetzt die Bewegungsgleichungen betrifft, die Hr. Voigt an die Stelle der meinigen setzen möchte, so unterscheiden sich dieselben in ihrer allgemeinen Form:

$$(\mathrm{I_a})\,\mathrm{V.}\quad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + A \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + B \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z + C \end{cases} \qquad (\mathrm{I_b})\,\mathrm{V.}\quad \begin{cases} m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = X' - A \\ m'\frac{d^2\eta'}{dt^2} = Y' - B \\ m'\frac{d^2\zeta'}{dt^2} = Z' - C \end{cases}^{1})$$

in nichts von denen der Herren Helmholtz und Lommel. Hier bedeuten m, m' die Massen der Volumeneinheit der Aether- und Körpertheilchen, ξ, η, ζ, resp. ξ', η', ζ' ihre Verschiebungscomponenten, X, Y, Z, resp. X', Y', Z' die Molecularwirkungen, die von den benachbarten gleichartigen Massen ausgehen, und A, B, C die der benachbarten ungleichnamigen. Dabei ist angenommen, dass die Wirkung A, B, C auf den Aether ausschliesslich von den ponderablen Theilchen des identischen Volumenelementes herrühre und umgekehrt.

Die hier aufgestellten allgemein dynamischen Gleichungen sind offenbar der Theorie des Stosses (vgl. auch unter 3) entnommen, und es ist einleuchtend, dass dieselben richtig sind, so oft zwei gleichartige oder ungleichartige Massen unter dem Einflusse irgendwelcher Kräfte mit einander zusammenstossen. A, B, C und $-A$, $-B$, $-C$ sind dann die Componenten der Reactionsdrucke, mit welcher die beiden ge-

1) Die hier citirten, von Hrn. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 691 aufgestellten Formeln sollen durch ein angehängtes V., die von mir, Wied. Ann. **18.** p. 387 und 631 aufgestellten durch ein angehängtes K. unterschieden und weitere Formeln durch fortlaufende Buchstaben gekennzeichnet werden.

stossenen Körper während der Stossdauer aufeinander einwirken, und deren Intensität folglich zu Anfang und Ende der Stosszeit Null ist und dazwischen irgendwelchen Maximalwerth erreicht. Sobald man aber diese Gleichungen auf das dauernde Zusammenschwingen eines aus zwei heterogenen Bestandtheilen (Aether und Molecül) bestehenden Mediums bezieht, verlieren sie nicht blos obige Bedeutung, sondern werden geradezu falsch.

Folgendes der Beweis. Denken wir uns die heterogenen Elementarkörperchen als Kugeln und etwa der Anschaulichkeit wegen die Aetherkugeln (m) als weiss, die ponderablen (m') als schwarz. Es bedeutet dann z. B. parallel der X-Axe:

X die Kraftwirkung der weissen Kugeln auf die weissen,

X' die Wirkung der schwarzen Kugeln auf die schwarzen und A die Wirkung der schwarzen Kugeln auf die weissen, alles pr. Volumeneinheit.

Da auch über die Grösse der Massen und Kräfte beliebige Verfügungen getroffen werden können, so mögen m und X fixirt werden, es möge ferner $m' = m$ gemacht und X' unendlich wenig von X verschieden genommen werden. Alsdann ist auch A unendlich wenig verschieden von X und ebenso ξ' von ξ. Demnach schreibt sich angenähert:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2X, \qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0,$$

und da diese Gleichungen streng richtig werden, wenn man die schwarzen Kugeln in allen ihren Attributen den weissen gleich macht, so folgt aus der Coëxistenz derselben, dass für ein solches homogenes, nur aus weissen Kugeln bestehendes Mittel, auf welches die Bewegungsgleichungen (I_a) V. und (I_b) V. passen: $\xi = 0, \quad X = 0$

sein muss, d. h. dass die Kugeln in Ruhe sind, und auf sie gar keine Kraft einwirkt.

Will man das für die isolirten Mittel oder für eines derselben nicht gelten lassen, so bleibt nichts anderes übrig als für das zusammengesetzte zu setzen:

$$(A)\qquad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + A, & m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = X' + A' \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} = Y + B, & m'\frac{d^2\eta'}{dt^2} = Y' + B' \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z + C, & m'\frac{d^2\zeta'}{dt^2} = Z' + C' \end{cases}$$

und dabei das Reactionsprincip des Hrn. Voigt unbedingt abzulehnen. Der Leser wolle bei der Wichtigkeit der Sache etwas Weitschweifigkeit entschuldigen; gewiss muss es bei einigem Nachdenken ohne weiteres auffallen, dass das Reactionsprincip in den Gleichungen (I_a) V. und (I_b) V. zugleich einseitig übersehen und einseitig angewandt ist, während allerdings die Gleichungen (A) bei Position der Bedingungen $m' = m$, $X' = A' = X = A$, $\xi' = \xi$ übergehen in

$$\frac{m}{2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = X,$$

wie es ja auch sein muss.

3) Während natürlich in den optischen Medien — entsprechend den Principien Hrn. Voigt's — zur Ermittelung der quäst. Wechselwirkung ein einzelnes Aethertheilchen als Mittelpunkt einer mit dem Radius der Wirkungssphäre beschriebenen und nur von Körpertheilchen ausgefüllten Kugel und ebenso ein daneben gelegenes Körpertheilchen als Mittelpunkt einer zweiten mit dem gleichen Radius beschriebenen und nur von Aethertheilchen ausgefüllten Kugel zu betrachten ist, wobei dann offenbar die Einwirkung dem Vorzeichen nach gleich, der Grösse nach aber an das Gesetz der gleichzeitigen relativen Verschiebungen aller Punkte gebunden ist, — gibt es in der Elasticitätslehre andere einfachere Erscheinungen, die sogenannten erzwungenen Schwingungen, bei welchen die Bewegungen zweier einzelner Massen m, m', welche von den Einzelkräften X, X' angegriffen werden, durch eine zwischen ihnen entgegengesetzt wirkende Reactionskraft bestimmt wird. Diese hier hinzutretende neue Kraft erscheint dabei als die Kraft eines dritten Körpers. Schreibt man in der That die von Hrn. v. Helmholtz aufgestellten Gleichungen in der folgenden etwas allgemeineren Weise:

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2} = X + \beta(\xi' - \xi) \\ m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = X' - \beta(\xi' - \xi) \end{cases}$$ [1]

und bezieht dieselben auf zwei Pendel, deren Massenpunkte etwa durch eine leichte elastische Spiralfeder miteinander verbunden sind, so stellen dieselben die Schwingungen des so gebildeten Doppelpendels in aller Strenge dar. Insbesondere dürfte sich eine Anordnung, in welcher bei sehr grosser Masse m:

$$\text{(C)} \qquad X = -\mathfrak{k}\xi, \qquad X' = -\varkappa\xi' - \gamma\frac{d\xi'}{dt}$$

angenommen würde, für die experimentelle Verification vorzüglich eignen. Selbstverständlich ähnelt ein solcher Vorgang den entsprechenden optischen Erscheinungen nach fast allen Beziehungen. Wenn indess zur Erklärung dieser l. c. der vorstehende Werth von X durch den folgenden: $X = \mathfrak{e}\Delta_2\xi$ ersetzt werden muss, so liegt darin meines Erachtens ein nicht gut zu heissender Fehler.

Auf die Theorie und Beobachtung der erzwungenen Schwingungen als der Grundlage der „Lehre vom Mitschwingen" gedenke ich bei einem anderen Anlass ausführlicher zurückzukommen. Für jetzt sei nur bemerkt, dass man die oben erwähnte Aehnlichkeit mit optischen Vorgängen dadurch noch steigern kann, dass man beide Pendel einander gleich macht und ihnen in kurzen gleichen Abständen ein drittes, viertes etc. gleiches Pendel hinzufügt. Es wird dann einerseits in Gleichung (C) $X = X'$, aber aus der bisherigen dritten Kraft $\pm\beta(\xi' - \xi)$ der Gleichungen (B) entwickelt sich nunmehr nach und nach die wellenbildende Hauptkraft der optischen Medien $\mathfrak{e}\Delta_2\xi$, während das Princip der Wirkung und Gegenwirkung in demselben Maasse an Bedeutung verliert.[2]

---

1) Vgl. Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 390. 1883.

2) Auf derartige erzwungene Schwingungen lässt sich auch die Stokes'sche Formel für die Wellenbewegung in zähen Medien sowie die auffallende Schallfortpflanzung in engen Röhren zurückführen. — Vgl. auch die Anmerkung im folgenden Aufsatz p. 206.

4) Hiernach führe ich — unter vorläufigem Hinweis auf den folgenden Aufsatz — diejenigen Gleichungen auf, die von Hrn. Voigt beanstandet werden. Versteht man unter C, C' experimentell festzustellende Constanten, so gebe ich der Vereinigung des d'Alembert'schen Princips mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für unser zusammengesetztes Mittel die folgende Form:

$$(D)\quad \begin{cases} \left(m\frac{d^2\xi}{dt^2}+m'C'\frac{d^2\xi'}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2\eta}{dt^2}+m'C'\frac{d^2\eta'}{dt^2}-Y\right)\delta y+\cdots=0 \\ \left(mC\frac{d^2\xi}{dt^2}+m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}-X\right)\delta x'+\left(mC\frac{d^2\eta}{dt^2}+m'\frac{d^2\eta'}{dt^2}-Y'\right)\delta y'+\cdots=0, \end{cases}$$

in welcher δx, δy, δz und ebenso $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ mit den Bedingungen des Systemes verträgliche beliebige Verrückungen sind und insbesondere mit den Differentialen $d\xi$..... $d\xi'$.... identificirt werden dürfen.

Setzt man der Einfachheit halber $\eta = Y = \zeta = Z = 0$, $\eta' = Y' = \zeta' = Z' = 0$, so schreibt sich auch:

$$(16)\ \text{K.}\quad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2}+m'C'\frac{d^2\xi'}{dt^2}=X=\mathfrak{c}\Delta_2\xi, \\ mC\frac{d^2\xi}{dt^2}+m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}=X'=-\left(\varkappa\xi'+\gamma'\frac{d\xi'}{dt}\right). \end{cases}$$

Bei der Aufstellung dieser Gleichungen ist angenommen, dass eine Wechselwirkung zwischen den Kräften X, X' für den Ruhezustand nicht besteht, dass ferner die Einzelarbeit einer jeden derselben nicht blos dem Schwerpunkte der direct angegriffenen Masse, sondern auch partiell und indirect dem Schwerpunkte der mit ihr zusammenschwingenden Masse als Beschleunigung zu gute komme. Demnach besteht das Wesen der hier dargelegten Auffassungsweise darin, dass sie den Trägheitswiderstand der beiden schwingenden Massen einer jeden Einzelkraft gegenüber als verschieden nimmt, und so dürften sich die Coëfficienten C, C' wohl definiren lassen als Maasse für die Uebergangsfähigkeit der Kraftwirkung einer ersten Masse auf eine zweite. Wenn sie übrigens die supponirte Verschiedenheit von Trägheit und Beweglichkeit lediglich als solche ausdrücken, ohne von der dieselben veranlassenden, einstweilen als unbekannt genommenen Ursache Rechenschaft zu geben, so charakterisiren sie sich dadurch

selbstverständlich als empirische oder provisorische Grössen, deren gegenseitiges Verhältniss ja ebenfalls noch festzustellen erübrigt.

Dass überhaupt eine jede Mittheilung von Schwingungsenergie darauf hinauskommt, die Masse des mittheilenden Körpers scheinbar zu vergrössern, hat auch Lord Rayleigh[1]) gelegentlich anerkannt, und glaube ich insbesondere durch meine Behandlung des reibungsfreien abklingenden Gravitationspendels[2]) recht anschaulich vorgeführt zu haben. Auch möge Hr. Voigt hier an die berühmte, ja epochemachende Pendelcorrection Bessel's erinnert werden; er wird leicht finden, dass Gedankengang und Endformeln bei Bessel und mir nahezu die gleichen sind. Wenn endlich Stokes bezüglich der Erscheinungen der doppelten Brechung mehrfach die Frage aufgeworfen hat, ob dieselben sich besser durch eine nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität oder durch eine von der Richtung abhängige Trägheit deuten lassen, so beweist namentlich die Form der betreffenden, von mir aufgestellten Gleichungen (VIII) K die wirkliche Brauchbarkeit einer solchen Unterstellung.

5) Vielleicht werden diese Erwägungen anschaulicher, wenn man sich die spontane wellenerregende Kraft einmal die Aethertheilchen, ein andermal die Körpertheilchen derart erfassend denkt, dass in beiden Fällen eine Wellenbewegung mit gleichen Attributen zu Stande kommt. Es lassen sich dann die beiden Ursprungsarten entsprechenden Gleichungen (16) K. auf die folgenden, die Einzelkräfte X, X' absolut charakterisirenden Formen bringen:

$$(E)\quad \begin{cases} X = m\frac{dv_0}{dt} = (m+m')\frac{dv_0}{dt} = m\frac{dv}{dt} + m'\frac{dv'}{dt}C' \\ X' = m'\frac{dv_0'}{dt} = (m+m')\frac{dv_0'}{dt} = m\frac{dv}{dt}C + m'\frac{dv'}{dt}. \end{cases}$$

Hier bedeuten nämlich v_0, v_0' die Geschwindigkeiten der isolirten Einzelmassen unter dem Einflusse der isolirten Kräfte X, X'; es bedeutet ferner v_0 die Geschwindigkeit

1) Lord Rayleigh's Theorie des Schalles, übers. von Fr. Neesen. Braunschw. 1879. 1. p. 52.

2) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 412. 1883.

der zu einer starren Gesammtmasse $(m + m')$ verbunden gedachten Aether- und Körpertheilchen unter dem ausschliesslichen Einfluss von X, ebenso v_0' die Geschwindigkeit, welche die nämliche starre Gesammtmasse unter dem alleinigen Einfluss von X' erlangen würde. Endlich sind v, v' die Geschwindigkeiten je der Aether- und Körpertheilchen, welche dieselben unter der gleichzeitigen Einwirkung der Kräfte X, X' in freier sich gegenseitig beeinflussender Bewegung (Wechselwirkung) thatsächlich erlangen.

Die Gl. (16) K und (E) sollen hierbei ausdrücklich nur für solche Medien zugelassen werden, die man sich durch ein Eintauchen einer Vielheit von unendlich kleinen und nahen schwingungsfähigen Gebilden in eine elastische Flüssigkeit von der Art der Luft oder des Aethers gebildet denken kann, den letzteren selbstverständlich aller Erfahrung gemäss als nicht starr angenommen.

Derjenige also, welcher die experimentelle Constanz der Grössen C, C' für erwiesen hält, wird jede der beiden Gleichungen (E) bezeichnen dürfen als das Princip der Erhaltung der Wesenheit der Einzelkraft. Es mag übrigens als möglich zugestanden werden, dass die hier aufgestellten Beziehungen nur für einen engeren Bereich der Strahlung gültig sind, und dass im allgemeinen zu den Kräften der isolirt gedachten Bestandtheile beim Zusammenwirken derselben neue Einflüsse hinzutreten, die dann ebenfalls einstweilen in den Werthen von C, C' als bekannten Mittelwerthen irgendwelcher unbekannter Functionen implicite enthalten sind.

Wenn freilich Hrn. Voigt zufolge meiner Auseinandersetzung eine unstatthafte Anlehnung an die Probleme der Hydrodynamik zu Grunde liegen soll, „bei denen eine Wechselwirkung zwischen festen und flüssigen Theilen nicht eingeführt wird, und doch ein Druck der letzteren gegen die ersteren resultirt", eine Anlehnung, welche um deswillen unstatthaft sei, weil ich nicht die Gleichungen der Hydrodynamik, sondern die der Elasticitätslehre benutze, so darf ich dem gegenüber versichern, dass es mir gleichgültig ist, ob das thatsächliche Dispersionsgesetz der Natur

sich bezüglich seiner Ableitung näher an die eine oder die andere jener mit Unrecht als miteinander unverträglich behandelten Disciplinen anschliesst, sofern überhaupt seine Ableitung nur in strengster Anlehnung an die Beobachtungen zu erhoffen steht.

Näheres hierüber findet man im folgenden Aufsatz.

6) Hr. Voigt wendet sich dann weiter gegen die meiner Reflexionstheorie zu Grunde liegenden Uebergangsbedingungen. Ich stelle hier, abweichend von dem bis jetzt eingehaltenen Gange, die von mir formulirten Grundsätze sofort an die Spitze. Dieselben sind unter der Voraussetzung, dass die Z-Axe des Coordinatensystemes mit dem Einfallslothe zusammenfällt, und dass für den intermolecularen Aether beider Medien Elasticität und Dichtigkeit gleich sind, analytisch die folgenden vier:

$$\text{(IV) K.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{d\xi_1}{dt} = \sum \frac{d\xi_2}{dt}, \quad \sum \frac{d\eta_1}{dt} = \sum \frac{d\eta_2}{dt} \\ \sum \left(\frac{d\xi_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dx} \right) = \sum \left(\frac{d\zeta_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dx} \right) \\ \sum \left(\frac{d\eta_1}{dz} - \frac{d\zeta_1}{dy} \right) = \sum \left(\frac{d\eta_2}{dz} - \frac{d\zeta_2}{dy} \right) \end{array} \right\} x = y = z = 0.$$

Darin beziehen sich die Indices 1, 2 auf das erste, resp. zweite der sich in ebener Trennungsfläche berührenden zusammengesetzten Medien und die Summenzeichen [1]) auf sämmtliche in jedem derselben vorkommenden Strahlen. Die Gleichungen selbst gelten für die beiden Aetherparallelepipeda, die im Coordinatenanfangspunkt zusammenstossen.

In einigen älteren Abhandlungen hatte ich die beiden ersten der obigen Gleichungen durch die folgenden:

$$\text{(IV}_o\text{) K.} \quad \left\{ \begin{array}{c} \sum \alpha_1 \frac{d\zeta_1}{dz} = \sum \alpha_2 \frac{d\zeta_2}{dz} \\ \sum \left(\frac{d\eta_1}{dx} - \frac{d\xi_1}{dy} \right) = \sum \left(\frac{d\eta_2}{dx} - \frac{d\xi_2}{dy} \right) \end{array} \right.$$

ersetzt, sodass ich also gegenwärtig das Fresnel-Neumann'sche Continuitätsprincip auf die beiden der Trennungs-

1) Dieselben sind hier vorsichtshalber wie in früheren Arbeiten wieder hinzugefügt.

fläche parallelen Componenten in Anwendung bringe und gleichzeitig die Drehcomponenten der Volumenelemente des Aethers in der *XZ*- und *YZ*-Ebene als gleich nehme, früher dagegen die mit einem Factor α multiplicirten Dilatationen in der Richtung des Lothes und sämmtliche drei Drehcomponenten gleich setzte.

Beide Systeme, die ich auf einfache und doppeltbrechende Mittel bezogen habe, resp. beziehe, gelten für letztere indess nur mit der Maassgabe, dass die Gleichungen (IV_o) K. Schwingungen senkrecht zur Normalen, die Gleichungen (IV) K. dagegen Schwingungen senkrecht zum Strahle voraussetzen. Beide ergeben nun 1) für durchsichtige isotrope Medien die volle Identität der aus ihnen durch Integration zu gewinnenden Grenzgleichungen. Das Nämliche ist 2) der Fall beim Durchgang des Lichtes durch einen durchsichtigen Krystall, desgleichen 3) beim Eintritt des Lichtes in ein absorbirendes isotropes Mittel und 4) beim Durchgang desselben durch eine aus einem solchen hergestellte planparallele Platte. Dagegen sind die Resultate nicht übereinstimmend, wenn 5) das Licht in einen absorbirenden Krystall eintritt oder 6) zwischen absorbirenden isotropen oder anisotropen Medien übergeht.

Da mir das System (IV_o) K. praktisch wie theoretisch nicht ganz frei schien von Mängeln, so legte ich mir die Frage vor, welches wohl das gemeinschaftliche Band sei, welches alle vier Einzelgleichungen, sei es des einen oder des anderen Systemes, zu einer höheren Einheit verknüpfe.

7) Ein solches vermittelndes Band glaube ich in der That von demjenigen Standpunkte aus gefunden zu haben, welcher den Aether „als einem elastischen festen Körper sich analog verhaltend" ansieht. Wie Hr. Voigt mit Recht herausfühlt, ist mir die Hypothese eines wirklich starren Aethers möglichst unsympathisch, doch dürfte schon die blosse Annahme von vorhandenen Normal- und Tangentialreactionen die Verwandtschaftsgrade der einzelnen Gleichungen genügend klar legen, sodass sich dann die näher zusammengehörigen auch „als Principe" hinstellen lassen.

Beschränken wir uns im Folgenden auf einfach brechende

Medien oder wenigstens auf die sogenannten einstrahligen Azimuthe der doppeltbrechenden und beachten dann, dass für das System (IV) K. die sämmtlichen Schwingungen senkrecht stehen auf der respectiven Strahlrichtung. Endlich möge der Einfachheit wegen das Mittel (1) der Weltäther sein, und denken wir uns im Mittel (2) die Strahlröhre durch fortlaufende Schichten von Aethertheilchen mit discontinuirlich eingestreuten Körpertheilchen ausgefüllt.

Haben wir also im zweiten Mittel in der Richtung der Fortpflanzung alternirend Volumenelemente mit Aether und Volumenelemente mit Aether und Körpermaterie, so wird selbstverständlich dieses Mittel gegen den Weltäther durch eine Reihe von Elementen der zweiten Art abgegrenzt. Dabei verlangt, wie ich neuerlich wieder[1]) hervorgehoben habe, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte der Aether- und der Körpermassen (dieselben wegen der gleichzeitig gewonnenen potentiellen Energien reducirt genommen), dass:

$$(7)\ \text{K.} \qquad M(E^2 - R^2) = M_D \Delta^2 + M'_D \Delta'^2 = M_D D^2 n^2,$$

wo E, R, D die Amplituden der einfallenden, reflectirten und durchgehenden Aetherschwingungen, n das Geschwindigkeitsverhältniss des Lichtes im ersten und zweiten Mittel und M, M_D äquivalente, d. h. in gleicher Zeit durchlaufene, der Trennungsfläche unmittelbar anliegende Volumina sind.

Ist das Licht aber einmal eingetreten, so verlangt das nämliche Princip in Verbindung mit gewissen Erfahrungen weiter, dass beim Uebergang der Schwingungen von einem Volumenelement der ersten zu einem der zweiten Art und umgekehrt kein Energieverlust stattfindet, dass also die Schwingungen in beiden zusammen stimmen. Fassen wir also diejenigen beiden, nur Aether enthaltenden Elemente, welche die eigentliche Scheidewand mit den dieselbe fixirenden Molecülen unmittelbar umgeben, ins Auge, so werden auch die beiden Seiten der p. 633 aufgestellten Uebergangsgleichung:

---

1) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 644. 1883.

$$\text{(III) K.} \quad \left\{ \begin{array}{c} (X_1\,d\xi + Y_1\,d\eta + Z_1\,d\zeta)_1 \\ = (X_2\,d\xi + Y_2\,d\eta + Z_2\,d\zeta)_2 \end{array} \right\} \; x = y = z = 0$$

bis auf zu vernachlässigende Grössen einander gleich sein. Dass in der That die beiden vorstehenden Gleichungen (7) K. und (III) K. miteinander verträglich sind, darin liegt für mich der Schwerpunkt dieser Entwickelung. In der letzteren bedeutet beispielsweise:

$$\xi_1 = \xi_E + \xi_R \text{ u. s. f.}, \qquad \xi_2 = \xi_D \text{ u. s. f.}$$

und lässt sich dieselbe dahin aussprechen, dass an der Grenzfläche selbst keine Arbeit geleistet wird, welche als solche für die Wellenbildung verloren ginge. Wenn Hr. Voigt bezüglich dieser Gleichung anführt, dass dieselbe, obwohl mit einer Formel Kirchhoff's übereinstimmend, doch kein Ausdruck des Kirchhoff'schen Princips sei, so bin ich mir dessen vollkommen bewusst und habe dieselbe daher p. 633 nicht mit, sondern nach Kirchhoff aufgestellt. Wie die bezüglichen Normal- und Tangentialspannungen, die ich in beiden Medien als voneinander verschiedene Grössen vorfinde, zu dieser Verschiedenheit gelangen, ergibt sich aus der hier an die Spitze gestellten Gleichung (7) K., indess auch davon abgesehen erscheint Gl. (III) K. als Ausdruck für die Erhaltung der Kraft, sofern man sich mit der erwähnten Verschiedenheit als irgendwie thatsächlich gegeben begnügt.

Das Gleiche gilt von der durch einfache Umformungen aus Gl. (III) K. direct abzuleitenden Gleichung:

$$\text{(3) K.} \quad \left(\frac{d\xi}{dz}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dz}\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\xi}{dz}\frac{d\xi}{dt}\right)_1 = \left(\frac{d\xi}{dz}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\eta}{dz}\frac{d\eta}{dt} + \frac{d\xi}{dz}\frac{d\xi}{dt}\right)_2,$$

welche wohl am angemessensten statt Gl. (III) K. als Ausgangsbeziehung hätte gewählt werden können, und für welche selbst ein Beweis von allgemeineren Voraussetzungen aus nicht schwierig scheint.

Beziehen sich die Gleichungen (3) K. und (III) K. charakteristischer Weise auf Flächen, Gl. (7) K. dagegen auf Räume, so lässt sich letzterer noch eine weitere, und zwar erheblich einfachere Gleichung zuordnen, die, obwohl sie sich gleichfalls über die Volumina M, M_D erstreckt, dennoch die

Körpertheilchen nicht enthält, und die daher als neuer Ausdruck des Princips der Erhaltung der Schwingungsarbeit des Aethers, resp. seiner gesammten, ursprünglich ihm zugeführten potentiellen Energie angesehen werden kann. Dieselbe hat (auf ihren kürzesten Ausdruck gebracht) die leicht verständliche Form:

$$(F) \qquad M\left(\frac{d^2\varrho}{d\delta^2}\,d\varrho - \frac{d^2\varrho_R}{d\delta_R^2}\,d\varrho_R\right) = M_D\frac{d^2\varrho_D}{d\delta_D^2}\,d\varrho_D,$$

und ist darin ϱ der resultirende Schwingungsausschlag und δ die resp. Fortpflanzungsrichtung. Auch möchte ich hier hinzufügen, dass es nach Analogie der Gleichungen (16) K. genügt, sich die rechterhand stehende Grösse, als aus einer Verwandlung der links stehenden hervorgegangen, mit den etwa durch Beobachtung gegebenen Dimensionen M_D und δ_D im Inneren des ersten Mediums, des Weltäthers, abgetragen zu denken. Beide Arbeiten nehmen dann in beiden Medien (nicht freilich in demselben) die gleiche Zeit dt in Anspruch.

Nach Hrn. Voigt ist das freilich alles anders. Ihm zufolge repräsentirt weder Gl. (III) K. noch Gl. (3) K., welch letztere durch Integration unmittelbar mit der Grundgleichung (7) K. oder (F) zusammenfällt, das wahre „durch die Beobachtung wahrscheinlich gemachte“[1]) Gesetz von der Erhaltung der lebendigen Kraft der Aethertheilchen bei Reflexion und Brechung, sondern es thut das nur die Fr. Neumann'sche Gleichung:

$$M(E^2 - R^2) = M_D D^2,$$

die freilich das Mitschwingen der Körpertheilchen a priori ausschliesst, und deren unvorsichtige Herbeiziehung die wohl unbewussten Hintergedanken Hrn. Voigt's blossstellt.

Derselbe ist überhaupt bei Abfassung seiner beiden letzten Seiten weniger glücklich gewesen, denn offenbar hat er[2]) die pp. 636—642 meiner letzten Abhandlung übersehen, da er sonst unmöglich behaupten würde, dass ich meine Uebergangstheorie ausdrücklich nur für isotrope Medien aufgestellt habe, sie aber trotzdem auch auf die anisotropen aus-

1) Von mir unterstrichen.

2) Von der unbegreiflichen Anmerkung auf p. 704 gänzlich abgesehen.

dehne. Freilich ist aber auch die Constitution der doppelt brechenden Mittel nach meiner Auffassung möglichst von der der Voigt'schen verschieden.

8) Prüfen wir jetzt, was sich Hr. Voigt unter einer nach den strengen Principien der Elasticitätslehre gebildeten Uebergangstheorie vorstellt. Auch er verwendet das Princip der Continuität und das der Erhaltung der Energie. Wenn derselbe die drei bezüglichen Neumann'schen Gleichungen:

$$\xi_1 = \xi_2, \qquad \eta_1 = \eta_2, \qquad \zeta_1 = \zeta_2$$

auf die Aethertheilchen der Grenzschicht bezieht und ihnen für die Körpertheilchen derselben die drei analogen Bedingungen:

$$\xi_1' = \xi_2', \qquad \eta_1' = \eta_2', \qquad \zeta_1' = \zeta_2'$$

hinzufügt, so folgt nothwendig, dass, wenn für gewöhnlich das erste Medium der freie Aether ist, und folglich die Ausschläge ξ_1', η_1', ζ_1' gar nicht existiren, die drei neuen Gleichungen illusorisch werden oder vielmehr ein Unbewegtbleiben der Körpermaterie auch des (2) Mittels geradezu verlangen.

Eine Bemerkung von nicht geringerem Interesse knüpft Hr. Voigt für den Fall, dass beide Medien gleiche Aetherdichtigkeit haben, an die Normalcomponenten ζ. Die auffallenden Sätze (p. 698) mögen hier wörtlich wiederholt werden: „Es wird dann an der Grenze selbst und ebenso in unendlich kleiner Entfernung von derselben eine Gleichheit der normalen Componenten ... stattfinden. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde in der Grenze eine vollständige Trennung beider Theile, welche einen leeren Raum entstehen lässt, abwechseln mit einer Ineinanderschiebung, welche in demselben Raume gleichzeitig Aether aus beiden Körpern existiren lässt. Letzteres erscheint besonders unzulässig, wenn man bedenkt, dass man dem Aether Incompressibilität beilegt.“[1])

Das ist doch in der That eine eigenthümliche Deutung der aus der analytischen Formulirung dieses Princips sich ergebenden Consequenzen! Wenn ferner für den Fall einer

1) Von mir unterstrichen.

verschiedenen Aetherdichte (und die von mir behandelten Medien habe ich früher wiederholt auf homogene, verschieden dichte Aethermedien reducirt) auf eine Arbeit Cornu's verwiesen wird, so steht eine damalige Abhandlung von mir[1]) mit derselben auf ziemlich gleichem Boden. Hr. Voigt schliesst seine bezügliche Auseinandersetzung mit den Worten, dass ich mit meinen Annahmen:

$$\xi_1 = \xi_2\,, \qquad \eta_1 = \eta_2\,, \qquad \zeta_1 \gtrless \zeta_2$$

gerade in Verbindung mit dem Incompressibilitätsprincip „zu den allgemein angenommenen Anschauungen der Elasticitätstheorie in offenbaren Widerspruch trete und doch nicht einmal einen Versuch der Rechtfertigung mache."[2])

Zur Formulirung dessen, was wegen der Möglichkeit eines Mitschwingens der Körpertheilchen an die Stelle des von Hrn. Kirchhoff aufgestellten Princips treten soll, dass nämlich die Arbeit der Kräfte, welche die (ruhend gedachte) ponderable Materie auf den Aether ausübt, verschwindet, dazu braucht Hr. Voigt mehr als vier Druckseiten. Er benöthigt eben einer fortlaufenden Reihe von äusserst langwierigen, verwickelten Formeln, die den Hrn. Verfasser sogar schliesslich selber dahin bringen, dass auch er auf vollkommen strenge vereinfachende Entwickelungen verzichtet. Da ich die Nützlichkeit und Ergiebigkeit des von ihm eingeschlagenen Verfahrens bezweifle, so will ich hier über die Berechtigung desselben nicht streiten.

* * *

Aus dem Vorstehenden dürfte hervorgehen, dass die von mir abgeleiteten Grund- und Grenzgleichungen zwar der eigenartigen und nicht überall correcten Elasticitätslehre des Hrn. Voigt widersprechen, aber mit den allgemeinen Principien der Dynamik, sowie mit den gegenwärtigen Annahmen über die Constitution der Materie immerhin verträglich sind. Dabei bleibt nicht ausgeschlossen, (vgl. den folgenden

1) Ketteler, Astr. Undulationsth. Bonn 1873. p. 326.

2) Vergl. dagegen die sich aus meinen Rechnungen ergebenden, für die Reflexionstheorie wirklich wichtigen, faktischen Resultate. Wied. Ann. 3. p. 83 und 284. 1878.

Aufsatz), dass sich allmählich andere Methoden finden mögen, welche die Hauptschwierigkeit unseres Gegenstandes in directerer Weise bewältigen, nämlich den ziemlich unzugänglich gebliebenen „ungleichen Trägheitswiderstand" dem Verständniss auch im einzelnen näher bringen. Obwohl Herr Voigt (p. 696) sein vernichtendes Urtheil fällt, ohne noch eine einzige Folgerung aus denselben untersucht zu haben, so hat er doch, wie angeführt, an einem anderen Orte die ganze Fruchtbarkeit meiner Theorie und die volle Uebereinstimmung ihrer Endgleichungen mit der Erfahrung anerkannt. Die Alternative, vor welche Hr. Voigt die Optiker jetzt gestellt hat, ist daher folgende. Entweder Zurückgehen auf das moleculare Punktsystem des jüngeren Neumann und (abgesehen von den mehr formellen Verbesserungen Kirchhoff's) auf die Uebergangsbedingungen von Fr. Neumann. Das bedeutet aber Verzichtleistung auf die Erklärung der Absorption und Dispersion, ja selbst auf eine physikalisch befriedigende Begründung der Totalreflexion, sowie auf die Theorie der bewegten Medien. Dazu kommen wohl auch noch eigenthümliche physiologische Bedenken, welche der starr genommene Aether wachrufen dürfte.

Diesem vor vielleicht sechs Decennien berechtigteren Standpunkte steht derjenige gegenüber, welcher auf Grund des durch die Entdeckung der anomalen Dispersion geschaffenen Thatbestandes, sowie der durch moderne Chemie und mechanische Wärmetheorie gereifteren Molecularanschauungen die von Hrn. Voigt als „mathematisch" bezeichnete Richtung bevorzugt. Das auf diesem Boden von mir aufgerichtete System optischer Sätze umspannt gegenwärtig (etwa von Phosphorescenz und Fluorescenz abgesehen) alle irgendwie bekannten Erfahrungsthatsachen, und die mathematischen Formen derselben geben diese Thatsachen quantitativ wie qualitativ genau wieder. Dabei sind die gewonnenen Einzelgesetze, wenngleich vielleicht anfangs nicht ganz frei von „Willkür" formulirt, durch den Druck des immer mehr vervollständigten Beobachtungsmateriales allmählich so weit zur relativen Verschiebung und Anpassung gekommen, dass

gegenwärtig ein Herausreissen oder selbst eine weitergehende Modification eines einzelnen derselben wohl nicht mehr angeht. Ueberdenke ich insbesondere die Controversen der älteren (dispersions- und absorptionslosen) Optik, so möchte ich meinen Arbeiten das Motto vorsetzen, dass nur eine Verallgemeinerung des Standpunktes Streitfragen in Wirklichkeit zu schlichten vermag, — freilich ein Motto, das wenigstens irgendwelchen gemeinschaftlichen Ausgangspunkt verlangt. Einen solchen habe ich zu meinem wirklichen Bedauern mit Hrn. Voigt nicht finden können.

Nachschrift. Gleich nach Fertigstellung dieses Aufsatzes erschien in den Annalen[1]) Hrn. Voigt's Abhandlung: „Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Media." Obwohl dieselbe den allgemeinen Standpunkt des Verfassers klarer stellt als seine vorhergehenden Arbeiten, und obwohl darin manche Einseitigkeit, die noch gegen meine Auffassung vorgebracht wurde, mit fast befremdlicher Eile aufgegeben wird, weil sie eben zu gar nichts brauchbar ist, so habe ich mich doch zu einer Umarbeitung vorstehender Abwehr nicht entschliessen mögen. Die Arbeit gibt eine geschickte Zusammenstellung der Erklärungsversuche der älteren Dispersionstheorie in einem nach der mathematisch-formellen Seite vornehm ausgestatteten Kleide und, wie zu erwarten war, unter Zugrundelegung des Neumann'schen Standpunktes. Das Neue derselben dürfte wesentlich darin bestehen, dass der Verfasser die Reflexionstheorie Neumann's auf dispergirende Medien auszudehnen versucht. Da ich indess die Möglichkeit einer Dispersion ideell durchsichtiger Medien nicht zugebe, so erblicke ich in dem Vorgehen Hrn. Voigt's nur das letzte Ringen einer hingeschwundenen Entwickelungsphase, der Periode nämlich der absorptionslosen Optik.

Bonn, Juli 1883.

1) Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 873. 1883.

IX. *Zur Dispersionstheorie des Lichtes; von E. Ketteler.*

Seit mehreren Jahren habe ich in den Annalen eine Reihe von Formeln aufgestellt, von denen ich glaube, dass sie sich den Versuchen aus dem Gebiete der Dispersion und Absorption in einfachbrechenden, doppeltbrechenden und circularpolarisirenden Medien sowie der Krystallreflexion und Metallreflexion derart vollständig anschliessen, dass sich überall mit Erfolg mit ihnen rechnen lässt. Nichtsdestoweniger möchte ich namentlich die die Dispersion betreffenden Gleichungen nicht als die Consequenzen einer förmlichen Theorie ansehen, sofern dieselben eine gewisse Anzahl experimentell festzustellender Constanten enthalten, deren gegenseitiger Zusammenhang dunkel geblieben ist, und die bei einem tieferen Eingehen zum Theil durch andere ersetzt werden würden.

Es ist nun im Folgenden meine Absicht, gerade den bezüglichen theoretischen Standpunkt, besonders den kritischen Bemerkungen Hrn. Voigt's[1]) gegenüber noch allseitiger zu präcisiren und dabei wo möglich die früher aufgestellten Beziehungen — allerdings durch eine kleine Vervollständigung derselben — gegen fernere Angriffe sicher zu stellen.

Zu dem Ende mögen zunächst die Voraussetzungen, die in dieser Hinsicht gemacht werden sollen, folgendermassen neu formulirt werden.

1) Da der freie Aether aus Atomen besteht, die eine von der relativen Entfernung abhängige, sei es abstossende, sei es anziehende Kraft aufeinander ausüben, so kommen demselben elastische Normal- wie Tangentialreactionen zu, ohne dass es nöthig wäre, ihm das Prädicat der eigentlichen Starrheit beizulegen.

2) Der intermoleculare Aether hat mit dem freien Aether gleiche Elasticität und Dichtigkeit, und beide verhalten sich allen optischen Impulsen gegenüber als incompressibel.

---

1) Voigt, Wied. Ann. 19. p. 691. 1883. Vgl. den vorigen Aufsatz.

3) Für den Ruhezustand findet eine gegenseitige Einwirkung zwischen Aether- und Körpertheilchen[1]) nicht statt.

4) Die Körpertheilchen bestehen in Einklang mit den Anschauungen von Chemie und Wärmetheorie aus schwingungsfähigen, den Pendelgesetzen gehorchenden Gebilden, die durch mehr oder minder grosse Reibungskräfte in ihrer Stabilität geschützt sind.

5) Welches auch die zwischen den Nachbarmolecülen wirkenden, vom Aggregatzustand abhängigen Kräfte sein mögen, die Amplituden der Körperschwingungen sind zu klein, als dass sie eine merkliche Aenderung dieser Kräfte bewirkten.

6) Insbesondere genügt also eine minimale Kraft, einen fremden Körper durch den freien Aether hindurchzutreiben. Und ebenso finden die intermolecularen Aethertheilchen, wenn sie unendlich langsam zwischen den Körpertheilchen verschoben werden, diesen gegenüber Zeit und Gelegenheit zu relativen Lagenänderungen, ohne die schwingungsfähigen Körperbestandtheile aus ihrer Gleichgewichtslage zu verrücken.

7) In den anisotropen Medien ist der Abstand der Körpertheilchen nach den Hauptrichtungen verschieden.

8) In denselben ordnet sich insbesondere der Incompressibilität des Aethers die Incompressibilität der Körpertheilchen zu.

Dies angenommen, lassen sich zunächst für isotrope Mittel zwei Bewegungsgleichungen aufstellen.

I. Es seien wie früher m, m' die Massen der Volumeneinheit der Aether- und der Körpertheilchen, ξ, ξ' ihre Ausschlagscomponenten parallel der X-Axe und sonach $m(d^2\xi/dt^2)$, $m'(d^2\xi'/dt^2)$ die respectiven beschleunigenden Kräfte. Nennt man ferner e die Deformationsconstante des

1) Nimmt man mit C. Neumann und Voigt an, dass die Aetherdichtigkeit starken Kräften, wie z. B. Molecularkräften gegenüber veränderlich sei, so mag man sich die Körpertheilchen des Textes als aus ponderablen Kernen mit verdichteten Aetheratmosphären gebildet vorstellen.

Aethers, so lässt sich wieder die bezügliche Componente der wellenbildenden Kraft desselben darstellen durch:

$$\varepsilon \Delta_2 \xi = \varepsilon \left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} \right).$$

Den Pendelschwingungen der Körpertheilchen indess supponiren wir diesmal eine erregende Kraft von der Grösse $-\varkappa\xi' = -(m' 4\pi^2/T_m^2)\,\xi'$, unter T_m die Schwingungsdauer im isolirten Zustande verstanden. Demnach verlangt zuvörderst das Princip der Energie die Gleichung:

$$(1) \qquad m \frac{d^2\xi}{dt^2} d\xi + m' \frac{d^2\xi'}{dt^2} d\xi' = \varepsilon \Delta_2 \xi \, d\xi - \varkappa \xi' d\xi'. \; ^{1})$$

Mit ihr verbinden wir eine die specielle Wirkungsweise der Körpertheilchen betreffende zweite Gleichung, und zwar soll dies keine andere sein als die berühmte Hauptgleichung der Pendeltheorie Bessel's, die sich somit für die langsamen Schwingungen des gewöhnlichen Pendels in Luft bereits bewährt hat. Dieselbe lässt sich früherer Entwickelung zufolge[2]) schreiben:

$$(2) \qquad m \frac{d^2\xi}{dt^2} C + m' \frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\varkappa \xi',$$

wo C eine — von der Form des Pendels abhängige — Constante bedeutet. Sie besagt, dass der Druck der bewegenden Kraft ausser dem Schwerpunkt der Pendelmasse, welche die Beschleunigung $d^2\xi'/dt^2$ erfährt, auch der umgebenden, in Mitschwingungen versetzten Luft zu gute kommt, sofern dadurch eine Luftmasse mC einen Schwingungsausschlag ξ, resp. eine Beschleunigung $d^2\xi/dt^2$ mitgetheilt erhält. Beachtet man jetzt, dass unserer Vorstellung zufolge die Bewegungsübertragung seitens eines Körpertheilchens auf seine Aetherumgebung ganz nach dem nämlichen Gesetze erfolgen wird, so lassen sich natürlich in dem Gliede $m(d^2\xi/dt^2)\,C$ die Factoren m, ξ in ihrer früheren Bedeutung festhalten.

1) Derselben möge die von den Herren v. Helmholtz und Lommel gemeinsam benutzte abweichende Gleichung:

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} + m' \frac{d^2\xi'}{dt^2} = \varepsilon \Delta_2 \xi - \varkappa \xi'$$

gegenüber gestellt werden.

2) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 413. 1883.

Auf beide Gleichungen (1) und (2) wenden wir schliesslich die Integralausdrücke an:

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = A_x \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - n\frac{ux+vy+wz}{\lambda}\right) \\ \xi' = A_x' \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - n\frac{ux+vy+wz}{\lambda}\right), \end{cases}$$

worin A_x, A_x' die Amplituden, T die Schwingungsdauer, $\lambda = VT$ die entsprechende äussere Wellenlänge, n den Brechungsindex, u, v, w die Richtungscosinus des Strahles bedeuten und V, e, m zufolge Voraussetzung 2 durch die Relation: $e = mV^2$ verbunden sind.

Schreibt man Gleichung (1) in folgender Form:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}\cdot\frac{d\xi'}{d\xi}\left(1 + \frac{\varkappa\xi'}{m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}}\right) = e\Delta_2\xi$$

und setzt abkürzungsweise:

$$(4)\qquad \frac{d\xi'}{d\xi}\left(1 + \frac{\varkappa\xi'}{m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}}\right) = \mathfrak{C}',$$

folglich:

$$(5)\qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}\mathfrak{C}' = e\Delta_2\xi,$$

so gibt die Integration der Gleichungen (2) und (5) die Bedingungsgleichung:

$$(6)\qquad n^2 - 1 = \frac{C\mathfrak{C}'}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1}.$$

Gleichungen (2), (5) und (6) haben die früher von mir aufgestellte Form, sofern insbesondere der jetzige Coëfficient $\mathfrak{C}'$ mit der früheren empirischen Constante C' identificirt wird.[1]) Untersucht man aber nunmehr die Coëxistenzbedingung der Gleichungen (2) und (4), so findet man leicht:

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\frac{m}{m'}C}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1} = -\frac{\mathfrak{C}'}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1} \qquad \text{und daher:}$$

$$(7)\qquad \mathfrak{C}' = -\frac{m}{m'}C.$$

1) Vgl. den vorigen Aufsatz p. 187. Ferner Wied. Ann. 18. p. 407. 1883.

Setzt man diesen Werth in Ausdruck (6) für die brechende Kraft, so widerspricht derselbe (wenn man nicht etwa C imaginär nehmen will) wenigstens für die grösseren Wellenlängen den Erfahrungen der anomalen Dispersion, während die frühere Annahme $CC' = +D$ diesen unter den von mir eingehaltenen Versuchsbedingungen und unter Hinzufügung einer gewissen Nebenannahme[1]) genügt. Es muss also der empirische Coëfficient C' eine verwickeltere Bedeutung haben, als bis jetzt vorausgesetzt wurde.

II. Wenn in der bisherigen Entwickelung nur mit den beiden Kräften $e\Delta_2\xi$, $-\varkappa\xi'$ operirt wurde, welche der freie Aether wie das im ätherlosen Raum isolirt gedachte Molecülargefüge für sich entwickeln, so bleibt nicht ausgeschlossen, dass beim Zusammenschwingen der beiden Massensysteme und infolge desselben neue Kräfte als Kräfte der sogenannten Wechselwirkung zu ihnen hinzutreten. Insbesondere dürfte es plausibel erscheinen, dass die Körpertheilchen dem Andrängen der Aethertheilchen eine widerstehende Kraft entgegenstellen, die mit ihrer augenblicklichen Ausweichung aus ihrer Gleichgewichtslage, resp. ihrer Bewegungsquantität zunimmt, und die wir daher durch $\beta m'\xi'$ darstellen wollen. Ich werde zeigen, dass eine einzige Kraft von der hier vorausgesetzten Form in der That nothwendig und zugleich auch ausreichend ist, um allen bisherigen Beobachtungen in der genauesten Weise zu entsprechen.

Durch die hier gemachte Annahme vervollständigen sich jetzt die früheren Gleichungen (1) und (2) auf das System:

$$(8)\quad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2}d\xi + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}d\xi' = e\Delta_2\xi\, d\xi + \beta m'\xi' d\xi - \varkappa\xi' d\xi', \\ m\frac{d^2\xi}{dt^2}C + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\varkappa\xi', \end{cases}$$

sofern die zweite derselben in ihrer früheren Form unverändert beizubehalten ist.

Führt man in Rücksicht auf letztere mit der ersteren die oben besprochenen Aenderungen durch, so lässt sich nunmehr auch schreiben:

---

1) Ketteler, l. c. p. 410.

$$(9)\qquad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2} - m'\left(\beta\xi' + \frac{d^2\xi'}{dt^2}\frac{m}{m'}C\right) = e\Delta_2\xi \\ m\frac{d^2\xi}{dt^2}C + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\varkappa\xi'. \end{cases}$$

Ihnen entsprechen die Bedingungsgleichungen der Integration:

$$(10)\qquad n^2 - 1 = \frac{m'\xi'\left(\beta\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{m}{m'}C\right)}{m\xi}\Big/\frac{}{}, \quad \frac{m'\xi'}{m\xi} = \frac{C}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1}.$$

Wir setzen darin abkürzungsweise: $\beta/4\pi^2 = B/T_m^2$ und erhalten sonach:

$$(11)\qquad n^2 - 1 = \frac{\left(B\frac{T^2}{T_m^2} - \frac{m}{m'}C\right)C}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1}.$$

Hierin ordnen sich insbesondere den beiden extremen Wellenlängen 0 und ∞ die Werthe zu:

$$n_0^2 - 1 = \frac{m}{m'}C^2, \quad n_\infty^2 - 1 = BC,$$

und infolge dessen schreibt sich noch:

$$(11_b)\qquad n^2 - 1 = \frac{(n_\infty^2 - 1)\frac{T^2}{T_m^2} - (n_0^2 - 1)}{\frac{T^2}{T_m^2} - 1}.$$

Wollte man auch jetzt die erste der Gleichungen (9) auf ihre ehemalige empirische Form zu bringen suchen, so kann man zunächst schreiben:

$$(12)\qquad m\frac{d^2\xi}{dt^2} + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}\left(\beta\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{m}{m'}C\right) = e\Delta_2\xi,$$

und unter Benutzung eines passend gewählten Mittelwerthes von T hätte man dann die Identificirung anzunehmen:

$$\beta\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{m}{m'}C = C' \,(= \text{const.})$$

Um schliesslich von den durchsichtigen zu den absorbirenden Medien überzugehen, ist bekanntlich nur nöthig, der die Körpertheilchen in die Gleichgewichtslage zurückführenden Kraft $-\varkappa\xi'$ eine Reibungskraft von der Form $-\gamma(d\xi'/dt)$ hinzuzufügen. So erhält man statt der Ausdrücke (9) und (11) die folgenden:

$$(13)\qquad \begin{cases} m\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - m' C_0 \dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = e\Delta_2\xi + \beta m'\xi' \ ^1), \\ m' C_0 \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + m'\dfrac{d^2\xi'}{dt^2} = -\left(\varkappa\xi' + \gamma'\dfrac{d\xi'}{dt}\right) \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} n^2 - 1 = \dfrac{(n_\infty^2 - 1)\dfrac{T^2}{T_m^2} - (n_0^2 - 1)}{\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1}\, G\dfrac{T}{T_m}}. \end{cases}$$

Darin bedeuten jetzt $G = \gamma\,(T_m/2\pi m')$, ferner $C_0 = (m/m')\,C$, und:

$$(15)\qquad n_0^2 - 1 = \frac{m'}{m} C_0^2, \qquad n_\infty^2 - 1 = \frac{m'}{m} B C_0,$$

sodass erfahrungsmässig B und C_0 von der Dichtigkeit nahe unabhängig sind.

Schreiben wir endlich Gleichung (14) so:

$$n^2 - n_\infty^2 = \frac{(n_\infty^2 - n_0^2) + \sqrt{-1}\,(n_\infty^2 - 1)\,G\dfrac{T}{T_m}}{\dfrac{T^2}{T_m^2} - 1 - \sqrt{-1}\,G\dfrac{T}{T_m}}.$$

Das hier in Zähler und Nenner vorkommende Reibungsglied gelangt in manchen Fällen nur in einiger Nähe des Maximums der Absorption, für welches $T = T_m$ wird, zu merklicher Bedeutung. Behalten wir es für Medien von mittlerer Durchsichtigkeit blos im Nenner bei, so erhalten wir die einfache Beziehung:

$$(16)\qquad n^2 - n_\infty^2 = \frac{D}{\dfrac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1 - \sqrt{-1}\,G\dfrac{\lambda}{\lambda_m}}, \qquad D = n_\infty^2 - n_0^2.$$

Und zwar ist dies diejenige Form, welche ich meiner experimentellen Prüfung des Dispersionsgesetzes zu Grunde gelegt habe.[2])

Von Interesse dürfte vielleicht noch folgende Bemerkung sein. Wenn bei der früheren Behandlung[3]) der von

---

1) Auch in dieser Gleichung wird man statt $\beta\xi'$ vollständiger schreiben dürfen: $\beta\xi' + e\,(d\xi'/dt)$ wenngleich die bisherigen optischen Messungen eines solchen Gliedes anscheinend nicht bedürfen.

2) Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 481. 1881. — Ketteler und Pulfrich, Wied. Ann. 15. p. 337. 1882.

3) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 410. 1883.

der Erfahrung verlangte Grenzbrechungsindex n_∞ nur durch eine mit dem Dispersionsphänomen als solchem kaum in Zusammenhang stehende Betrachtung gewonnen werden konnte, hatte es hier einige Schwierigkeit, einen derartigen Grenzwerth mit der Vorstellung eines nicht starren Aethers in Uebereinstimmung zu bringen. Während nun in der That, der Voraussetzung 6 entsprechend, zufolge Gl. (10) die Amplitude der Körpertheilchen bei Vergrösserung der Wellenlänge kleiner und kleiner wird, erlangt doch andererseits ihre Rückwirkung auf den immer schwächer andrängenden Aether im Verhältniss zu ihrer Beschleunigung eine wachsende Bedeutung, sodass gerade durch das Zusammenwirken beider Umstände für die brechende Kraft eine ganz bestimmte endliche Zunahme resultirt.[1])

III. Auf die aus verschiedenen Molecularqualitäten zusammengesetzten Medien und ebenso auf die circularpolarisirenden Medien hier näher einzugehen, dürfte aus einleuchtenden Gründen überflüssig sein. Nur bezüglich der letzteren möge bemerkt werden, dass zwar das Rotationsgesetz der Polarisationsebene eine verwickeltere Form erhält, dafür aber sich der Erfahrung noch inniger anschliesst, als bisher.[2]) Die brechende Kraft dieser Mittel bekommt eben jetzt die relativ brauchbarere Gestalt:

$$n^2 - 1 = \frac{(n_\infty^2 - 1)\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - (n_0^2 - 1)}{\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1 \pm F\frac{\lambda}{\lambda_m}\right) - \sqrt{-1}\, G\frac{\lambda}{\lambda_m}}, \tag{17}$$

wohingegen der frühere Zähler constant war.

IV. Was schliesslich die anisotropen (gewöhnlichen) Medien betrifft, so gelten zunächst für die Schwingungen parallel den drei Elasticitätsaxen Gleichungen von der Form der Gleichungen (13) und (14), mit der Maassgabe jedoch,

1) Eine Combination der ersten der Gleichungen (8) mit Gleichung (5) entspräche dagegen der Annahme eines starren Aethers, insofern sie nämlich für unendlich langsame Schwingungen ein Amplitudenverhältniss $\xi' : \xi$ von endlicher Grösse gibt. Uebrigens führt dieselbe zu Widersprüchen mit der Voraussetzung 8.

2) Ketteler, Wied. Ann. **16.** p. 86. 1882.

dass die in ihnen vorkommenden Constanten β, C_0, $\varkappa$, γ eventuell von der Orientirung abhängig werden.

Bezieht man sodann, entsprechend der Voraussetzung 8, die beiden Incompressibilitätsgleichungen:

$$(18) \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0, \qquad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = 0$$

auf irgend welche intermediäre Richtung, so lässt sich zeigen[1]), dass deren Coëxistenz nur mit der allseitigen Gleichheit der Grössen C_0, $\varkappa$, γ verträglich ist, sodass also sowohl die Molecularkräfte nach Eigenschwingung und Dämpfung und dann auch das Verhältniss der zusammengehörigen axialen Amplituden der Körper- und Aethertheilchen, sowie der Phasenunterschied zwischen beiden für alle Richtungen gleich werden.

Bezüglich der Gleichheit der Kräfte $\varkappa$ hat auch jüngst Hr. Voigt[2]) sich aus allgemein elastischen Gründen für die Nothwendigkeit einer solchen ausgesprochen.

Bleiben sonach blos die neuen Kräfte $\beta_x m'\xi'$, $\beta_y m'\eta'$, $\beta_z m'\zeta'$ zu erledigen übrig, so unterliegt es wohl keinem Zweifel, dass die Constanten β zur linearen Dichte der Körpertheilchen in Beziehung stehen, ihr etwa genähert proportional sind. Sie sind dann in den Gleichungen (13) die einzigen mit der Orientirung variirenden Kräfte. Knüpften wir nun an die Form der Gleichung (12), und kämen wir überein, lediglich abkürzungsweise die drei nur von der Schwingungsdauer abhängenden Grössen:

$$(19) \qquad \begin{cases} \beta_x \frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{m}{m'} C = C_x', \qquad \beta_y \frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{m}{m'} C = C_y', \\ \beta_z \frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{m}{m'} C = C_z' \end{cases}$$

zu setzen, so gelangten wir in bekannter Weise zu den sechs früheren[3]) Gleichungen zurück. Doch soll fortan in den drei ersteren die bisherige longitudinale Beschleunigung der Kör-

1) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 647. 1883.
2) Voigt, Wied. Ann. 17. p. 468. 1882.
3) Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 149. 1883. Es war z. B.

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} + m' \frac{d^2\xi'}{dt^2} C_x' - m' \frac{d^2\xi_l'}{dt^2} K = e \Delta_2 \xi.$$

pertheilchen durch eine Longitudinalkraft des Aethers mit der Amplitude A_l ersetzt werden. Man hat dann:

$$(20)\quad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt^2} - m'\frac{d^2\xi'}{dt^2}C_0 = \mathfrak{e}\Delta_2(\xi+\xi_l) + \beta_x m'\xi', \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2} - m'\frac{d^2\eta'}{dt^2}C_0 = \mathfrak{e}\Delta_2(\eta+\eta_l) + \beta_y m'\eta', \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2} - m'\frac{d^2\zeta'}{dt^2}C_0 = \mathfrak{e}\Delta_3(\zeta+\zeta_l) + \beta_z m'\zeta'. \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} m\frac{d^2\xi}{dt}C + m'\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\left(\varkappa\xi' + \gamma\frac{d\xi'}{dt}\right), \\ m\frac{d^2\eta}{dt^2}C + m'\frac{d^2\eta'}{dt^2} = -\left(\varkappa\eta' + \gamma\frac{d\eta'}{dt}\right), \\ m\frac{d^2\zeta}{dt^2}C + m'\frac{d^2\zeta'}{dt^2} = -\left(\varkappa\zeta' + \gamma\frac{d\zeta'}{dt}\right), \end{cases}$$

Gleichungen, denen zufolge die für Aether- und Körpertheilchen gemeinsame Schwingungsrichtung senkrecht steht zum Strahle.

Aus ihnen entwickelt sich für die brechende Kraft ein Ausdruck von der Form der Ausdrücke (14) oder (16), aber in denselben wird nunmehr:

$$(22)\quad \begin{cases} n_\infty^2 = (n_\infty^2)_x U^2 + (n_\infty^2)_y V^2 + (n_\infty^2)_z W^2, \\ D = D_x U^2 + D_y V^2 + D_z W^2, \end{cases}$$

während n_0^2 von der Orientirung unabhängig bleibt.[1])

Was endlich den Winkel δ zwischen Strahl und Normale betrifft, so ergibt sich für denselben:

$$(23)\qquad \operatorname{tang}\delta = A_l/A,$$

eine um so bedeutungsvollere Beziehung, als mit deren bewusster Adoptirung auch für absorbirende Medien die übliche Darstellung von dem Wechselverhältniss einer umhüllenden und umhüllten Fläche als nur beschränkt gültig erheblich an Werth verliert.

Bonn, Anfang November 1883.

1) Ueber das ungünstige Verhältniss der Doppelbrechungstheorie Lommel's zur Erfahrung vgl. neuerlich Hollefreund. Nova Acta der K. Leop.-Carol. Acad. Halle 1883.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1884. ANNALEN № 2.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XXI.

I. *Ueber die thermische Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft galvanischer Elemente und ihrer Beziehung zur freien Energie derselben;* von *Siegfried Czapski.*

Einleitung.

Schon Helmholtz[1]) und nach ihm besonders W. Thomson[2]) hatten unter Voraussetzung der unbedingten Giltigkeit der Gesetze: der Erhaltung der Energie, der festen electrolytischen Actionen und des Joule-Lenz'schen über die Erwärmung metallischer und flüssiger Leiter durch den electrischen Strom den Satz aufgestellt, dass die electromotorische Kraft galvanischer Elemente (ohne Polarisation) der electrothermischen Energie der beim Stromdurchgang sich abspielenden chemischen Processe proportional sein und sich aus dieser berechnen lassen müsse. Die meisten Forscher, die sich seitdem mit dieser Frage beschäftigt haben, traten für die genannte Theorie ein. Indessen hatte schon Bosscha[3]) darauf hingewiesen, dass gewisse Versuche von Favre sich mit derselben in unlösbarem Widerstreit befänden und den Grund darin gefunden, dass die Joule'sche Ausdehnung seines Gesetzes auch auf die Erwärmung von Electrolyten wie die die Kette bildenden unzulässig sei. In neuerer Zeit hat F. Braun diesen Gegenstand wieder aufgenommen[4]) und erst aus allgemeinen Ueberlegungen als wahrscheinlich, dann durch eine sehr grosse Zahl von Versuchen als thatsächlich hingestellt, dass es im Widerspruch

1) Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft. p. 50. Berlin 1847.
2) W. Thomson, Phil. Mag. [4] p. 429. 1851.
3) Bosscha, Pogg. Ann. **103.** p. 478 ff. 1858; **108.** p. 312 ff. 1860.
4) F. Braun, Wied. Ann. **5.** p. 182 ff. 1878; **16.** p. 561 ff. 1882; **17.** p. 593 ff. 1882.

mit der erwähnten Theorie, Ketten gibt, deren electromotorische Kraft kleiner ist, als der Grösse der chemischen Energieänderung nach zu erwarten wäre, andere dagegen, in denen sie sogar grösser ist. Zu dem gleichen Resultat kam A. Wright.[1])

Dieselbe Frage: nach dem Arbeitswerthe chemischer Processe, hatte inzwischen Hr. Prof. v. Helmholtz in ganz allgemeiner Behandlungsweise in Angriff genommen.[2])

In der Einleitung seines ersten Beitrages „zur Thermodynamik chemischer Vorgänge" gibt Hr. Prof. v. Helmholtz eine Anwendung der beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie auf die electrolytischen Vorgänge in einer unpolarisirbaren Kette und leitet daselbst ab, dass und wie man aus dem Sinne und dem Grade der Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft galvanischer Elemente mit der Temperatur einen Schluss ziehen kann auf die Grösse der nicht in electrische Energie verwandelten chemischen Wärme der electrolytischen Processe, die sich im Element beim Stromdurchgang abspielen.

Hr. Prof. v. Helmholtz veröffentlicht an der betreffenden Stelle einige vorläufige Resultate von Versuchen, die er zur Prüfung jenes auf theoretischem Wege gewonnenen Satzes angestellt hatte. Auf seine Anregung habe ich diesen Gegenstand weiter verfolgt und erlaube mir, in dem Folgenden die Ergebnisse mitzutheilen, zu denen ich dabei gelangt bin.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Hrn. Geheimrath v. Helmholtz für die vielfache Anregung und Unterstützung im Laufe der Arbeit meinen wärmsten Dank auszusprechen. Ich habe mit seiner Erlaubniss die Versuche in den Räumen und mit den Mitteln des hiesigen physikalischen Instituts im Laufe des vergangenen Jahres (October 1882 bis August 1883) ausgeführt.

§ 1. Die Theoricen.

Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft muss die Erzeugung der electrischen Energie eines galvanischen

1) A. Wright, Phil. Mag. [5] **14.** p. 188. 1882.
2) v. Helmholtz, Berl. Ber. 1882. p. 22. u. p. 825.

Stromes in seinem Schliessungskreise von dem Verschwinden des gleichen Betrages von anderer oder gleichartiger Energie einer anderen Energiequelle begleitet sein. Bei den Hydroketten suchte man das Aequivalent der Stromarbeit von jeher in den chemischen Processen, die im Inneren der Zelle vor sich gehen. Wenn diese vor sich gingen, ohne Stromarbeit oder andere Energie zu erzeugen, so würden sie eine gewisse, positive oder negative, unter sonst gleichen Umständen der chemisch veränderten Masse proportionale Wärmemenge, Q, im Element frei werden lassen, die chemische Wärme, Wärmetönung. Wenn aber mit dem Vorsichgehen der chemischen Processe das Auftreten von electrischen Strömen verknüpft ist oder von anderen Energieformen, so muss nach jenem obersten Grundsatz der Physik die im Element frei werdende Wärmemenge um einen Betrag q vermindert werden, der jener anderen Energie äquivalent ist. Ist also der Strom J in einem Schliessungskreise vom Widerstand W erzeugt und während der Zeit t unterhalten worden, so kann im Element nur noch die Wärmemenge $Q' = Q - J^2 W t$ aufgetreten sein, wenn wir den Widerstand des Elementes als verschwindend gegen W annehmen. Der Rest, $q = J^2 W t$ kann unter Umständen vollständig als Erwärmung des Schliessungskreises wieder erscheinen und ist dann durch den Strom aus der Zelle gleichsam hinweggeführt und auf die ganze Strombahn vertheilt. Zu der Behauptung, dass jedesmal die ganze chemische Wärme als electrische Energie auftreten müsse, lag ein theoretischer Grund in dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft offenbar nicht vor. Der Umstand aber, dass dies Verhältniss bei dem viel gebrauchten Daniell'schen Element stattzuhaben schien, hatte zur Folge, dass dasselbe fast durchgängig generalisirt wurde, mit einer solchen Zuversicht, dass noch in neuerer Zeit H. F. Weber[1]) darauf bezügliche Versuche Favre's dadurch für widerlegt hielt, dass sie auf einen Widerspruch mit jener Hypothese führten. Man konnte nach derselben im voraus die electromotorische Kraft einer beliebigen Combination angeben, wenn

1) H. F. Weber, Absolute calorimetrische und electromagnetische Messungen, Zürich 1877. p. 49.

die betreffenden thermochemischen Daten bekannt waren. Denn da man:

$$Q = J^2 W t$$

setzte, und nach dem Ohm'schen Gesetze $J = E/W$ ist, (wenn E die electromotorische Kraft des Stromkreises bedeutet) also $Q = EJt$, und da andererseits $Q = gJt$ ist, wie aus dem Faraday'schen electrolytischen Gesetze folgt, so muss $E = g$ sein. Hierin bedeutet g die Wärmetönung der chemischen Processe, die beim Durchgang der Electricitätsmenge Eins durch das Element vor sich gehen. Alle physikalischen Grössen hat man sich dabei in denselben, z. B. mechanischen Einheiten ausgedrückt zu denken.

Hr. Prof. Braun hat nun vor allem nachgewiesen, dass bei einer überwiegenden Anzahl von Combinationen E nicht gleich g ist, sondern bald grösser, bald kleiner. g ist die Differenz der Wärmetönungen q_1 und q_2, die den chemischen Processen am negativen und am positiven Pole der Kette zukommen. Braun bewies, dass die electromotorische Kraft E einer Combination sich darstellen lasse in der Form:

$$E = x.q_1 - yq_2,$$

worin x und y echte Brüche sind, abhängig von der Natur des chemischen Processes, mit dessen Wärmetönung multiplicirt sie in obigem Ausdrucke auftreten. Sie stellen das Maass der Arbeitsfähigkeit, freien Verwandelbarkeit der betreffenden chemischen Processe dar, weshalb sie Braun auch die „electromotorischen Nutzeffecte" derselben nennt. Braun zeigte, dass es nur ein Zufall sei, wenn beim Daniell'schen und einigen anderen Elementen $xq_1 - yq_2 = q_1 - q_2$ ist.[1])

Die Betrachtungen von Hrn. Prof. v. Helmholtz gehen davon aus, dass die Vorgänge in einem constanten galvanischen Elemente bei verschwindend kleiner Stromintensität als vollkommen reversibel angesehen werden können und deshalb den thermodynamischen Gesetzen der umkehrbaren Processe unterliegen müssen. Dabei ist die dem Widerstande

1) G. Wiedemann hat (Die Lehre von der Electricität, 3. Aufl. II. § 989, 1883) gegen die Art, wie Braun die chemischen Vorgänge in den Ketten in Rechnung gezogen hat, mehrere Bedenken geltend gemacht, betreffs derer auf das citirte Werk verwiesen sei.

und dem Quadrate der Intensität proportionale Wärmeentwickelung im Stromkreise als eine, den anderen vorkommenden Grössen gegenüber verschwindende vernachlässigt. Der Durchgang der Electricitätsmenge $d\varepsilon$ in einer bestimmten Richtung bringt stets die gleichen chemischen Vorgänge mit sich; in der entgegengesetzten Richtung die entgegengesetzten. Bei derselben Temperatur des Elementes wird seine gesammte Energie nach dem Durchgange des electrischen Quantums $d\varepsilon$ um eine bestimmte Grösse geändert sein, indem nach dem Faraday'schen Gesetze die Summe aller chemischen Spannkräfte um einen mit $d\varepsilon$ proportionalen Betrag zu- oder abgenommen hat. Im übrigen wird die Energie des Elementes von der Temperatur selbst abhängen. In einem gewissen Momente können wir den Zustand des Elementes als bis auf Constanten bestimmt ansehen durch die bis zu diesem Momente durch das Element gegangene Electricitätsmenge ε und die (absolute) Temperatur des Elementes, ϑ. Die Energie U ist eine Function von ε und ϑ; die Aenderung dU der Energie ist durch die Grösse der Aenderung der Parameter $d\varepsilon$ und $d\vartheta$ vollkommen bestimmt. Lasse ich das Element von dem durch ε und ϑ fixirten Zustand in den durch $\varepsilon + d\varepsilon$ und $\vartheta + d\vartheta$ definirten übergehen, so geschieht diese Zustandsänderung durch Vorgänge, die naturgemäss in drei Theile zerfallen:

a) Der Aenderung von ϑ in $\vartheta + d\vartheta$ entspricht eine Zunahme der Energie U um $(\partial U/\partial \vartheta) . d\vartheta$, die „Erwärmung".

b) Der Aenderung von ε in $\varepsilon + d\varepsilon$ bei constanter Temperatur entspricht eine Aenderung der Energie $= (\partial U/\partial \varepsilon) . d\varepsilon$.

c) Wenn die Electricitätsmenge $d\varepsilon$ durch das Element (und seinen ganzen Schliessungskreis) durchgeht, so ist dies, je nach dem Sinne, in dem sie durchgeht, entweder eine Arbeitsleistung von Seiten oder eine solche an dem Elemente, die proportional der Electricitätsmenge $d\varepsilon$ selbst und der im Schliessungskreis vorhandenen Potentialdifferenz p ist. Rechnen wir ε als positiv, wenn es in dem Sinne durch das Element tritt, in dem die Potentialdifferenz desselben es zu bewegen strebt, so ist die Aenderung des Parameters ε in $\varepsilon + d\varepsilon$ mit der Arbeitsleistung $+p d\varepsilon$ von Seiten des Elementes verbunden.

Nach dem ersten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie muss es eine bestimmte Wärmemenge dQ geben, durch deren Zu-, resp. Ableitung man die mit der gleichzeitigen Arbeitsleistung $p d\varepsilon$ erfolgte Energieänderung dU des Systemes hervorgebracht denken kann, sodass $dQ = dU + p d\varepsilon$, also hier:

$$(1) \qquad dQ = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p\right) d\varepsilon .$$

Dabei hat man sich alle physikalischen Grössen, die in die Rechnung mit eingehen, in demselben, z. B. in mechanischem Maasse ausgedrückt zu denken.

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik gibt es wegen der vorausgesetzten Umkehrbarkeit der Processe eine Function S der Variabeln ε und ϑ, die Entropie des Systemes, deren Aenderung

$$dS = \frac{1}{\vartheta} \cdot dQ \text{ ist, also } = \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \frac{1}{\vartheta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p\right) d\varepsilon .$$

Da aber: $$dS = \frac{\partial S}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \text{ ist,}$$

und $d\varepsilon$ und $d\vartheta$ jeden unendlich kleinen Werth haben dürfen, so muss:

$$\frac{\partial S}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{\partial U}{\partial \vartheta}; \quad \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{\vartheta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p\right) \text{ sein.}$$

Bilde ich aus jeder der beiden linken Seiten dieser Gleichungen den Ausdruck $\partial^2 S / \partial \varepsilon \partial \vartheta$, resp. $\partial^2 S / \partial \vartheta \partial \varepsilon$, so werden auch die rechten Seiten beider Gleichungen, in derselben Weise behandelt, wie die linken Seiten, einander gleich, also ist

$$\frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon . \partial \vartheta} = \frac{1}{\vartheta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon \partial \vartheta} + \frac{\partial p}{\partial \vartheta}\right) - \frac{1}{\vartheta^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p\right),$$

folglich: $$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + p = \vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} .$$

Die Gleichung (1) kann daher geschrieben werden:

$$(1_a) \qquad dQ = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot d\varepsilon .$$

Daher ist $\vartheta . \partial p / \partial \vartheta . d\varepsilon$ die Grösse derjenigen Wärmemenge, die ich dem Element zuführen muss, um den positiven oder negativen Wärmeschwund zu compensiren, der mit dem Durchgang der Electricitätsmenge $d\varepsilon$ durch das Element in der

hier als positiv angenommenen Richtung verbunden ist, oder, was dasselbe ist: um das Element beim Durchgange von $d\varepsilon$ auf constanter Temperatur zu erhalten.

Dies ist das Resultat, zu dem Hr. Prof. von Helmholtz in seiner Abhandlung gelangt ist.

Suchen wir dasselbe noch von einer anderen Seite, als eben, zu deuten:

Der Durchgang von $d\varepsilon$ durch ein Element im positiven Sinne hat, wie vorhin schon bemerkt, eine Aenderung der potentiellen chemischen Energie des Elementes zur Folge. Nehmen wir an, dass die Wärmetönung der Verbindungen, welche stattfinden, die der Zersetzungen übertreffe — wenn alle in Bezug auf chemisch äquivalenten Mengen berechnet werden —, so können wir sagen, mit dem Durchgange von $d\varepsilon$ sei eine Verminderung der chemischen Spannkräfte verbunden. Die Grösse der Verminderung wird eben durch den Ueberschuss der positiven Wärmetönungen über die negativen angegeben. Um diese Verminderung ohne Temperaturänderung des Elementes vor sich gehen zu lassen, muss ich dem Elemente eine Wärmemenge entziehen, die gleich jenem Ueberschuss ist, d. h. soviel als im Elemente naturgemäss frei würde, wenn keine andere Energieerzeugung mit dem Verlaufe der chemischen Processe einhergehen würde. Wenn die Wärmetönung der Processe am positiven Pole die der Processe am negativen Pole überwiegt, so ist das Umgekehrte der Fall: Die Summe der chemischen Spannkräfte wird vermehrt, und ich müsste dem Elemente Wärme zuführen, um es trotz dieser Vermehrung seiner chemischen Energie bei constanter Temperatur zu erhalten.

Die Leistung der Stromarbeit $pd\varepsilon$ andererseits, der zweite Vorgang im Elemente, der mit dem Durchgange von $d\varepsilon$ verbunden ist, kann immer nur auf Kosten anderer Energie geschehen, und es muss daher dem Elemente ein der Stromarbeit $pd\varepsilon$ äquivalenter Betrag von Energie zugeführt werden, damit sich dasselbe nicht abkühle; denn von den gleichzeitigen chemischen Processen ist für den Augenblick abgesehen.

Je nachdem also die Stromarbeit eines Elementes grösser oder kleiner ist, als die gesammte Wärmetönung der chemi-

schen Processe die beim Stromdurchgang sich abspielen, muss ich demselben Wärme zuführen oder entziehen, um seine Temperatur ungeändert zu erhalten. Die Quantität dieser Wärmemenge gibt jener Ausdruck $\vartheta . (\partial p/\partial \vartheta) d\varepsilon$ an. Er ist also auch anzusehen als die Differenz: Stromarbeit minus Wärmetönung im Element, und da ϑ seiner Natur, $d\varepsilon$ unserer Annahme nach positive Grössen sind, so wird die Beobachtung ergeben müssen, dass diejenigen Elemente, die nicht alle chemische Wärme in Stromarbeit umsetzen, eine mit wachsender Temperatur abnehmende electromotorische Kraft haben, und umgekehrt diejenigen, welche zum Theil auf Kosten ihres eigenen Wärmeinhaltes arbeiten, eine mit der Temperatur wachsende Kraft.

Es handelte sich für mich darum, das thatsächliche Vorhandensein einer solchen Beziehung qualitativ und quantitativ festzustellen.

§ 2. Methode der Untersuchung und Berechnungsweise.

Ich verfuhr zu diesem Zwecke folgendermassen:

Um es zunächt mit messbaren Grössen zu thun zu bekommen, kann man die Gleichung:

$$dQ = \vartheta \cdot \frac{\partial p}{p\,\vartheta} \cdot d\varepsilon, \tag{2}$$

die aus (1_a) hervorgeht, dadurch dass man $d\vartheta = 0$ setzt, innerhalb beliebiger Grenzen unter der Voraussetzung constant bleibender Temperatur ϑ integriren, sodass:

$$Q = \vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot \varepsilon$$

wird, wenn man der Kürze wegen mit ε die von dem beliebigen Zeitpunkt t an durch das Element tretende Electricitätsmenge und mit Q die dem Element zur Constanthaltung seiner Temperatur gleichzeitig zuzuführende Wärmemenge bezeichnet.

Wählt man für die in Betracht kommenden Arbeitsgrössen als gemeinsames Maass das calorische und zwar die Kilogrammcalorie = Cal. als Einheit, so kann man die Wärmetönung der chemischen Processe, die nach dem Faraday'schen Gesetz mit dem Durchgang der Electricitätsmenge ε

durch das Element verknüpft sind, nach den vorhandenen thermochemischen Daten berechnen, sobald nur die chemischen Processe selbst genügend bekannt sind. Andererseits kann durch Rechnung das Wärmeäquivalent der Stromarbeit gefunden werden, welche die bei der Potentialdifferenz der untersuchten Combination durch den Schliessungskreis derselben fliessende Electricitätsmenge ε leistet, wofern diese Potentialdifferenz gemessen und in entsprechenden Einheiten ausgedrückt ist. Endlich muss die Veränderlichkeit der electromotorischen Kraft des Elementes mit der Temperatur, also die Grösse $\partial p/\partial \vartheta$, experimentell bestimmt, in denselben Einheiten wie p und ε ausgedrückt und mit den Zahlenwerthen von ϑ und ε multiplicirt werden. Dieses Product musste gleich der Differenz der vorher erwähnten beiden Grössen sein.

Es blieb also übrig, experimentell die electromotorische Kraft verschiedener galvanischer Elemente und deren thermische Veränderlichkeit zu messen und in absoluten Einheiten auszudrücken.

Ich will nur kurz erwähnen, dass für diesen Zweck geeignete Messungen noch nicht vorlagen. W. H. Preece gibt einen Theil der ohnehin nicht bedeutenden Literatur in einer neuen Arbeit an.[1]) Preece glaubte, diesem Uebelstande zu praktischen Zwecken bei den gebräuchlichsten Elementen abhelfen zu müssen. Doch war sein Verfahren ein so unzweckmässiges, dass bei seinen Versuchen die beiden Flüssigkeiten der zu messenden Zellen während der Messung noch gegen einander Temperaturdifferenzen bis zu 17° (!) C. hatten, woraus sich seine sonderbaren Resultate wohl ohne weiteres erklären.

In der That war es nöthig, die Messungsweise electromotorischer Kräfte bis zu einem beträchtlichen Grade von Genauigkeit und Feinheit zu treiben, wie schon eine ungefähre Schätzung erkennen lässt. Denn wenn Q selbst den Werth von 20 Cal. erreichte, so war $\partial p/\partial \vartheta$ wegen des grossen Factors ϑ (= 293 ca.) kleiner als $\pm$ 0,0005 Normal-Daniell.

Folgende Bedingungen waren zu erfüllen:

1) Preece, Proc. of the London Roy. Soc. **35.** p. 48. 1883.

1) Es musste ein Normalelement hergestellt werden, auf das die electromotorische Kraft der Versuchselemente bezogen werden könnte, das also selbst merklich constant war;

2) musste die electromotorische Kraft des Normalelementes in absoluten Einheiten gemessen werden oder gegeben sein;

3) musste das zu untersuchende Element hinreichend constant und polarisationsfrei sein;

4) musste dasselbe so zusammengesetzt sein, dass die electrolytischen Processe in ihm reversibel und wohl bekannt waren;

5) musste die electromotorische Kraft des Versuchselementes mit der des Normalelementes genau verglichen werden;

6) musste die Temperatur des Versuchselementes hinlänglich constant gehalten und genau verglichen werden.

Ich will darauf eingehen, wie diese Voraussetzungen zu erfüllen gesucht wurden:

ad 1) das Streben nach einem empirischen Normal der electromotorischen Kraft, welches jederzeit leicht und genau herstellbar und längere Zeit hindurch constant sei, ist meines Wissens noch nicht von endgültigen Erfolgen gekrönt worden. Auf folgendem Wege glaubte ich, mich möglichst vor Fehlern sicher zu stellen: Ich construirte zwei Zink-Quecksilberelemente von der Art, die Hr. Prof. v. Helmholtz in dem zweiten Beitrag zu seiner citirten Abhandlung beschreibt, aus $Zn \mid ZnCl_2 \mid Hg_2Cl_2 \mid Hg$ mit etwa achtprocentiger Chlorzinklösung. Diese Elemente wurden in zwei- oder dreihalsigen Woulf'schen Flaschen luftdicht verschlossen, damit ihr Zustand durch Oxydationen nicht geändert werde. Die electromotorische Kraft beider war nicht ganz die gleiche. Diese beiden Elemente nahm ich zu Normalen. Da ich dieselben nur stromlos gebrauchte, da sie sich mit der Temperatur äusserst wenig ändern und auch (in einem Wasserbade) nahe auf constanter Temperatur gehalten wurden, so glaubte ich, mich darauf verlassen zu können, dass bei dem Mangel aller denkbaren inneren Veränderungen auch die electromotorische Kraft dieselbe bleiben würde. Eine Controle verschaffte ich mir überdies noch dadurch, dass ich entweder das zu untersuchende Element jedesmal mit beiden Calomels (K_1 und K_2) oder mit nur einem der-

selben und dieses in kurzen Intervallen mit dem anderen verglich. Relative Aenderungen der Normalelemente mussten bei diesem Verfahren deutlich erkennbar sein. Wenn nun etwa unbekannte Vorgänge in einem oder beiden Elementen sich abspielten, die die electromotorische Kraft beeinflussten, so war doch unwahrscheinlich, dass dies in beiden Elementen derart geschehe, dass die electromotorischen Kräfte durch sie im selben Verhältniss geändert würden, und wenn daher dies Verhältniss constant befunden wurde — was mit grosser Annäherung der Fall war[1]) — so war mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit auf die Constanz der electromotorischen Kräfte im einzelnen zu schliessen. Schliesslich wurden zweimal Vergleichungen mit einem anderen, recht gut genau herstellbaren, für meine Zwecke aber aus anderen Gründen nicht brauchbaren Normalelement vorgenommen, sodass auch die absolute Aenderung der electromotorischen Kraft jedes der beiden Calomelelemente erkennbar werden musste. Nämlich um

ad 2) alle Messungen der electromotorischen Kräfte auf absolute Einheiten zurückzuführen, und da sich bei dem Versuche einer directen Bestimmung derselben in absolutem Maasse mir schwer überwindliche Hindernisse entgegenstellten, so verglich ich die beiden Calomels mit einem Element, dessen absolutes Maass der electromotorischen Kraft ich als anderweitig hinreichend genau bestimmt ansah. Es war dies ein Daniell aus galvanoplastischem, frisch amalgamirtem Zink in neutraler gesättigter Zinksulfatlösung und galvanoplastischem, blankgeputztem Kupfer in neutraler, gesättigter Kupfersulfatlösung; die beiden Lösungen in den Schenkeln eines U-förmigen Rohres von ca. 23 cm Höhe ohne Diaphragma übereinander geschichtet. Hr. Prof. v. Helmholtz hatte mir diese Anordnung empfohlen. Zu jedem Versuche muss dies Element wegen der Störungen infolge von Diffusion neu zusammengesetzt werden. Soviel ich aus den kurzen Mittheilungen des Hrn. Prof. H. F. Weber[2]) ersehen kann, ist das eine der von ihm benutzten Elemente von der ge-

1) Anhang, Tab. I.

2) l. c. p. 45.

nannten Zusammensetzung. Er findet im electromagnetischen absoluten Maasssystem ein solches Normal-Daniell N.-D. = 1,0954 Volt. (10^8 cm$^{3/2}$ g$^{1/2}$/sec.[1]). Die Vergleichungen mit den beiden Calomels ergaben[1]):

am 15. Juni	1883	$K_1 = 0{,}99322$ N.-D.	= 1,0884 Volt.
„ 2. Aug.	1883	$K_1 = 0{,}99172$ N.-D.	
„ 15. Juni	1883	$K_2 = 0{,}99494$ N.-D.	= 1,0904 Volt.
„ 2. Aug.	1883	$K_2 = 0{,}99390$ N.-D.	

Jede dieser Angaben ist das Resultat zahlreicher Versuche, durch die ich unter anderem feststellen konnte, dass bei den gewählten Dimensionen das N.-D. sich im Laufe eines Tages noch kaum merklich ändert; nachher aber schneller. Die Differenzen zwischen den ersten und den zweiten Bestimmungen erklären sich aus einer etwas verschiedenen Zusammensetzung des N.-D. Es war nämlich im N.-D. das specifische Gewicht, gemessen an der Wage mittelst Tara und Schwimmkörper, von:

	$ZnSO_4$, aq	$CuSO_4$, aq
am 15. Juni	1883 = 1,4628 (21° C.)	= 1,1648 (22° C.)
„ 2. Aug.	1883 = 1,4605 (20° C.)	= 1,1653 (19° C.)

Die Verschiedenheiten der Concentration an beiden Polen wirken in dem Sinne, um das N.-D. im zweiten Falle stärker zu machen, als im ersten Falle, sodass hierin und nicht in der Veränderung der Calomels die wahrscheinliche Erklärung der betreffenden Abweichungen liegen dürfte. Unter Zugrundelegung des am 15. Juni gefundenen Werthes ist also:

$$K_1 = 1{,}0884 \text{ Volt.} \qquad K_2 = 1{,}0904 \text{ Volt.}$$

Die Genauigkeit einer solchen Bestimmung ist immerhin keine sehr grosse, trotz der guten Uebereinstimmung, die die einzelnen Versuchsreihen in sich zeigen; denn zwischen der F. Weber'schen Bestimmung des absoluten Werthes der Siemens'schen Quecksilbereinheit, auf der seine Messung des absoluten Werthes von electromotorischen Kräften basirt, und den Resultaten der von anderen Physikern vorgenommenen bestehen die bekannten erheblichen Differenzen. Jedoch liegt sein Werth ungefähr in der Mitte zwischen den übrigen, und die nach ganz verschiedenen Methoden gewon-

1) Anhang, Tab. II.

nenen Versuchsreihen zeigen in sich und untereinander eine sehr gute Uebereinstimmung. Aus demselben Grunde habe ich bei der Berechnung meiner Versuche als Joule'sches Wärmeäquivalent 428,55 kg gewählt, welchen Werth F. Weber[1]) als Mittel aus seinen Versuchen über Erwärmung von Stromleitern durch constante Ströme calorimetrisch und aus dem durch Regnault untersuchten Verhalten der Gase durch Rechnung erhalten hat.

ad 3) und 4) In wie weit die Versuchselemente als constant angesehen werden dürfen, ist aus den einzelnen Beobachtungsreihen zu erkennen. In dieser Beziehung musste zunächst auf möglichste Reinheit der das Element bildenden Substanzen und guten Abschluss derselben gegen die atmosphärische Luft alle Sorgfalt verwendet werden. Die Bedingungen 3) und 4) beschränken die Wahl der brauchbaren Combinationen auf eine verhältnissmässig geringe Zahl. Es konnten nur Elemente vom Typus:

$$Me_1 \mid Me_1 Salz_{(a)} \mid Me_2 Salz_{(a)} \mid Me_2$$

angewendet werden, wie z. B. die Normalelemente:

$$Zn \mid ZnCl_2 \mid Hg_2Cl_2 \mid Hg.$$

Ferner musste das eine Salz fest und in der Lösung des anderen selbst unlöslich, überhaupt gegen dieses chemisch indifferent sein, und beide Salze mussten bei den Temperaturen, denen sie ausgesetzt wurden, in ihren Lösungen beständig und gegen ihre Metalle neutral sein. Besonders darf das positive Metall nicht mit anderen, noch positiveren, und das negative mit negativeren verunreinigt sein. Die Umkehrbarkeit ist dann bei dem angegebenen Typus selbstverständlich. Wie weit aber die chemischen Processe wirklich statthaben, die in Rechnung gezogen werden, hängt von dem thatsächlich erreichten Grade der Reinheit der Substanzen und der Zuverlässigkeit der bezüglich ihrer bekannten chemischen Angaben ab.

ad 5) Zur Messung der electromotorischen Kräfte, d. h. zur Vergleichung derselben, wurde die du Bois-Reymond'sche Compensationsmethode gewählt, bei welcher das zu messende Element stromlos gebraucht wird, sodass die

1) l. c. p. 31, 44.

Störungen vermieden werden, welche durch electrische Differenzen infolge von Erwärmung und Concentrationsänderung an den Electroden entstehen. Es zeigte sich aber bald als nothwendig, auch das Normalelement, mit dem das zu untersuchende verglichen wurde, stromlos zu gebrauchen. Dies konnte in einfachster Weise dadurch erreicht werden, dass beide Elemente mit einem dritten verglichen wurden, das seinerseits nur während der Dauer jeder einzelnen Messung constant zu sein brauchte. Ich schaltete also in den Schliessungskreis zweier hohen Daniells ohne Diaphragma, wie sie hier im physikalischen Institute üblich sind, einen Siemens'schen Widerstandskasten, der 10000 S.-E. enthielt; führte von dem einen Ende desselben einen Draht zu einem empfindlichen Wiedemann'schen Multiplicator, welcher andererseits mit den beiden gleichnamigen Polen des Normal- und des Versuchselementes verbunden war. Von den anderen beiden Polen derselben gingen Leitungen zu zwei Quecksilbernäpfen, die durch einen letzten Draht nach Belieben mit einer mittleren Stelle des Widerstandskastens verbunden werden konnten. Die Beobachtung des Multiplicatorspiegels geschah natürlich mittelst Fernrohres und Scala. Wie schon oben erwähnt wurde, ist die thermische Veränderlichkeit der galvanischen Elemente meist eine so geringe, dass eine sehr genaue und feine Messung der electromotorischen Kräfte nöthig war. Bei der du Bois-Reymond'schen Compensationsmethode erhält man das Verhältniss zweier electromotorischen Kräfte als gleich dem Verhältniss zweier Widerstände, nämlich dessen des ganzen Stromkreises der compensirenden Elemente und des mit ihm gemeinschaftlichen Theiles der Strombahn der compensirten Elemente. Letzterer, a, wird direct am Rheostaten abgelesen; ersterer begreift ausser dem des Rheostaten b noch den Widerstand w der stromgebenden Elemente selbst plus dem der Zuleitungsdrähte in sich. Die Summe der letzteren beiden, also w, (50 bis 60 S.-E.) wurde nach einem, wenn ich nicht irre, zuerst von Beetz[1]) angegebenem Verfahren bestimmt, welches einfach darin besteht, dass man das Verhältniss der-

1) Beetz, Pogg. Ann. **142.** p. 573. 1871.

selben beiden electromotorischen Kräfte nach der du Bois-Reymond'schen Methode durch zwei Widerstandsverhältnisse mit verschiedenem Zähler ausdrückt. Man hat dann:

$$\frac{e}{E} = \frac{a}{b+w} = \frac{a'}{b'+w}; \qquad w = \frac{ab' - a'b}{a - a'},$$

wenn e die zu messende, E die stromgebende electromotorische Kraft bedeutet, und a, b, w die vorhin angegebenen Grössen sind, während a' und b' die Werthe sind, die man respective für a und b bei der zweiten Compensation erhält. Vorausgesetzt ist hierbei, dass w, also besonders der Widerstand der stromgebenden Elemente bei beiden Messungen derselbe sei. Derselbe hängt aber von der Intensität des das Element durchfliessenden Stromes ab, wie man hier sehr deutlich zu beobachten Gelegenheit hatte. Da nun die Stromlosigkeit der den Multiplicator enthaltenden Strombahn selten vollkommen erreicht wird, sondern wegen der Unstetigkeit des Rheostatenwiderstandes, wenn ich so sagen darf, zwischen zwei engste Grenzen interpolirt werden muss, so hat man darauf zu achten, dass die Compensation mit dem insgesammt geringeren Widerstande der Strombahn nur durch momentane Stromschlüsse geschehe. Man erhält dann bei verschiedenen Bestimmungen von w Werthe, die nur um 1 bis 3 S.-E. schwanken. Ein Fehler von $\pm$ 5 S.-E. in dem Werthe von w bringt bei den gewählten Grössenverhältnissen der übrigen Widerstände erst einen Fehler des Resultates von etwa 0,0003 Proc. hervor. Die Empfindlichkeit des Galvanometers war eine derartige, dass in der Nähe der Compensationsstelle die Ein- oder Ausschaltung von 1 S.-E. im Widerstandskasten noch einen deutlichen Ausschlag hervorbrachte, wenn der Widerstand der Strombahn der compensirten Ketten bis 5000 und der der compensirenden bis 10000 S.-E. betrug. Man konnte also meist noch den gesuchten Widerstand bis auf 0,1 S.-E. schätzen; ein Irrthum von 0,2 S.-E. ändert den Werth der gesuchten electromotorischen Kraft erst um 0,00002 bis 0,00008 Daniell.

Es wurde nun nach folgendem Schema beobachtet: Nachdem die Leitung, wie a. v. S. angegeben, hergestellt war, compensirte ich alternirend fünf- bis siebenmal einerseits das Ver-

suchselement, andererseits das Normalelement durch die beiden Daniells, wobei die Widerstandsverhältnisse geringe Variationen zeigten. Dann mass ich, um den Widerstand der hohen Daniells selbst zu finden, das zuletzt compensirte Element noch in einem anderen Widerstandsverhältniss mit numerisch verschiedenem Zähler, also auch Nenner.

Ich greife eine beliebige Messung heraus. Ein Cd-Element wurde mit K_2 verglichen, und ich erhielt zur Bestimmung von Cd/K_2:

$K_2 : 2\,D. = 4797 / (9797 + w)$	$K_2 : 2\,D. = 4797{,}5 / (9797{,}5 + w)$
$Cd : 2\,D. = 2673{,}5 / (7673{,}5 + w)$	$= 1947 / (3947 + w)$
$K_2 : 2\,D. = 4797 / (9797 + w)$	$= 4800 / (9800 + w)$
$Cd : 2\,D. = 2673{,}7 / (7673{,}7 + w)$	$= 1948 / (3948 + w)$
$K_2 : 2\,D. = 4797{,}5 / (9797{,}5 + w)$	$= 4800 / (9800 + w)$.
$Cd : 2\,D. = 2674 / (7674 + w)$	

Hieraus folgt:

$$w = \frac{5 \cdot 1947{,}5 - 2 \cdot 4798}{4798 - 1947{,}5} \cdot 10^3 = 50 \text{ S.-E.}$$

$$Cd = \frac{2673{,}7}{7724} \cdot \frac{9847}{4797{,}2} \cdot K_2 = 0{,}71054\, K_2.$$

Die ganze Messung dauert, wenn man schnell operirt, 1—3 Minuten.

Wenn auf diese Weise eine Messung erfolgt war, so wurde sie nach etwa einer Stunde wiederholt, um eine Controle betreffs der Constanz der electromotorischen Kraft und der Temperatur zu erhalten. Durch solche und andere Vorsichtsmaassregeln gelang es in der That, die Methode der Messung bis zu einer genügenden Feinheit zu bringen, so dass jede einzelne Vergleichung der electromotorischen Kräfte als solche bis auf 0,00001 Dan. genau gelten kann. Wenn die Uebereinstimmung der zu verschiedenen Zeiten erhaltenen Werthe der Potentialdifferenz desselben Elementes bei derselben Temperatur nicht eine ebenso weitgehende war, so lag dies vor allem an der unvollständigen Constanz der Versuchselemente, deren Bedingungen ad 3) und 4) angegeben sind und fast unmöglich ganz und gar erfüllt werden können.

ad 6) Was endlich die Constanthaltung der Temperatur der Versuchselemente betrifft, so wurde diese gewöhnlich

durch einen Thermostaten von bedeutender Wärmecapacität zu erreichen gesucht, von der Art, wie sie z. B. Hr. d'Arsonval in den Comptes rendus von 1879 und 1881 beschrieben hat, in denen nämlich das den constant zu temperirenden Raum umgebende Wasser in seiner Totalität selber als der Thermoregulator dient. Die Temperatur von 0° C. wurde natürlich lieber mit schmelzendem Eis hergestellt; hierbei muss auch die äussere Temperatur möglichst nahe 0° sein, um die Erwärmung oder Abkühlung der Electroden durch Leitung auszuschliessen. Es ist ferner nöthig, das Element mehrere Stunden auf der gewünschten Temperatur zu erhalten, bevor man sicher sein kann, dass es in allen Theilen gleichmässig durchwärmt ist. Da sich die thermochemischen Angaben zunächst gewöhnlich auf die Temperaturen 15—20° beziehen, so konnte es genügen, die Function $\partial p/\delta \vartheta$ in diesem Intervalle zu bestimmen, also die electromotorischen Kräfte etwa zwischen 0 und 30° zu beobachten.

Die Wiedergabe der Resultate der einzelnen Messungen geschieht im Anhang. Ich will daher nur noch die der Berechnung zu Grunde gelegten Werthe der physikalischen Constanten angeben und dann gleich die schliesslichen Resultate mittheilen.

Um die thermochemischen Daten ohne Aenderung benutzen zu können, wurde als Einheit der Electricitätsmenge diejenigen genommen, die im Stande ist, 2 g H electrolytisch abzuscheiden. Man hat die sogenannte chemische Stromeinheit (durch welche 1 ccm normalen Knallgases per Minute zersetzt wird) electromagnetisch gemessen und dieselbe,

$$1 \text{ chem. Stromeinheit} = 0{,}00948 \text{ g}^{1/2} \text{cm}^{1/2} \text{sec.}^{-1}$$

gefunden. Dies normale Knallgas hat

$$\text{die Dichte} = 0{,}000\,536 \text{ g cm}^{-3}.$$

Der Strom, der 1 g H_2O zersetzt, ist also

$$= \frac{0{,}000\,948}{0{,}000\,536} \text{ g}^{1/2} \text{cm}^{1/2} \text{sec.}^{-1}.$$

Nun werden 18 g H_2O in 2 g H und 16 g O zerlegt; also ist der Strom, der 2 g H abscheidet, achtzehnmal so gross, und der, welcher dies in einer Sec. leistet, noch 60 mal grösser, d. i.:

$$= 19140 \text{ g}^{1/2} \text{cm}^{1/2} \text{sec.}^{-1},$$

und da Intensität = Electricitätsmenge / Zeit, so gibt die

Zahl 19140 das electromagnetische absolute Maass der angenommenen Electricitätsmenge im C.-G.-S.-System an.

Hat ferner ein Element die Potentialdifferenz p, so ist die Arbeit, die es dadurch leistet, dass es die Electricitätsmenge ε durch seinen Schliessungskreis treibt, $= p.\varepsilon$. Es muss also auch p in absolutem Maasse ausgedrückt sein, worüber oben die Rede war. Der bequemeren Zahlen wegen wurden, wie dort schon bemerkt, nicht die mechanischen, sondern die calorischen Aequivalente der vorkommenden Arbeitsgrössen ausgerechnet, sodass auch jetzt noch die thermochemischen Daten unverändert beibehalten werden konnten. Man hat also das Wärmeäquivalent der Stromarbeit $= p.\varepsilon/J$, worin $J = 428{,}55$ ist, und p durch K_1 oder K_2 gemessen ist, und $K_1 = 1{,}0884$ Volt.; $K_2 = 1{,}0904$ Volt.

Die chemische Wärme endlich kann geradezu aus den Angaben der betreffenden Experimentatoren (wenn möglich aus denen J. Thomsen's) entnommen werden, die sich meist schon auf Stoffmengen beziehen, die 2 g H äquivalent sind.

Statt des Ausdruckes $Q = \vartheta.(\partial p/\partial\vartheta)\varepsilon$ wurde nun auch der entsprechende $= \vartheta(\partial p/\partial\vartheta)\,\varepsilon/J$ in Rechnung gezogen.

Folgendes sind die Ergebnisse[1]) zu denen ich mit Hülfe der im Vorstehenden angegebenen Methoden und Rechnungsweisen gelangt bin.

§ 3. Die Resultate.

1) Ein von Hrn. Warren de la Rue dem Hrn. Prof. v. Helmholtz zugesandtes Element eigener Construction, das mir Hr. Prof. v. Helmholtz freundlichst zur Verfügung stellte. Zu bemerken ist, dass bei diesen Elementen, die aus:

$$Zn \mid ZnCl_2\text{-Lösung} \mid AgCl \mid Ag$$

bestehen, das Silber ungeschützt mit der Chlorzinklösung in Berührung ist.

Specifische Dichte der $ZnCl_2$-Lösung = 1,2466, also etwa 1 Molecül $ZnCl_2$ auf 22 Molecüle H_2O.

Electrom. Kraft $p = 0{,}9057\ K_1$ bei 16° C.:

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = -\,0{,}000\,24\ K_1$$

im Mittel aus zwei Beobachtungsreihen.

1) Die einzelnen Messungen sind in Tab. III (Anhang) zusammengestellt.

Hiernach Arbeitswärme $p\varepsilon K_1/J = 44{,}3$ Cal.
Chemische Wärme zwischen:

$$\left.\begin{array}{l}(Zn, Cl_2, aq.) = 112{,}84 \\ -(Ag_2, Cl_2) = -58{,}76\end{array}\right\} \text{und} \quad \begin{array}{l}(Zn, Cl_2) = 97{,}21 \\ -(Ag_2, Cl_2) = -58{,}76\end{array}$$

$$= 54{,}08 \text{ Cal.} \qquad = 38{,}45 \text{ Cal.}$$

Es macht sich gleich hier fühlbar, dass unsere bisherigen Kenntnisse der thermochemischen Verhältnisse ungenügende sind, indem die Auflösungswärme fester Salze in wässerigen oder anderen Lösungen dieser Salze, verschiedener Concentration, nicht in ihrer Abhängigkeit von dieser Concentration, als Function derselben hinreichend bekannt sind. Meistens kennt man nur die Auflösungswärme in einer so verdünnten Lösung, dass weiterer Wasserzusatz in ihr keine Temperaturänderung hervorbringt, dies ist in unserem Falle $(Zn, Cl_2, aq.) = 15{,}63$ Cal. Dagegen ist $(Zn, Cl_2) = 97{,}21$ Cal. die Bildungswärme des festen Salzes, die ihrerseits wiederum um ihre Krystallisationswärme von der Bildungswärme in einer ganz gesättigten Lösung verschieden ist. In unserem Falle können wir daher nur sagen, dass die Auflösungswärme des neugebildeten Chlorzinks in der Chlorzinklösung des Elementes um einige Calorien kleiner sein werde als 15,36, also auch die Grösse $(Zn, Cl_2, aq.) < 112{,}84$ Cal.,

aber erheblich $\gg$ 97,21 Cal.

Demnach die ganze chemische Wärme $< 54{,}08$ Cal., aber viel weiter entfernt von 38,45.[1])

Auf diese Weise ist eine genaue Controle der Uebereinstimmung der Versuche mit dem Gesetze kaum mehr möglich. Nur eine Schätzung des Grades der Uebereinstimmung bleibt übrig.

Wir haben also:

---

1) Während des Druckes dieser Arbeit erhielt ich den III. Bd. von J. Thomsen, Thermochem. Untersuchungen. Mittelst des dort gegebenen über die Verdünnungswärme von $ZnCl_2$ berechnet sich für die angewandte Lösung (Zn, Cl_2, aq) ca. = 108,40 Cal. Demnach die chemische Wärme = 49,64; dies von dem Arb.-Aequ. = 44,3 Cal. abgezogen gibt = — 5,34, während erhalten wurde = — 3,39.

Stromarbeit	=	44,32 Cal.	bei 16° C.
Chem. Wärme	<	54,08 „	
Differenz	>	− 9,76 Cal.	

Berechn.: $\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J} = -3{,}39$ „ ,

also von gleichem Vorzeichen und innerhalb des Bereiches der möglichen Werthe, da die Bezeichnung $> -9{,}76$ Cal. einen algebraisch grösseren Werth ausdrücken soll.

2) Dasselbe Element mit einer Chlorzinklösung von der specifischen Dichte $\sigma = 1{,}7343$, also viel concentrirter.

Gefunden wurde:

$p = 0{,}8108\ K_1$ bei 17° C.

$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = -0{,}000195\ K_1$ aus zwei Beobachtungsreihen.

Berücksichtigen wir, dass die Chlorzinklösung mehr als doppelt soviel Salz enthält, als die vorige, so werden wir sagen müssen, dass für (Zn, Cl_2, aq.) ein Werth zu setzen ist, der erheblich kleiner als 112,84 Cal. und schon näher an (Zn, Cl_2) = 97,21 Cal. ist; also für die ganze chemische Wärme der entsprechend zugehörige. Danach ist:

Stromarbeit	=	39,67 Cal.	=	39,67 Cal.	bei 17° C.
Chem. Wärme	⟨⟨	54,08 „	und >	38,45 „	
Differenz	⟩⟩	− 15,60 Cal.	<	+ 1,22 Cal.	

Berechn.: $\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J} = -\ 2{,}77$ „ [1])

3) Ich will gleich hier die Ergebnisse einfügen, zu denen ich bei einem anderen Exemplar gleicher Zusammensetzung gelangt bin. Ich stellte mir dieses her, um die Einwürfe zu vermeiden, die man aus dem erwähnten Umstande entnehmen könnte, dass das Silber frei durch die Chlorzinklösung zum Chlorsilber ging. Es bestand aus sogenanntem „chemisch-reinen" Zink, sehr verdünnter $ZnCl_2$-Lösung und AgCl, das um einen Silberdraht geschmolzen war; das Ganze war in ein Glasgefäss nach Evacuirung der Luft eingeschmolzen. Dies Element gab ausserordentlich regelmässige Resultate. Die electromotorische Kraft war zwischen

1) Hier ergibt sich aus den Thomsen'schen Versuchen durch Interpolation die chemische Wärme = 47,1 Cal., also die gesuchte Differenz = − 7,5.

19° und 31° sehr nahezu eine lineare Function der Temperatur, und zwar:

$$p = 0{,}919\,72\ K_1 \text{ bei } 19°\text{ C.}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = -0{,}000\,360\,6\ K_1;$$

Stromarbeit	=	44,69	Cal.
Chemische Wärme	<	54,08	„
Differenz:	>	− 9,39	Cal.
Berechn.: $\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J}$	=	− 5,12	„ ,

also eine durchaus genügende wahrscheinliche Uebereinstimmung.

4) Weniger zuverlässige Resultate konnten mit den Elementen erhalten werden, die Eisenchlorür, $FeCl_2$, als den einen Electrolyten enthielten. Es gelang mir nicht, eine Lösung herzustellen, die neutral wäre und sich bei möglichstem Luftabschluss unverändert erhielte. Stets trat nach einiger Zeit eine Ausscheidung der bekannten braunrothen Salze ein, die wohl Oxychloride sind. Demgemäss war die electromotorische Kraft inconstant. Das erste einigermassen brauchbare Element bestand aus Fe (feinster Klaviersaitendraht), $FeCl_2$ (3,36 g in 100 ccm Wasser, frisch dargestellt); Hg_2Cl_2 und Hg.

Seine electromotorische Kraft wuchs mit der Zeit (entsprechend der durch das Absetzen der unlöslichen Oxychloride eintretenden Verdünnung der Lösung). Der Sicherheit wegen wurde das Element jedesmal mit beiden K's verglichen. Im Mittel aus einer Beobachtungsreihe, die der Zeit nach von hoher zu niederer Temperatur ging, und einer sich unmittelbar daranschliessenden, die von niederer zu höherer Temperatur ansteigend gemacht wurde, liess sich die electromotorische Kraft durch den quadratischen Ausdruck:

$$p = \{0{,}65681 + 0{,}001366\ \vartheta - 0{,}000\,024\,5\ \vartheta^2\}\ K_1$$

darstellen. Hiernach ist z. B. bei 20° C.:

$$p = 0{,}67433\ K_1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = +0{,}000\,337\ K_1.$$

Die chemische Wärme

$(Fe, Cl_2, aq.)$	<	99,95	Cal.
$-(Hg_2, Cl_2)$	=	−82,55	„
also	<	+ 17,4	Cal.

Nun berechnet sich bei 20° C.:

Arbeitsäquivalent	=	33,00	Cal.
Chemische Wärme	<	17,40	„
Differenz ca.	=	+ 15,6	Cal.

$$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J} = + \ 4{,}85 \quad „$$

Die empirische Formel, die p als Function von ϑ darstellt, sagt aus, da sie in ϑ quadratisch ist, dass auch $\partial p / \partial \vartheta$ noch von der Temperatur abhänge, und zwar linear mit relativ beträchtlichem Coëfficienten abnehme, wenn die Temperatur steigt. Man kann nun die in Betracht kommenden drei Grössen, die Stromarbeit, die chemische Wärme und $\vartheta \cdot (\partial p / \partial \vartheta)\ \varepsilon / J$ bei einer beliebigen anderen Temperatur berechnen, und auch dann noch müsste der Theorie nach die Differenz der ersteren beiden Grössen gleich der letzteren sein. Nun ist aber die zweite, die chemische Wärme von der Temperatur meist sehr wenig abhängig. Denn nach den in der Thermochemie angewandten Grundsätzen ist innerhalb gewisser Grenzen:

$$[(Fe, Cl_2, aq.) - (Hg_2, Cl_2)]_t = [(Fe, Cl_2, aq.) - (Hg_2, Cl_2)]_T + (T - t)\{\overline{FeCl_2} - \overline{Hg_2Cl_2} - \overline{Fe} + 2\overline{Hg}\},$$

wenn die mit einem horizontalen Strich versehenen Buchstaben die „specifischen Molecularwärmen" der betreffenden chemischen Substanzen bezeichnen, d. h. die Producte aus den specifischen Wärmen und Moleculargewichten. Der mit (T − t) multiplicirte Ausdruck ist aber gegen die übrigen vorkommenden Grössen sehr klein; er ändert die rechte Seite der Gleichung kaum um 0,1 Cal. Man kann daher innerhalb eines solchen Temperaturintervalles, dass in ihm die in der { }-Klammer genannten Substanzen ihren physikalischen Zustand nicht wesentlich ändern, die chemische Wärme, W, als nahezu constant ansehen.

Berechnet man aber die bei uns in Betracht kommenden Grössen, z. B. für 10° C., so findet man:

$$p = \ 0{,}66802 \ K_1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = + 0{,}000\,876 \ K_1.$$

Stromarbeit	=	32,69 Cal.
Chemische Wärme	=	17,40 „
Differenz:	=	+ 15,29 Cal.
$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\varepsilon}{J}$	=	+ 12,13 „

und für 0° C.: $p = 0{,}65681\ K_1$,

$$\frac{\partial p}{\partial \vartheta} = 0{,}001\,366\ K_1.$$

Stromarbeit	=	32,89 Cal.
Chemische Wärme	=	17,40 „
Differenz:	=	+ 15,49 Cal.
$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J}$	=	+ 18,25 „

Man sieht also, dass man durch passende Wahl der Temperatur, für die man die fraglichen Grössen ausrechnet, willkürlich eine beliebige Uebereinstimmung der Versuche mit der Theorie herstellen kann.

Wenn jedoch, wie es die Theorie verlangt:

$$p \frac{\varepsilon}{J} - W = \vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J}$$

für jede Temperatur giltig sein soll, so muss auch ($\varepsilon/J = C$ gesetzt):

$$C \frac{\partial p}{\partial \vartheta} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = C \left(\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + \vartheta \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \vartheta^2} \right) \text{ gelten,}$$

oder:

$$C\vartheta \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \vartheta^2} = - \frac{\partial W}{\partial \vartheta}.$$

Da aber die chemische Wärme sich, wie gezeigt, innerhalb gewisser Grenzen kaum merklich ändert, also $\partial W / \partial \vartheta = 0$ ist, so muss auch annähernd $\partial^2 p / \partial \vartheta^2 = 0$ sein. Keinesfalls darf der Coëfficient von ϑ^2 einen relativ erheblichen Werth haben, wie in der obigen empirischen Formel.

Daher habe ich graphisch aus allen Versuchen einen dieselben möglichst gut wiedergebenden linearen Ausdruck für p gebildet, nämlich:

$$p = (0{,}656\,81 + 0{,}000\,663\ \vartheta)\ K_1,$$

dann ist bei 20° C.:

Stromarbeit	=	32,84 Cal.
Chemische Wärme	=	17,40 „
Differenz:	=	+ 15,44 Cal.
$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J}$	=	+ 9,50 „

Die Uebereinstimmung der Grössenordnung nach ist unzweifelhaft und in Anbetracht der Schwierigkeit der Versuche vielleicht als genügend anzusehen. Andere Versuchsreihen mit demselben Element ergaben ganz analoge Resultate; ich unterlasse daher, sie hier aufzuführen.

5) Ich stellte noch ein zweites Element gleicher Zusammensetzung, wie das vorige, zusammen, nur dass ich die $FeCl_2$-Lösung viel concentrirter wählte. (Den Grad der Concentration kann ich leider nicht angeben, da der zur Analyse reservirte Rest der Lösung durch ein Versehen abhanden kam.) Bei der Berechnung der chemischen Wärme wird man hier jedenfalls nicht mehr (Fe, Cl_2 aq) = 99,95 Cal. ansetzen dürfen, sondern einen Werth, der zwischen diesem und (Fe, Cl_2) = 82 Cal. liegt. Die ganze chemische Wärme ist dann $< 17{,}35$ Cal. und könnte im Minimum etwa 0 Cal. sein. Ich muss bemerken, dass die $FeCl_2$-Lösung schwach sauer war, sodass an der Fe-Electrode eine ganz geringe H-Entwickelung stattfand.

Aus den Beobachtungen der electromotorischen Kraft bei vier Temperaturen liess sich eine lineare Beziehung zwischen p und ϑ nicht herstellen. Ich habe schliesslich die beiden äussersten Temperaturen und die beiden mittleren je einer linearen Formel zu Grunde gelegt, weil ich so deutlich zwei Grenzwerthe erhielt. Aus den Beobachtungen bei 0° und 30° war:

$$p = (0{,}5282 + 0{,}00153\,\vartheta)\,K_1; \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = +\,0{,}00153;$$

während von 12 bis 20° annähernd:

$$p = \big(0{,}5497 + 0{,}00085\,(\vartheta - 12)\big)K_1; \quad \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = +\,0{,}00085 \text{ ist,}$$

und nach beiden Formeln bei 16° C.:

$$p = 0{,}5525\,K_1.$$

Hiernach berechnet sich für $\vartheta = 16°$ C.:

Aeq. der Stromarbeit =	26,85 Cal.,		
Chemische Wärme	$<$ 17,35 „ ,	$>$ 0 Cal.	
Differenz	$>$ + 9,5 Cal.,	$<$ + 26,85 Cal.	

$$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta}\,\frac{\varepsilon}{J} = +\,21{,}47 \text{ „ ,}$$

$$\text{resp.} = +\,11{,}93 \text{ „ .}$$

Durch geeignete Concentration der $FeCl_2$-Lösung kann man erreichen, dass die chemische Wärme geradezu = Null ist. Solche Elemente arbeiten also zum grössten Theile, resp. ganz auf Kosten ihrer Eigenwärme und erreichen dabei eine electromotorische Kraft von etwa 0,5 Volt. Hr. Prof. Braun hatte ebenfalls beobachtet, dass Combinationen mit Eisen als der einer Electrode eine viel grössere electromotorische Kraft haben, als ihnen der Wärmetönung nach zukommt, und bei $Cd \mid CdSO_4 \mid FeSO_4 \mid Fe$ sogar umgekehrte Polarität der Electroden gefunden.

6) 7) 8) Ich will hier die Messungen erwähnen, die ich an den Normalelementen selbst angestellt habe und an ganz analog gebauten, in denen die Chlormetalle durch die entsprechenden Brommetalle Hg_2Br_2, $ZnBr_2$ ersetzt waren. Hr. Prof. Braun hat auch diese Combinationen der Messung unterworfen, und auch in seinen Augen sind sie wegen der genauen Bestimmbarkeit der in ihnen vor sich gehenden chemischen Processe und ihrer Polarisationsfreiheit ganz vorzüglich geeignet, zur Entscheidung der vorliegenden Fragen herangezogen zu werden. Nach seiner Berechnung ist

für $ZnCl_2 \mid Hg_2Cl_2$:		für $ZnBr_2 \mid Hg_2Br_2$:	
Arbeitswärme	= 50,5 Cal.	Arbeitswärme	= 52,0 Cal.
Chemische Wärme	= 30,2 „	Chemische Wärme	= 22,6 „
Differenz	20,3 Cal.	Differenz	29,4 Cal.

Diese Zahlen lassen eine relativ grosse Abhängigkeit der electromotorischen Kraft von der Temperatur vermuthen. Im Gegensatz dazu erwähnt bereits Hr. Prof. v. Helmholtz die geringe thermische Veränderlichkeit der Chlorzink-Calomel-Elemente, und ich bin trotz wiederholter Versuche sowohl bei diesen, als den $ZnBr_2 \mid Hg_2Br_2$ Elementen zu keinem anderen Resultate gekommen. So berechnet sich für das eine Normalelement:

Stromarbeit	=	48,68 Cal.
Chemische Wärme	=	30,25 „
Differenz	=	+ 18,43 Cal.

Hingegen nahm die electromotorische Kraft zwischen 0 und 20° nur um 0,000 072 4 ihres Werthes pro +1° C. zu, wonach

$$\vartheta . (\partial p/\partial \vartheta)\, \varepsilon/J = + 1{,}07$$

wird. Der Unterschied lässt sich weder aus Beobachtungsfehlern noch aus der Unbestimmtheit der thermochemischen Verhältnisse erklären, da im Gegentheil für die chemische Wärme schon die obere Grenze angesetzt ist. Dasselbe gilt von den beiden, aus den Bromüren gebildeten Elementen, die wiederum verschieden concentrirte Bromzinklösung enthielten (sie waren mir von Hrn. stud. phil. R. v. Helmholtz für diese Messungen freundlichst überlassen worden). Für das Element, dessen Zinklösung verdünnter war, als die des anderen ergab sich:

$$p = \{0{,}84215 + 0{,}4702 . 10^{-3} (\vartheta - 9{,}87) - 0.6986 . 10^{-5} (\vartheta - 9{,}87)^2\} K_2$$

oder als mittlerer linearer Ausdruck:

$$p = \{0{,}83203 + 0\,000\,547\, \vartheta\} K_2 \text{ und bei } 20^0 \text{ C.}$$

Stromarbeit	=	41,21 Cal.,	resp. =	41,05 Cal.
Chemische Wärme	=	22,67 „	„ =	22,67 „
Differenz	=	+ 18,38 Cal.,	resp. =	+ 18,54 Cal.
$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J}$	=	+ 7,80 „	„ =	+ 4,69 „

Diese Uebereinstimmung liegt auch nicht innerhalb der Grenzen des Möglichen, wie bei den anderen Elementen noch stets der Fall war.

Das andere Bromzinkelement zeigte eine noch geringere thermische Veränderlichkeit; nach den bei ca. 10, 20, 30° angestellten Beobachtungen ist:

$$p = \{0{,}81415 + 0{,}22478 . 10^{-3} (t - 9{,}9^0) - 0{,}2936 . 10^{-5} (t - 9{,}9)^2\} K_2 .$$

Demnach bei 20° C.:

Stromarbeit	=	39,74 Cal.
Chemische Wärme	=	22,67 „
Differenz	=	+ 17,07 Cal.
$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J}$	=	+ 1,53 „

Der Mangel an Uebereinstimmung zwischen der berechneten und gefundenen Zahl ist hier noch eclatanter. Die beiden Bromürelemente sind aber aus einem anderweitigen Grunde ungeeignete Objecte für solche Messungen, indem Hg_2Br_2, welches als feines Pulver über dem Hg lagert, sich

mit der Zeit in der $ZnBr_2$-Lösung auflöst, also die Bedingungen nicht erfüllt sind, die dem Gelingen der Versuche zu Grunde liegen. Bei den Calomelelementen kann dieser Grund nicht geltend gemacht werden, da zwar auch Hg_2Cl_2 in Wasser und wässerigen Salzlösungen löslich ist, aber in so verschwindendem Maasse, dass man diesem Umstande kaum eine merkliche Folge zuschreiben darf, ehe nicht besondere Untersuchungen darüber das Gegentheil lehren.

9) Analog den Chlorzink-Calomel und Chlorzink-Chlorsilberketten stellte ich zunächst eine solche her, die statt des Zn Cd enthielt, also $Cd \mid CdCl_2 \mid Hg_2Cl_2 \mid Hg$.

Die Chlorcadmiumlösung war eine zehnfache Verdünnung[1]) einer bei 24° C. gesättigten Lösung vom specifischen Gewicht = 1,8786.

Dieselbe geringe thermische Veränderlichkeit, derselbe Mangel an Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung, wie bei den vorerwähnten Ketten, zeigte sich auch hier. Dabei war das Element sehr constant und gab in verschiedenen Messungsreihen sehr gut stimmende Werthe. Das eine mal, ich werde bald erwähnen, unter welchen Umständen, erhielt ich p sehr nahezu als lineare Function von ϑ, und zwar in der Nähe von 20°:

$$p = \{0{,}71121 + 0{,}000\,186\,(\vartheta - 20{,}47)\}\,K_1.$$

Die chemische Wärme ist:

$(Cd, Cl_2, aq) =$	96,25 Cal.	(höchstens)
$-(Hg_2, Cl_2) =$	− 82,55 „	
$=$	13,70 Cal.	(höchstens)

Für 20,5 berechnet sich:

Stromarbeit	= 34,56 Cal.	
Chemische Wärme	= 13,70 „	
Differenz	= + 20,86 Cal.	

$$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J} = +2{,}65\,\text{Cal.}$$

1) Es scheint mir geeigneter, bei thermochemischen Arbeiten die Concentration in Bezug auf den Sättigungsgrad anzugeben als das Verhältniss der H_2O-Molecüle zur Zahl der gelösten Salzmolecüle, da die Auflösungswärme mit der ersteren in einem naturgemässen Zusammenhange steht, während bei der letzteren Art die Natur (Löslichkeit) des betreffenden Salzes gar nicht berücksichtigt ist.

Dass der Fehler die einzelnen Beobachtungen treffe, daran kann hier ebensowenig wie bei den Normalen gedacht werden, da die extremsten bei derselben Temperatur erhaltenen Werthe kaum den Ziffernwerth des angegebenen Resultates verändern. Ich untersuchte diesbezüglich mehrere Umstände. Das Cd-Metall scheint nicht vollkommen rein gewesen zu sein; darauf deutete wenigstens der Umstand, dass es sich, in die $CdCl_2$-Lösung getaucht, schnell mit einem bläulich-schwarzen Ueberzug bedeckte. Die directe chemische Analyse gab nicht so unzweifelhafte Resultate, dass ich sie hier anführen möchte, da auch die zu Gebote stehenden Reagentien, wie z. B. Salpetersäure, eisenhaltig zu sein schienen, und ich mich einer eingehenden chemischen Untersuchung nicht widmen konnte. Es traten ferner im Elemente chemische Reactionen ein, die nicht in Rechnung gezogen sind: im weiteren Laufe der Zeit bildete sich über dem Cadmium, soweit es in die Flüssigkeit tauchte, eine weisse, ziemlich dicke Kruste, deren Bildung wesentlich vom Luftzutritt bedingt und in meinem Element wahrscheinlich schon durch die inwendig abgesperrte Portion ermöglicht war. Ein anderer von den Praktikanten des physikalischen Institutes, Hr. Arons, hat sich seinerzeit mit jenem Salze näher befasst.

Auf den Einfluss eines dritten Umstandes brachte mich die Bemerkung, dass alle Elemente, welche Hg als den einen Pol halten, schlechtere Resultate für die Rechnung gaben, als Elemente sonst gleicher Zusammensetzung, in denen statt des Hg ein festes Metall, z. B. Silber und daneben seine Chlorverbindung angewendet war. Hr. Prof. v. Helmholtz erwähnt nämlich in seinem zweiten Beitrag p. 826, dass in den Elementen mit Hg-Electrode durch Erschütterungen electromotorische Kräfte infolge der Dehnung und Zusammenziehung der Hg-Oberfläche erregt werden. Man beobachtet dann eine Abnahme der sonst vorhandenen electromotorischen Kraft, die erst nach fünf bis zehn Minuten wieder verschwunden ist.

Nun stand der Thermostat, in dem sich die Elemente meist befanden, durch untergelegte hohe Holzklötze gestützt auf einem gewöhnlichen Stativtische, er war also weder vor

den in der Stube, noch vor den ausserhalb, auf der Strasse etc. erregten Erschütterungen im mindesten geschützt. Die Beobachtung der spiegelnden Oberfläche von Quecksilber in einem auf ihn gestellten Gefässe zeigte dies aufs augenscheinlichste. Da sich diese Erschütterungen, wenn auch nicht regelmässig, so doch schnell genug folgen, um sich in ihren Wirkungen auf die electromotorische Kraft abzulösen, so könnte trotz ihnen eine merklich constante Kraft beobachtet werden, die aber kleiner als die wahre sein mochte. Dieser Umstand allein würde nun die Rechnung noch mehr zu Ungunsten der zu erwartenden Uebereinstimmung gestalten, da proportional mit der electromotorischen Kraft die Stromarbeit wächst, wenn nicht die von den Erschütterungen herrührende Gegenkraft selbst mit der Temperatur wächst. In allen benutzten Elementen mit Hg als dem einen Pol wächst die ganze electromotorische Kraft mit der Temperatur. Die Stärke der Gegenkraft hängt von der Veränderung der Capillaritätsconstante des Hg ab, daher sowohl von ihrem ursprünglichen Werthe, als von der Stärke der Erschütterung. Letztere wird sich vielleicht bei gleicher mechanischer Grösse doch bei wärmerem, also specifisch leichterem Hg bemerklicher machen, als bei dichterem, und erstere ist thatsächlich von der Temperatur abhängig. Wie diese beiden Factoren zusammenwirken, ist nicht ohne weiteres anzugeben, aber die Möglichkeit, dass hierin eine Fehlerquelle liege, war vorhanden. Dieselbe hätte schlagend bewiesen werden können, durch eine an einem erschütterungsfreien Orte angestellte Beobachtungsreihe. Eine solche lässt sich aber bekanntlich kaum verwirklichen. Stellte ich den Thermostaten auf einen Pfeiler, der vom Stubenfussboden isolirt bis in den Grund des Gebäudes ging, so war an der Quecksilberoberfläche des erwähnten Gefässes zwar schon mit blossem Auge eine Verminderung der Erschütterungen erkennbar, aber dieselben waren keineswegs verschwunden. Die Beobachtungen, die ich unter diesen Umständen an dem Elemente machte, sind es, die der oben gegebenen Berechnung zu Grunde gelegt wurden. Unzweifelhaft war dabei zu erkennen, dass die Curve der electromotorischen Kraft eine einfachere (fast

eine Gerade) und stärker ansteigende war — wie ich erwartet hatte. Auch zeigten die zu gleichen Temperaturen gehörigen Beobachtungen unter sich geringere Differenzen bei dieser als bei jenen früheren Messungsreihen, und der Werth der electromotorischen Kraft nach derselben war für alle Temperaturen höher als die entsprechenden vorher gefundenen; sodass diese Versuche ganz die Voraussetzungen zu bestätigen scheinen, zu deren Prüfung sie angestellt wurden. Ob aber hierin die genügende Ursache für die starken Abweichungen des gefundenen von dem theoretisch geforderten Resultate liegt, will ich nicht ohne weiteres behaupten. Dass den erstgenannten beiden Umständen, der Unreinheit des Cd und den secundären chemischen Actionen kein allzu grosses Gewicht beizulegen ist, zeigen

10) die Resultate, die bei zwei Elementen erhalten wurden, die auch Cd-Pol und $CdCl_2$ als Electrolyten hatten, ferner aber aus AgCl und Ag bestanden. Die $CdCl_2$-Lösung war von derselben entnommen, von der ein Theil im $CdCl_2 \mid Hg_2Cl_2$-Element verwandt war; das AgCl war um die Ag-Electrode herumgeschmolzen, sodass ungeschütztes Silber hier ebensowenig, wie bei dem von mir selbst hergestellten de la Rue'schen Element mit der anderen Salzlösung in Berührung kam. Das eine Element war durch die gewöhnlichen Vorsichtsmaassregeln, das andere durch Evacuiren, und Einschmelzen in Glas vor Luftzutritt geschützt. Bei diesem letzteren trat infolge dessen die Bildung des weissen unlöslichen Cadmiumsalzes nicht ein. Die electromotorische Kraft war bei demselben wieder sehr annähernd lineare Function der Temperatur, und zwar im Mittel aus acht Beobachtungen:

$$p = 0{,}66646 - 0{,}000\,256\,(\vartheta - 19{,}5).$$

Also bei 19,5° C.:

Aequiv. der Stromarbeit	=	32,4	Cal.
Chemische Wärme höchst.	=	37,4	„
Differenz:	= −	5,0	Cal.
$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{s}{J}$	= −	3,6	„ .

Schluss.

Nach den im Laufe der Untersuchung gemachten Erfahrungen würde ich wohl jetzt im Stande sein, einen Theil der zuerst ausgeführten Messungen mit noch grösserer Präcision auszuführen. Jedoch befinden sich auch diese, ebenso wie die übrigen über den Zusammenhang der thermischen Veränderlichkeit galvanischer Elemente mit deren freier Energie angestellten Versuche ausnahmslos in Uebereinstimmung mit dem von Hrn. Prof. v. Helmholtz theoretisch abgeleiteten Satze, in so fern man aus dem Sinne dieser Veränderlichkeit unmittelbar einen Schluss darauf ziehen kann, ob in dem betreffenden Elemente die frei verwandelbare Energie der beim Stromdurchgang sich abspielenden chemischen Processe grösser oder kleiner, als ihre gesammte Wärmetönung ist.

Zu einer genauen quantitativen Prüfung des Satzes fehlen vor allem die thermochemischen Daten.

Anhang.

Tabelle I.

Das Verhältniss der beiden Normalelemente, meist aus directen Vergleichen, bei einer mittleren Temperatur von 18°C.

Datum	$K_2 : K_1$	Fehler	Datum	$K_1 : K_2$	Fehler
21. Febr. 1883	1,0014	−0,0001	28. Juni 1883	0,99847	+0,00027
22. „ „	1,0013	−0,0002	29. „ „	0,99875	+0,00055
22. „ „	1,0015	±0,0000	30. „ „	0,99833	+0,00013
23. „ „	1,0015	±0,0000	30. „ „	0,99782	−0,00038
23. „ „	1,0017	−0,0002	2. Juli 1883	0,99867	+0,00047
23. „ „	1,0013	−0,0002	2. „ „	0,99861	+0,00041
21. „ „	1,0007	−0,0008	3. „ „	0,99843	+0,00023
22. „ „	1,0014	+0,0001	4. „ „	0,99833	+0,00013
23. „ „	1,0017	+0,0002	5. „ „	0,99797	−0,00023
23. „ „	1,0016	+0,0001	16. „ „	0,99910	+0,00010
15. Juni „	1,0018	+0,0003	19 „ „	0,99810	−0,00010
15. „ „	1,0016	+0,0001	26. „ „	0,99786	−0,00034
15. „ „	1,0018	+0,0003	26. „ „	0,99792	−0,00028
18. „ „	1,0019	+0,0004	26. „ „	0,99795	−0,00025
18. „ „	1,0018	+0,0003	26. „ „	0,99802	−0,00018
28. „ „	1,0015	±0,0000	27. „ „	0,99790	−0,00030
			27. „ „	0,99784	−0,00036
Mittel =	1,0015	±0,0002	27. „ „	0,99782	−0,00038
			27. „ „	0,99786	−0,00034
			Mittel =	0,99820	±0,00028

Tabelle II.

Vergleich der Normal-Calomelelemente mit einem Normal-Daniell.

a) Datum	$K_1 : ND$	$K_2 : ND$	b) Datum	$K_1 : ND$	$K_2 : ND$
15. Juni 1883	0,99328	0,99493	28. Juli 1883	0,99015	0,99330
15. „ „	0,99293	0,99470	2. Aug. „	0,99172	0,99390
15. „ „	0,99346	0,99520	2. „ „	0,99250	0,99462
16. „ „	0,99472	0,99637	3. „ „	0,99252	0,99462
18. „ „	0,99293	0,99519			
18. „ „	0,99391	0,99551			
18. „ „	0,69449	0,99635			
Mittel	0,99367	0,99546			

NB. Die Messungen, bei denen dasselbe N.-D. gebraucht wurde, sind mit } zusammengefasst. Bei b) wurde nur das zweite Paar den Rechnungen zu Grunde gelegt, da im ersten N.-D. die Zinklösung nicht gesättigt war.

Tabelle III.

Die Messungen, aus denen die im Text angegebenen Werthe von $\partial p/\partial \vartheta$ abgeleitet sind.

ad 1) (nach einer unvollkommen Methode).

Datum	Temp.	$R_1 : K_1'$ [1]	
21. Februar 1883	16,26° C.	0,9164	
21. „ „	16,20	0,9148	0,91495
22. Januar „	15,97	0,9151	
22. „ „	14,05	0,9154	0,91555
22. „ „	14,00	0,9157	
22. „ „	0,00	0,9198	
22. „ „	0,00	0,9180	0,91893
22. „ „	0,00	0,9190	
ad 2)		$R_2 : K_1'$	
8. Februar 1883	17,65	0,81096	
8. „ „	0,00	0,81414	0,81407 \ 0,81080
8. „ „	0,00	0,81400	
8. „ „	16,55	0,61064	
9. „ „	16,91	0,81042	
9. „ „	0,00	0,81304	0,81070
9. „ „	16,85	0,81098	

1) K_1' war das anfänglich benutzte eine Normalelement, das nachher durch K_1 ersetzt wurde.

ad 3)

Datum	Temp.	$R_3 : K_1$	Datum	Temp.	$R_3 : K_1$
5. Juli 1883	19,35°	0,91969	27. Juli 1883	27,15°	0,91654
5. „ „	19,51	0,91975	27. „ „	27,26	0,91654
5. „ „	21,19	0,91882	27. „ „	29,96	0,91594
5. „ „	23,34	0,91840	27. „ „	30,20	0,91582
6. „ „	23,36	0,91836			

ad 4)

Datum	Temp.	$Fe_3 : K_1'$	$Fe_3 : K_2$	$K_2 : K_1'$
6. Februar 1883	17,63°	0,65037	—	—
6. „ „	7,86	0,62784	—	—
6. „ „	5,12	0,62664	—	—
6. „ „	17,60	0,64460	—	—
7. „ „	17,17	0,6498	—	—
7. „ „	0,00	0,6269	—	—
7. „ „	0,00	0,6288	—	—
7. „ „	17,31	0,6474	—	—
8. „ „	0,00	0,6275	—	—
8. „ „	16,92	0,6448	—	—
16. „ „	32,38	0,67583	0,67163	1,0049
16. „ „	32,38	0,67397	—	—
16. „ „	31,65	0,67456	0,67000	1,0068
16. „ „	31,90	0,67312	—	—
16. „ „	20,75	0,67077	0,66640	1,0071
16. „ „	20,60	0,67150	0,66856	bis 1,0055
16. „ „	0,00	0,65627	0,65340	1,0044
16. „ „	0,00	0,65736	0,65453	
19. „ „	15,35	0,67559	0,67214	1,0051
19. „ „	16,00	0,67601	0,67305	
19. „ „	35,15	0,68245	0,67943	1,0044
19. „ „	32,00	0,67701	0,67411	1,0044

ad 5)

Datum	Temp.	$Fe_4 : K_1$	$Fe_4 : K_2$
21. Februar 1883	20,00°	0,5568	0,5576
22. „ „	12,00	0,5497	0,5504
23. „ „	31,15	0,5760	0,5768
23. „ „	0,00 (?)	0,5282	0,5294

ad 6)

Temperaturen K_1'	K_2	$K_2 : K_1'$	
17,60°	17,60°	1,00343	
19,54	19,54	1,00332	
19,43	19,43	1,00365	18° = 1,00354
19,05	19,05	1,00365	
17,43	17,14	1,00365	
17,03	0,66	1,00226	0,37° = 1,00219
16,78	0,09	1,00213	

ad 7)

Datum	Temp.	$Br_1 : K_1$	$Br_1 : K_2$
19. Februar 1883	32,0°	—	0,8491
21. „ „	32,0	—	0,8483
21. „ „	20,0	0,8456	0,8462
22. „ „	9,8	0,8409	0,8421
22. „ „	0,0	—	0,8302
23. „ „	31,2	0,8485	0,8500
23. „ „	0,0	0,8309	0,8320
ad 8)		$Br_2 : K_1$	$Br_2 : K_2$
21. Februar 1883	32,0°	—	0,8173
21. „ „	20,0	0,8154	0,8160
22. „ „	9,8	0,8130	0,8141
23. „ „	31,1	0,8159	0,8173
23. „ „	0,0	0,8135	0,8148

ad 9)

Datum	Temp.	$Cd_1 : K_1$	$Cd_1 : K_2$
28. Juni 1883	21,2°	0,71255	—
29. „ „	28,1	0,71187	—
29. „ „	37,3	0,71301	—
29. „ „	37,3	0,71309	—
30. „ „	32.8	0,71218	0,71099
30. „ „	27,3	0,71209	0,71054
30. „ „	23,4	0,71077	0,70982
30. „ „	20,9	0,71024	0,70926
3. Juli „	33,2	0,71263	0,71150
4. „ „	19,8	0,70965	0,70354
4. „ „	20,1	0,71068	0,70869
5. „ „	24,0	0,71146	0,71001

Diese Resultate wurden erhalten, als das Cadmiumelement auf dem Stativtische stand. Sie liessen sich in eine quadratische Formel zusammenfassen.

In der folgenden Tabelle sind die Resultate zusammengestellt, die erhalten wurden, als das Versuchselement auf dem Pfeiler stand.

ad 9)

Datum	Temp.	$Cd_1 : K_1$	Datum	Temp.	$Cd_1 : K_1$
26. Juli 1883	19,45°	0,71113	27. Juli 1883	30,19°	0,71302
27. „ „	27,11	0,71205	28. „ „	20,56	0,71118
27. „ „	27,26	0,71256	28. „ „	20,47	0,71121
27. „ „	29,96	0,71260	28. „ „	23,99	0,71142

ad 10)

Datum	Temp.	$Cd_2 : K_1$	Datum	Temp.	$Cd_2 : K_1$
16. Juli 1883	19,03°	0,66930	25. Juli 1883	19,49°	0,66646
17. „ „	26,53	0,66767	26. „ „	21,19	0,66571
17. „ „	29,20	0,66600	26. „ „	23,34	0,66600
18. „ „	20,75	0,66757	26. „ „	23,36	0,66583
18. „ „	28,30	0,66657	27. „ „	27,15	0,66481
18. „ „	25,45	0,66797	27. „ „	27,26	0,66521
19. „ „	19,96	0,66753	27. „ „	29,96	0,66445
19. „ „	19,01	0,66806	27. „ „	30,20	0,66400

Cd_3 war das in Glas eingeschmolzene Element, dessen Formel im Text angegeben ist. Cd_2 gab für die Differenz zwischen Stromarbeit und chemischer Wärme:

$$\Delta = -5{,}0 \text{ Cal.},$$

$$\vartheta \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \frac{\varepsilon}{J} = -6{,}15 \text{ Cal.}.$$

II. *Ueber das Verhalten der Flammen in electrischer Beziehung; von J. Kollert.*

(Hierzu Taf. II Fig. 1—18.)

Einleitung. Die im Folgenden mitzutheilenden Versuche bezwecken eine Weiterführung der vor längerer Zeit von Hrn. Prof. Hankel angestellten ähnlichen Untersuchungen über die Alkoholflamme.[1]) Auf die von den Herren Elster und Geitel vor einiger Zeit in dieser Zeitschrift veröffentlichte Abhandlung[2]) über den gleichen Gegenstand werde ich weiter unten einzugehen Gelegenheit haben.

Meine Untersuchungen beziehen sich hauptsächlich auf die Flamme des Bunsen'schen Brenners; ausserdem wurden untersucht eine leuchtende Gasflamme und die Alkoholflamme. Zur Messung der electrischen Spannungen diente ein Hankel'sches Electrometer[3]), dessen Polplatten durch einen Commutator mit den Polenden einer in der Mitte zur Erde abgeleiteten Säule von 230 Zink-Kupfer-Wasser-Elementen verbunden waren. Die Messungen geschahen in der Weise, dass die betreffenden electromorischen Kräfte mit derjenigen eines Normal-Daniells verglichen wurden: die electromotorische Kraft des letzteren ist die Einheit, auf welche die im Folgenden mitzutheilenden Zahlenwerthe bezogen sind. Wurde mit Hülfe eines Commutators erst der Zinkpol mit dem Goldblatte, der Kupferpol mit der Erde (Gasleitung), dann durch Umlegung des Bügels der Kupferpol mit dem Goldblatte, der Zinkpol mit der Erde verbunden, so änderte das unterste Ende des Goldblattes seine Stellung um acht bis zehn Scalentheile. Da nun $^1/_{10}$ Scalentheil mit Genauigkeit geschätzt werden konnte, so war demnach $^1/_{80}$ bis $^1/_{100}$ Daniell mit Sicherheit zu messen.

1) Hankel, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 5. p. 3 ff. 1861.

2) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 16. p. 193 ff. 1882.

3) Vgl. Hankel, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 8. p. 382 ff. 1857; Pogg. Ann. 84. p. 28 ff. 1851. Betreffs der Justirung des Instrumentes, s. Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 6. p. 6 Anm. 1864.

Was schliesslich die Bezeichnung der electromotorischen Kräfte betrifft, so habe ich im wesentlichen die von Hrn. Hankel in der schon erwähnten Abhandlung benutzte angewandt und dieselbe nur dahin abgeändert, dass z. B. [MNOP] = + *a* bedeutet, dass in der Combination MNOP die positive Electricität von M über N und O nach P mit einer electromotorischen Kraft von *a* Daniell fortbewegt wird; hat *a* das negative Zeichen, so bedeutet dies die umgekehrte Bewegungsrichtung der positiven Electricität. Das Symbol [MNOP] repräsentirt somit die Summe von electromotorischen Kräften: M | N + N | O + O | P + P | M, und es ist der Grösse nach [MNOP] = − [PONM].

§ 1. Abhängigkeit der electromotorischen Kräfte von der Brennermündung.

Die Fragestellung ist hier zunächst die folgende: die Mündung eines Bunsen'schen Brenners besteht aus irgend einem Metalle *M*; in einem gewissen Abstande von der Mündung befindet sich in der Flamme (*F*, vgl. Fig. 1) eine flache Spirale aus Platindraht (*pt*), und zwar in Bezug auf die Axe der Flamme symmetrisch gestellt; in welcher Weise hängt die electromotorische Kraft des Elementes [*pt FM*] von der Beschaffenheit des Metalles *M* ab? Bestehen hier etwa ähnliche Verhältnisse, wie bei der Weingeistflamme hinsichtlich der in den Alkohol der Lampe eingetauchten Metalle?[1])

Um in bequemer Weise verschiedene Metalle als Mündung anwenden zu können, verfertigte ich mir ca. 25—30 mm lange Röhren aus Zink-, Kupfer-, Zinn-, Blei- und Eisenblech, welche sich auf das Rohr eines gewöhnlichen Bunsen'schen Brenners aufstecken liessen; der Rand eines anderen Brenners war mit dünnem Platinblech umwickelt; endlich hatte ich einen 30 mm langen Cylinder von Bunsen'scher Kohle mit einer Bohrung versehen, sodass er sich ebenfalls auf den erstgenannten Brenner aufstecken liess. Die mit diesen Mündungen versehenen Brenner wurden zur Isolation auf Tischchen mit Schellackfüssen gestellt und ausserdem mit dem zur Gasleitung führenden Gummischlauche

1) Hankel, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 5. p. 20ff. 1861.

durch eine innen und aussen gefirnisste Glasröhre verbunden. Der Platindraht *pt* war ebenfalls gut isolirt und beide, Brenner und Spirale, konnten mittelst eines Commutators mit dem Electrometer, resp. der Erde verbunden werden; ich mass immer die durch Umlegung des Commutators verdoppelten Ausschläge (vgl. Einleitung). Durch Regulirung des Gaszuflusses wurde dafür gesorgt, dass in allen Fällen die Flamme dieselbe Höhe besass (ca. 120 mm), und es wurden die electromotorischen Kräfte [*pt FM*] für die Abstände 50 mm und 100 mm des Drahtes *pt* von der Brennermündung bestimmt. Die in folgender Tabelle I mitgetheilten Werthe (1 Dan. = 1) sind die Mittel aus je zehn bis zwölf einzelnen Versuchsreihen, und zur Beurtheilung der Genauigkeit der Messungen theile ich gleichzeitig die mittleren Fehler derselben sowohl ihrem absoluten Betrage nach, als in Proc. der Mittelwerthe mit.

Tabelle I.

	[*pt F Pt*]		[*pt F Zn*]		[*pt F Cu*]		[*pt F Sn*]	
Abstand	50	100	50	100	50	100	50	100
electrom. Kraft	1,39	—	0,72	0,35	1,27	0,90	1,50	1,09
m. Fehl. abs.	±0,01	—	±0,03	±0,02	±0,01	±0,02	±0,06	±0,07
m. Fehl. in %	0,9	—	4,2	5,1	1,0	1,9	3,8	6,3

	[*pt F C*]		[*pt F Pb*]		[*pt F Fe*]	
Abstand	50	100	50	100	50	100
electrom. Kraft	1,36	0,97	1,17	0,86	1,70	1,39
m. Fehl. abs.	±0,03	±0,01	±0,04	±0,04	±0,02	±0,03
m. Fehl. in %	2,0	1,5	3,1	4,2	1,2	1,8

Es ergibt sich hieraus, dass die Platinspirale durchgängig den Charakter des electropositiven, die Brennermündung den des electronegativen Bestandtheiles eines galvanischen Elementes besessen hat; dabei ist aber das Platin in 100 mm schwächer positiv, als in 50 mm, ein Umstand, auf den später ausführlicher eingegangen werden soll. Die uns jetzt allein interessirenden Metalle an der Brenner-

mündung ordnen sich, vom negativsten angefangen in folgende Reihe:

Fe Sn Pt C Cu Pb Zn.

Bildet man nun die gegenseitigen Differenzen der Werthe $[ptFM]$ (selbstverständlich für dieselbe Stellung von pt), so erhält man:

$$[ptFM] - [ptFM']$$
$$= pt|F + F|M + M|pt - pt|F - F|M' - M'|pt = [M'FM],$$

und diese Werthe müssen nothwendig dem Gesetze der Spannungsreihe gehorchen, denn es ist:

$$[MFM'] + [M'FM''] + \cdots + [M^{(n-1)}FM^{(n)}] = [MFM^{(n)}].$$

Diese Differenzen habe ich nun einmal aus den Werthen $[ptFM]$, und zwar sowohl für 50 mm als für 100 mm unter Berücksichtigung der mittleren Fehler berechnet, zweitens habe ich dieselben direct beobachtet. Letzteres kann auf zwei Weisen geschehen. 1) Man lässt die beiden Brenner in der in Fig. 2 angedeuteten Weise gegen einander brennen und misst so die electromotorische Kraft:

$$[M'F'FM] = [M'FM], \text{ weil } F'|F = 0$$

zu setzen ist. Die Zulässigkeit dieser Annahme erwies ich dadurch, dass ich für M' und M zwei gleiche Kupferröhren anwandte, wobei sich abgesehen von kleinen Schwankungen nach der einen und anderen Seite die electromotorische Kraft $= 0$ ergab, unabhängig von der Stelle, wo die eine Flamme von der anderen getroffen wurde. 2) Man bringt zwei gleiche Platinspiralen in die Flammen, sodass beide dieselbe Stellung besitzen (z. B. beide in 50 mm Abstand von der Brennermündung sich befinden), und verbindet beide metallisch (Fig. 3); man misst in dieser Weise die Summe der electromotorischen Kräfte:

$$M'|F' + F'|pt' + pt'|pt + pt|F + F|M + M|M' = [M'FM],$$

da $F' = F$ und $pt' = pt$ zu setzen ist. Dieses Verfahren erfordert aber ausser gleichen Drähten auch sehr gleichmässige Flammen, d. h. genau gearbeitete Brenner. Auf die in Tabelle I mitgetheilten Versuche habe ich deshalb nur das erste Verfahren angewandt und stelle in Tabelle II die beobachteten mit den berechneten Werthen zusammen.

Tabelle II.

	[*M F Fe*]		[*M F Sn*]		[*M F Pt*]		[*M F C*]		[*M F Cu*]		[*M F Pb*]	
M	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
Zn	1,01	1,00	0,76	0,69	0,68	0,60	0,62	0,47	0,55	0,44	0,48	0,47
Pb	0,53	0,52	0,29	0,22	0,22	0,13	0,14	–0,12	0,01	–0,08	—	—
Cu	0,45	0,49	0,22	0,30	0,12	0,06	0,08	0,04	—	—	—	—
C	0,38	0,44	0,13	0,31	0,03	0,00	—	—	—	—	—	—
Pt	0,31	0,38	0,11	0,16	—	—	—	—	—	—	—	—
Sn	0,24	0,16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Die Uebereinstimmung ist eine vollkommen befriedigende; die grösseren Abweichungen sind theils auf die verhältnissmässig geringe Zahl von Versuchen, theils vielleicht auf Aenderungen des Temperaturzustandes des Brennerrandes infolge des Schiefstellens zurückführen, was ich namentlich bei der Kohle für wahrscheinlich halte.

Für die in den folgenden Paragraphen mitzutheilenden Versuche liess ich mir, um möglichst gleiche Flammen zu erhalten, je zwei kurze Rohre aus massiven Zink-, Kupfer- und Eisencylindern ausbohren, welche mit der weiteren Bohrung an dem einen Ende genau auf die Brennerrohre zweier gleicher Bunsen'scher Brenner passten (Fig. 4). Die innere Weite betrug 8 mm, die Wandstärke 2,5 mm, die Länge ca. 30 mm. Diese Brenner lieferten bei gewöhnlichem Gasdrucke ca. 150 mm hohe Flammen von sehr regelmässiger Form. Aus der grossen Zahl der mit denselben angestellten Beobachtungen ergaben sich folgende Werthe:

$$[Zn\,F\,Fe] = 1{,}24;\ [Cu\,F\,Fe] = 0{,}56;\ [Zn\,F\,Cu] = 0{,}68.$$

Die nach der zweiten Methode angestellten, directen Beobachtungen lieferten:

$$[Zn\,F\,Fe] = 1{,}16;\ [Cu\,F\,Fe] = 0{,}47;\ [Zn\,F\,Cu] = 0{,}63,$$

wozu indessen zu bemerken ist, dass diese Beobachtungen nur drei- oder viermal wiederholt worden sind. Diese Werthe erlitten übrigens keine merkliche Aenderung, als bei einigen weiteren Versuchsreihen, um eine ruhig brennende Flamme zu erhalten, die letztere durch Verminderung des Gaszuflusses auf 60 mm Höhe reducirt wurde.

Um endlich auch das Verhalten der leuchtenden Flammen zu untersuchen, liess ich kurze, konische, mit einer ca. 0,7 mm weiten Bohrung versehene Rohre aus Zink, Kupfer, Eisen und Silber anfertigen, welche auf ein mit einem Fuss versehenes Messingrohr passten und mittelst des letzteren in derselben Weise, wie die Bunsen'schen Brenner, mit der Gasleitung in Verbindung gesetzt werden konnten (Fig. 5). Als Mittelwerthe aus sämmtlichen damit angestellten Versuchen erhielt ich folgende:

$$[Zn\,Fe] = 1{,}47\,;\quad [Cu\,Fe] = 0{,}60\,;\quad [Ag\,Fe] = 0{,}36\,.$$

In allen Fällen erwies sich somit das Eisen als am stärksten negativ und sogar stärker negativ, als die Brennermündung aus Platin. Dieser Umstand ist leicht erklärlich, wenn man beachtet, dass als äusserste, allein in Betracht kommende Schicht nicht metallisches Eisen, sondern Oxydationsstufen desselben zu setzen sind; und in der That waren die vor jedem Versuche frisch mit Schmirgelpapier geputzten Ränder nach dem Versuche immer mit einer Oxydschicht bedeckt. Ausserdem wird natürlich die vom Brennerrande schliesslich angenommene Temperatur auch die Stellung des betreffenden Metalles in der Spannungsreihe von Einfluss sein. An dritter Stelle ist wahrscheinlich auch eine Contactwirkung seitens der unmittelbar berührenden Gasschicht in Betracht zu ziehen.

Man wird hiernach erwarten müssen, dass im ersten Moment nach dem Anzünden der Flamme bei frisch geputzten Brennern die Spannungen ganz andere sein werden, als einige Zeit nachher, dass überhaupt erst nach Eintritt eines stationären Temperatur- und Oxydationszustandes dieselben constante Werthe annehmen werden. Diese Vermuthung bestätigte sich in der That, wie sich aus der folgenden Tabelle III ergibt. Dieselbe enthält die Werthe der electromotorischen Kräfte, wie sie nach Verlauf der angegebenen Zahl von Secunden nach dem Anzünden der Flamme beobachtet wurden, während sich eine ca. 15 mm im Durchmesser haltende, flache Spirale aus Platindraht 40 mm über der Mündung central in der Flamme befand. Die

Untersuchungen beziehen sich nur auf die zuletzt beschriebenen Bunsen'schen Brenner, da die bei den an erster Stelle genannten Versuchen verwendeten Brennermündungen wegen ihrer geringen Masse den stationären Zustand zu rasch erreichten.

Tabelle III.

Sec.	5	10	15	20	25	30	45	50
[*pt F Fe*]	0,24	0,14	0,12	0,11	0,29	0,77	0,99	1,12
[*pt F Zn*]	—	−0,23	—	—	—	−0,23	−0,33	−0,23
[*pt F Cu*]	0,66	—	—	0,64	—	—	0,59	0,51

Sec.	60	70	75	80	85	90	100	120
[*pt F Fe*]	1,26	—	1,33	—	—	—	1,43	1,49
[*pt F Zn*]	−0,15	−0,10	—	−0,05	—	0,03	—	0,13
[*pt F Cu*]	0,70	—	0,80	—	0,88	—	0,89	—

Sec.	145	150	160	180	185	200	220	250
[*pt F Fe*]	1,52	—	—	1,56	—	1,59	—	1,59
[*pt F Zn*]	—	—	0,25	0,28	—	—	0,30	0,30
[*pt F Cu*]	—	0,95	—	—	0,96	0,96	—	—

Man erkennt, dass in den ersten Momenten nach dem Anzünden die drei Metalle in der Reihenfolge Cu, Fe, Zn, d. h. wie in der gewöhnlichen Spannungsreihe, aufeinanderfolgen. Alle drei werden sodann zunächst etwas nach der positiven Seite verschoben, was jedenfalls der Temperaturerhöhung zuzuschreiben ist. Sobald aber die Oxydation beginnt, rücken die Metalle mehr oder weniger rasch nach der negativen Seite hin; der stationäre Zustand wird nach ungefähr vier Minuten erreicht. Vielleicht ist aus einer positiven Verschiebung des Platins infolge der Erwärmung der Umstand zu erklären, dass der Platinbrenner schwächer negativ ist, als der aus Eisen gefertigte. Genau denselben Verlauf der Erscheinung beobachtete ich bei der leuchtenden Flamme.

Alle folgenden Untersuchungen beziehen sich nur auf den stationären Endzustand der Brennermündung.

§ 2. Abhängigkeit der electromotorischen Kräfte vom Orte des Platindrahtes in der Flamme.

Es lehrten bereits die in Tabelle I mitgetheilten Zahlen, dass die electromotorischen Kräfte $[ptFM]$ auch von dem Orte abhängen, an welchem sich der Draht pt befindet, und zwar zeigte sich, dass die Spirale in 100 mm Höhe schwächer positiv wird, als in 50 mm, oder der Draht in 100 mm muss gegen den in 50 mm negativ sein. Bildet man die Differenzen $[pt_{50}FM] - [pt_{100}FM] = [pt_{50}Fpt_{100}]$, so erhält man als Mittel $[pt_{50}Fpt_{100}] = 0{,}36$. Als zwei Spiralen pt und pt'; die eine in 50, die andere in 100 mm über einem isolirten Brenner angebracht wurden (Fig. 6), ergab die directe Beobachtung:

$$[ptFpt'] = 0{,}30.$$

Die Differenz von 0,06 Dan. erklärt sich, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, hinreichend daraus, dass der Durchmesser der Spirale pt' etwas kleiner war, als der von pt. Ehe ich die weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand mittheile, will ich zunächst einige allgemeine Betrachtungen über das Wesen dieser Vorgänge vorausschicken, deren Zulässigkeit alsdann durch die Versuche dargethan werden soll. Wir denken uns zu diesem Zwecke an irgend einem Orte xyz in der Flamme ein Platintheilchen pt und verbinden dasselbe durch einen gegen die Einwirkung der Flamme vollkommen geschützten Metalldraht mit dem Brenner M. Dann wird die electromotorische Kraft $[ptFM]$ einmal von der in xyz herrschenden Temperatur, zweitens von der Zusammensetzung des Gases daselbst abhängig sein, oder kurz gesagt, es ist $[ptFM]$ eine Function des Ortes, d. h.:

$$[ptFM] = f(xyz).$$

Bei den aus runden Oeffnungen brennenden Flammen hat man einfacher, wenn man die Axe der Flamme, von der Mitte der Brenneröffnung aus gerechnet, mit z bezeichnet und mit r den Abstand eines Ortes in der Flamme von der Axe z:

$$[ptFM] = f(r,z).$$

Für einen horizontalen Querschnitt durch die Flamme in der Höhe $z = a$ gilt demnach:

$$[ptFM] = f(r,a) = \varphi(r),$$

d. h. die Spannung ist constant längs einer jeden um den Mittelpunkt des betreffenden Querschnittes beschriebenen Kreisperipherie.

Denken wir uns nun einen dünnen, geradlinigen Platindraht pt horizontal in radialer Richtung in eine in Bezug auf eine Axe z symmetrische Flamme eingeführt, sodass er gerade bis zur Axe z reicht (Fig. 7), und mit dem Brenner M metallisch verbunden, so wird das Element $ptFM$ eine gewisse electromotorische Kraft $[ptFM] = a_1$ besitzen, welche man sich folgendermassen entstanden zu denken hat.

Jedes Theilchen des Drahtes besitzt gegen die Mündung M eine Spannung $\varphi(r)$. Von diesen Elementarspannungen nehme ich nun an (eine Annahme, deren Zulässigkeit ich durch die experimentelle Bestätigung einiger aus derselben gezogenen Folgerungen beweisen werde), dass sie sich nach dem Gesetze des arithmetischen Mittels zu einer Integralspannung zusammensetzen, d. h. dass:

$$a_1 = \frac{\int_0^R \varphi(r)\,dr}{R}$$

ist, wobei die Integration über alle Theilchen des Drahtes zu erstrecken ist, welche durch die Flammengase mit M in leitender Verbindung stehen (vergl. Fig. 7). Um R zu bestimmen, zieht man den Draht pt in radialer Richtung soweit aus der Flamme heraus, bis die Ausschläge des Electrometers nur noch sehr langsam ihren definitiven Werth annehmen und für beide Pole, den Draht und die Brennermündung, bei richtig justirtem Electrometer nicht mehr entgegengesetzt gleich ausfallen.[1]) Man kann so R auf ca. $^1/_2$ mm genau ermitteln. Zieht man den Draht aus seiner Anfangsstellung, wo sich sein Ende im Punkte 0 der Flam-

1) Das nähere hierüber siehe § 3.

menaxe befindet, um dr zurück, so beobachtet man eine neue Integralspannung:

$$a_2 = \frac{\int_{dr}^{R} \varphi(r)dr}{R - dr},$$

und es ist:

$$a_1 R - a_2(R - dr) = \int_0^{dr} \varphi(r)dr = x_1 dr,$$

wenn man den Mittelwerth von φ auf dr mit x_1 bezeichnet. Zieht man hierauf wieder um dr zurück, so findet man für den Mittelwerth von φ auf diesem nächstfolgenden dr: $x_2 dr = a_2(R - dr) - a_3(R - 2dr)$ u. s. f. Man kann also in dieser Weise die den einzelnen Orten entsprechenden Spannungen ermitteln, wobei freilich wegen des theilweisen Temperaturausgleiches nicht genau die Werthe erhalten werden, welche man an einem mit einer von der Flamme nicht afficirten Ableitung versehenen Theilchen beobachten würde, ein Verfahren, das sich natürlich praktisch nicht ausführen lässt. Diese Werthe x gelten dann immer längs einer um 0 beschriebenen Kreisperipherie oder genauer ausgedrückt längs einer Kreisringfläche von der Breite dr.

In dieser Weise untersuchte ich zunächst die 150 mm hohen Flammen der p. 248 beschriebenen Bunsen'schen Brenner, und zwar den 40 mm über der Mündung gelegenen Querschnitt derselben. Der Draht pt war etwa 0,2 mm dick und isolirt an einer geeigneten Schlittenvorrichtung befestigt, welche es gestattete, denselben radial um genau messbare Grössen zu verschieben; dr wurde dabei = 1 mm genommen. Ich theile zunächst in Tabelle IV$_a$ die Integralwerthe a mit, wobei die für die Cu- und Zn-Mündungen erhaltenen Werthe durch Addition der bereits p. 248 angeführten Grössen $[ZnFFe] = 1{,}24$ und $[CuFFe] = 0{,}56$ auf die Fe-Mündung reducirt worden sind. Für jede Mündung wurden vier, für jedes Metall also acht und insgesammt 24 Beobachtungsreihen angestellt.

Tabelle IV$_a$.

Mittel	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
für Fe	1,58	1,57	1,58	1,54	1,44	1,28	1,16	1,07
„ Zn	1,57	1,57	1,56	1,52	1,40	1,26	1,17	1,10
„ Cu	1,60	1,61	1,61	1,56	1,44	1,28	1,17	1,09
Gesammtmittel	1,58	1,58	1,58	1,54	1,43	1,27	1,17	1,09

Mittel	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
für Fe	0,91	0,63	0,22	−0,08	−0,32	−0,42	−0,41	−0,43
„ Zn	0,96	0,64	0,23	−0,08	−0,35	−0,41	−0,39	−0,22
„ Cu	0,97	0,61	0,17	−0,17	−0,37	−0,40	−0,36	−0,35
Gesammtmittel	0,95	0,63	0,21	−0,11	−0,35	−0,41	−0,39	−0,33

Da $R = 16$ mm sich ergab, und $dr = 1$ mm gesetzt worden ist, so folgt $x_m = (16 - m + 1)\,a_m - (16 - m)\,a_{m+1}$ als Werth von $[ptFFe]$ in Bezug auf das vom Mittelpunkte 0 (Fig. 7) aus gerechnet zwischen $m - 1$ und m Millimeter gelegene Theilchen des Drahtes *pt*. Man erhält so:

Tabelle IV$_b$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
1,58	1,58	2,10	2,87	3,16	2,29	1,93	2,18	3,21	3,12	1,80	0,83	−0,15	−0,46	−0,44	−0,33

Die Werthe x sind in Fig. 8$_a$ graphisch dargestellt, wobei 1 Dan. = 10 mm gemacht worden ist. Jedes x gilt für einen Kreisring von 1 mm Breite. Die graphische Darstellung für alle Punkte des Querschnittes würde durch die durch Rotation der Fig. 8$_a$ um die x-Axe entstehende Fläche gegeben sein. Um die entsprechenden Darstellungen für die Zn- und Cu-Mündungen zu erhalten, hat man einfach die Abscissenaxe um 12,4 mm, resp. 5,6 mm höher zu legen (vergl. die punktirten Linien in der Figur).

Man hat somit zwei Maxima der Spannung, von denen das eine mit dem den inneren, blauen Kegel begrenzenden, röthlichen Saume, das andere mit dem röthlichen Saume an der äussersten Grenze der sichtbaren Flamme zusammenfällt (vergl. hierzu Fig. 7, wo die beiden Säume durch die ausgezogenen Linien, die Grenze des Wirkungsbereiches durch

die punktirte Curve bezeichnet ist). Wir werden in § 5 sehen, dass diese Stellen wahrscheinlich als Temperaturmaxima zu bezeichnen sind. Denkt man sich die durch Rotation der Fig. 8_a um die x-Axe entstandene Fläche durch auf der Basis senkrechte, parallele Ebenen im Abstande von 1, 3, 5 ... 15 mm von der Mitte geschnitten (siehe Fig. 8_b) und berechnet den Rauminhalt der zwischen der Fläche, der Basis und je zwei der Ebenen gelegenen Theile, so erhält man durch Division dieser Volumina durch die zugehörigen Basisabschnitte $MNN'M'$ die den betreffenden Flächenstreifen entsprechenden mittleren Spannungen. Diese kann man angenähert durch directe Beobachtung finden, indem man einen geradlinigen Draht pt zunächst diametral durch die Flamme hindurch führt, sodass er das gesammte Wirkungsgebiet durchschneidet, und alsdann denselben um je zwei Millimeter seitwärts verschiebt, bis man zur Grenze des Wirkungsbereiches gelangt; man misst so immer die den Mittellinien $\overline{00}$, $\overline{11}$ etc. der Flächenstücke $MNN'M'$ entsprechenden Integralspannungen (siehe Fig. 8_b). In Tabelle IV$_a$ finden sich die in der eben angegebenen Weise berechneten und die beobachteten Werthe zusammengestellt; dieselben sind entsprechend den zugehörigen Flächenstücken mit $X_0, X_1 \ldots X_8$ bezeichnet.

Tabelle IV$_c$.

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
ber.	1,58	1,65	1,67	1,44	1,44	0,76	−0,15	−0,41	−0,33
beob.	1,52	1,52	1,45	1,21	1,13	0,92	0,17	−0,30	−0,31

Beide Reihen zeigen im Hinblick auf die den Voraussetzungen der Rechnung nicht genau entsprechende Versuchsanordnung befriedigende Uebereinstimmung. Die graphische Darstellung der Werthe X ist in Fig. 8_c gegeben.

Man kann endlich nach dem Mittelwerthe für das ganze Wirkungsgebiet fragen, welchen man aus den Werthen x durch Multiplication derselben mit den Flächen der zugehörigen Kreisringe und Division der Summe dieser Producte

durch die Fläche des ganzen Wirkungsgebietes erhält. Die Ausführung der Rechnung geschieht nach der Formel:

$$X = \frac{1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + \ldots + (2n-1)\, x_n}{n^2},$$

wo $n = 16$ mm zu setzen ist; es ergibt sich so $X = 1{,}13$. Dieser Werth wurde wieder in angenäherter Weise direct beobachtet, indem central über die Flamme ein 32 mm im Durchmesser haltender Ring aus Platindraht gebracht wurde, dessen Inneres in der aus Fig. 9 ersichtlichen Weise von dünnen Platindrähten durchzogen war. Als Mittel aus zwölf Beobachtungen ergab sich:

$$X = 1{,}25.$$

Nachdem ich durch diese mit möglichster Sorgfalt ausgeführten Versuche mich von der Zulässigkeit der p. 251 ff. dargelegten Art, diese Phänomene zu interpretiren, überzeugt hatte, untersuchte ich zunächst den Verlauf der Schichten in verschiedenen Höhen. Da hierzu die 150 mm hohe Flamme des Bunsen'schen Brenners in den oberen Partien zu unruhig war, so reducirte ich dieselbe auf 60 mm Höhe, wodurch ich eine vollkommen ruhige Flamme von der aus Fig. 10 ersichtlichen Gestalt erhielt; dabei repräsentiren wieder die ausgezogenen Linien die beiden röthlichen Säume, die punktirte die Wirkungsgrenze, deren Radius innerhalb der in Frage kommenden Grenzen constant = 9 mm war.

Tabelle V.

Querschn.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a, a	1,37	1,37	1,37	1,37	1,37	1,31	0,75	0,13	−0,68
b, b	1,52	1,43	1,27	1,07	0,97	0,72	0,10	−0,31	−0,60
c, c	1,13	1,09	1,04	0,94	0,74	0,40	−0,10	−0,49	−0,60

Querschn.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
a, a	1,37	1,37	1,37	1,37	1,62	2,99	1,99	0,98	−0,68
b, b	2,25	2,53	1,49	1,55	1,98	2,55	0,92	−0,04	−0,60
c, c	1,47	1,42	1,65	1,93	2,08	1,91	0,68	−0,38	−0,60

In Tabelle V sind die den drei Querschnitten a, b und c entsprechenden Integralwerthe $a_1 a_2 \ldots$, und die nach der Formel: $x_m = (9 - m + 1)\, a_m - (9 - m)\, a_{m+1}$

berechneten x zusammengestellt; dieselben beziehen sich auch hier auf die Eisenmündung.

Man ersieht hieraus deutlich, wie immer die Maxima den röthlichen Conturen entsprechen, und wie infolge dessen über der inneren Spitze nur noch ein einziges Maximum auftritt. Die graphische Darstellung ist durch Fig. 11 *a*, *b*, *c* repräsentirt, wobei wieder 10 mm = 1 Dan. ist.

Ein ganz ähnlicher Verlauf der Schichten fand sich bei einer mit kleiner, ruhiger Flamme brennenden Alkohollampe, deren Flamme mit der des klein brennenden Bunsen'schen Brenners bereits äusserlich die grösste Aehnlichkeit zeigte.

Es folgen endlich die entsprechenden Untersuchungen über die aus den p. 249 beschriebenen Brennern erhaltene leuchtende Flamme von 60 mm Höhe, und zwar für die Querschnitte in 5, 10 und 15 mm Höhe über der Mündung. Die Flamme besass die in Fig. 12 dargestellte Form. Für jede der Mündungen Fe, Zn, Ag und Cu wurden in jedem der drei Querschnitte je drei Versuchsreihen angestellt, sodass also nach Reduction derselben auf Fe (durch Addition der p. 249 erwähnten Zahlen $[ZnFFe] = 1{,}47$, $[CuFFe] = 0{,}60$ und $[AgFFe] = 0{,}36$ für jeden Querschnitt zwölf Versuchsreihen vorlagen. Der dabei verwendete Platindraht *pt* war ca. 0,1 mm dick und wurde immer um je ½ mm verschoben. Die Gesammtmittelwerthe (auf die Fe-Mündung sich beziehend) und die daraus nach den Formeln:

$$\text{Querschnitt in}\begin{cases} 5\,\text{mm},\ R = 5\ \text{mm}: \tfrac{1}{2}x_m = \left(\frac{10}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)a_m - \left(\frac{10}{2} - \frac{m}{2}\right)a_{m+1} \\ 10\,\text{mm},\ R = 6\ \text{mm}: \tfrac{1}{2}x_m = \left(\frac{12}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)a_m - \left(\frac{12}{2} - \frac{m}{2}\right)a_{m+1} \\ 15\,\text{mm},\ R = 6\tfrac{1}{2}\,\text{mm}: \tfrac{1}{2}x_m = \left(\frac{13}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)a_m - \left(\frac{13}{2} - \frac{m}{2}\right)a_{m+1} \end{cases}$$

berechneten Werthe der x sind in Tabelle VI$_a$ zusammengestellt.

Bei der leuchtenden Flamme existirt hiernach ein Hauptmaximum, welches mit der Grenze des leuchtenden Theiles (in Fig. 12 die stärker gezeichnete, ausgezogene Linie) zusammenfällt. Hierauf sinken die Werthe beträchtlich und

Tabelle VI_a.

Querschn.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
5 mm	1,11	1,15	1,17	1,13	0,92	0,46	0,33	0,02	−0,32	−0,72	—	—	—
10 mm	1,16	1,17	1,15	1,15	1,07	0,64	0,43	0,31	0,09	−0,07	−0,42	−0,69	—
15 mm	1,13	1,14	1,11	1,11	1,09	0,94	0,45	0,33	0,21	−0,01	−0,21	−0,43	−0,61

Querschn.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}
5 mm	0,71	0,97	1,47	2,38	3,23	0,95	1,27	0,71	0,09	−0,72	—	—	—
10 mm	1,03	1,33	1,13	1,78	4,12	1,91	1,02	1,20	0,56	0,63	−0,15	−0,69	—
15 mm	1,02	1,41	1,14	1,30	2,25	4,36	1,16	0,97	1,08	0,57	0,24	−0,26	−0,61

steigen dann nochmals ein wenig an der Grenze des äusseren, kaum sichtbaren Mantels (in Fig. 12 die schwächere, ausgezogene Curve). Bis ca. 20 mm erstreckte sich im Inneren ein dunkler Kegel, während oberhalb desselben die Flamme gleichförmig hell erschien; auch der Grenze dieses dunklen Kernes (in Fig. 12 schraffirt) entspricht ein schwaches Maximum. Leider machte die starke Russabscheidung die Untersuchung des oberen, gleichförmig leuchtenden Theiles der Flamme unmöglich. Es sei übrigens noch bemerkt, dass man, wegen der verschiedenen Stärke der verwendeten Platindrähte *pt*, die Werthe der Tabelle VI_a nicht etwa mit denen in den Tabellen IV_b und V vergleichen und daraus den Schluss ziehen darf, dass die leuchtende Flamme Schichten von höherer Temperatur enthält, als die Flamme des Bunsen'schen Brenners; denn natürlich wird ein Temperaturausgleich längs des dickeren Drahtes in stärkerem Maasse stattfinden, als längs des dünneren. Die graphische Darstellung dieser Versuche geben die Figuren 13 *a*, *b*, *c*.[1]) Zur Prüfung der Theorie berechnete ich auch hier, ähnlich wie bei Tabelle IV_e, und zwar für den Querschnitt in 5 mm über der Mündung, die den einzelnen Flächenstreifen von 1 mm Breite (s. Fig. 13_a) entsprechenden Mittelwerthe X und stelle hiermit die (allerdings nur durch eine einzige Beobachtungsreihe) direct gefundenen Zahlen zusammen (graphische Darstellung der berechneten Werthe s. Fig. 13_d).

1) Der Uebersichtlichkeit wegen sind die horizontalen Dimensionen verdoppelt.

Tabelle VI_b.

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
berechnet	1,11	1,23	1,37	0,55	−0,61	−0,72
beobachtet	1,31	1,34	1,34	0,75	−0,25	−0,67

Die Uebereinstimmung ist auch hier eine befriedigende. Die Experimente stehen somit mit den aus der p. 252 gemachten Annahme über die Zusammensetzung von Spannungen zu Mittelwerthen gezogenen Folgerungen in Einklang. Ferner ergibt die Anwendung dieser Annahme auf die Beobachtungen gerade für schon dem blossen Auge auffällige Orte in der Flamme durch Grösse ausgezeichnete Werthe. Alles dies scheint mir dafür zu sprechen, dass die im Vorstehenden gegebene Interpretation der experimentellen Thatsachen als berechtigt anzusehen ist, womit ich indessen nicht gesagt haben will, dass sie die einzig richtige und einzig mögliche ist. Darüber zu entscheiden, ist weiteren Versuchen vorbehalten.

Die im Vorstehenden beschriebenen Versuche lehren, wie sich die electrische Erregung des Platins mit der Temperatur und Zusammensetzung der Flammengase ändert, wenn man in demselben Querschnitte von der Axe nach der Grenze der Flamme geht. Da beide Factoren auch mit der Höhe sich ändern, so ist schon hiernach mit Sicherheit zu erwarten, dass die Werthe $[ptFM]$ sich ebenfalls mit der Höhe, in welcher sich pt über der Mündung befindet, ändern werden. Ein Beispiel hierfür ist bereits p. 251 besprochen worden, und es sollen jetzt die genaueren Untersuchungen über diese Vorgänge mitgetheilt werden. Hierbei wurden die verwendeten Platindrähte isolirt an einer Vorrichtung befestigt, welche eine Verschiebung in verticaler Richtung um genau messbare Grössen gestattete. Ich lasse zunächst die Versuche für die 150 mm hoch brennende Bunsen'sche Flamme folgen, in welcher eine 15 mm im Durchmesser haltende, flache Spirale aus 0,2 mm dickem Platindrahte in der Weise bewegt wurde, dass ihr Mittelpunkt immer auf der Axe der Flamme lag. Die auf Fe reducirten Werthe

nebst den Gesammtmitteln daraus (im ganzen aus 23 Beobachtungsreihen abgeleitet) gibt Tabelle VII_a.

Tabelle VII_a.

Höhe mm		20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260
Mittel für	Fe	1,59	1,62	1,61	1,57	1,42	1,31	1,22	1,09	0,88	0,49	0,09	−0,05	−0,05
	Zn	1,59	1,65	1,65	1,62	1,50	1,33	1,12	0,92	0,29	0,21	0,14	+0,13	+0,08
	Cu	1,60	1,66	1,64	1,62	1,51	1,34	1,19	0,92	0,35	0,15	0,03	0,04	0,05
Gesammtmittel		1,59	1,64	1,63	1,60	1,48	1,32	1,18	0,97	0,51	0,28	0,09	0,04	0,03

Die Werthe $[pt\,FFe]$ sind hiernach von 20 bis 80 mm ziemlich constant, sinken aber dann rasch und werden ziemlich zu Null, also bei dem Zn- und Cu-Brenner, für welche man beziehungsweise 1,24 und 0,56 zu subtrahiren hat, negativ. Was die Zahl für 40 mm angeht, so weicht dieselbe von der für eine Kreisfläche von 15 mm aus den Zahlen s der Tabelle IV_b berechneten beträchtlich ab, sie ist ca. 0,7 Dan. kleiner als letztere; indessen ist hierzu zu bemerken, dass die ziemlich dichte Spirale die Schichtungsverhältnisse ganz beträchtlich störte und infolge ihrer grossen Masse wahrscheinlich auch die Temperatur stark erniedrigte. Die Untersuchungen wurden bis zu der Grenze fortgesetzt, wo noch hinreichende Leitungsfähigkeit vorhanden war[1]); die weiter oben eintretenden eigenthümlichen Phänomene sollen im nächsten Paragraphen behandelt und eine Erklärung derselben zu geben versucht werden.

Ganz ähnlich war der Verlauf bei den übrigen untersuchten Flammen, für welche ich kurz die Resultate in den Tabellen VII_b, VII_c, VII_d mittheilen will. Betreffs der Grenze der Untersuchung gilt das oben Bemerkte.

Tabelle VII_b.

Bunsen'scher Brenner, Flamme 60 mm hoch.

Höhe in mm	10	20	30	40	50	60	70	100	110
$[pt\,FFe]$	1,34	1,38	1,25	1,11	1,09	1,03	0,68	0,11	0,10

1) Vgl. p. 252 nebst Anm.

Tabelle VII_c.

Leuchtende Flamme, 60 mm hoch.

Höhe in mm	5	10	15	20	60	70	80	90	100	120	140	160
$[pt\,FFe]$	1,09	1,14	1,09	1,03	1,04	0,98	0,85	0,73	0,61	0,44	0,34	0,32

Tabelle VII_d.

Alkoholflamme, 35 mm hoch; im Alkohol ein Kupferdraht Cu.

Höhe über Docht	10	22,5	45	72,5	85	92,5	100	110
$[pt\,F\,Alk.Cu]$	0,68	0,42	0,28	0,16	0,08	0,04	0,00	−0,16

Diese Versuche stimmen ihrem Verlaufe nach vollkommen mit den Hankel'schen[1]) überein und widerlegen das von den Herren Elster und Geitel[2]) aus ihren Versuchen über diesen Gegenstand abgeleitete Resultat. Die von denselben erhaltenen Ergebnisse finden aber sehr leicht ihre Erklärung, wenn man beachtet, dass allerdings innerhalb gewisser Grenzen die Werthe $[pt\,FFe]$ constant bleiben (s. Tab. VII_a), also ihre Differenzen (d. h. die Werthe $[pt_h\,F\,pt_{h'}]$) Null werden. Es erklärt sich aber in Hinblick auf die zuerst (p. 254 ff.) mitgetheilten Versuche und aus dem Umstande, dass die beiden genannten Beobachter bei ihren Versuchen nur geradlinige Drähte benutzten, auch der von denselben beschriebene „Wechsel der Polarität".[3])

§8. Ueber Phänomene, welche aus der Natur der Electricitätsleitung durch Flammen zu erklären sind.

Alle die im Vorstehenden mitgetheilten Versuche beruhen darauf, dass die Flamme sich in Bezug auf Electricitätsleitung ähnlich verhält, wie ein Leiter zweiter Classe. Es soll jetzt auf die Art und Weise, wie diese Leitung vor sich geht, näher eingegangen werden.

Was zunächst den Uebertritt der Electricität aus den metallischen Electroden in die Flamme betrifft, so wird

1) Hankel, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 5. p. 14 ff. 1861.
2) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 16. p. 196 ff. 1882.
3) Elster u. Geitel, Wied. Ann. 16. p. 198 ff. 1882.

hierbei der Vorgang ein ähnlicher sein, wie bei der Zerstreuung der Electricität in die Luft, d. h. es werden sich die einzelnen, die Electrode treffenden Gastheilchen mit Electricität von demselben Potentialwerthe laden, welcher auf der Electrode vorhanden ist. Die Zerstreuung geschieht aber durch die Flamme weit rascher, als durch die Luft, weil hier die mit Ladung versehenen Gastheilchen ausserordentlich viel rascher aus dem Bereiche des metallischen Conductors entfernt werden, als in Luft von gewöhnlicher Temperatur und Spannung, wo nach der Auffassungsweise der kinetischen Gastheorie nur sehr wenige Gasmolecüle die den electrischen Conductor unmittelbar umhüllende Schicht verlassen können, sodass sich die Luft schwachen Electricitäten gegenüber fast wie ein absoluter Nichtleiter verhält; bei stärkeren Spannungen bewirkt allerdings die infolge der electrischen Abstossung vermehrte Geschwindigkeit der Molecüle den Durchbruch einer beträchtlicheren Anzahl der letzteren und damit eine merkbare Zerstreuung. Die unipolare Leitung der Flamme würde sich durch die Annahme erklären lassen, dass die Gasmolecüle den negativen Zustand weit schwieriger annehmen, als den positiven.

Aus der Eigenschaft der Flamme, metallischen Conductoren ihre Electricität rasch zu entziehen, erklären sich die Erscheinungen, welche eintreten, wenn man einen isolirten Metallbrenner mit dem Electrometer verbindet, ohne in die Flamme irgend welche Ableitung zu bringen. Es besitzt nämlich der heisse, oxydirte und von Gas von gewisser Beschaffenheit berührte Brennerrand gegen das Goldblatt eine bestimmte, electrische Differenz. Indem nun die Flamme die Electricität des Brennerrandes hinwegführt, bringt sie denselben langsam auf Null, d. h. sie verhält sich wie eine ausserordentlich schlechte Ableitung zur Erde; in demselben Maasse aber kommt die entgegengesetzte Spannung des Goldblattes zur Wirkung, und dasselbe bewegt sich langsam von seiner Ruhelage aus bis zu einer neuen festen Stellung. Die Differenz beider Einstellungen würde somit die electromotorische Kraft

Flammengase (F) | Brennermünd. (M) + Brennermünd. (M) | Goldblatt (G)

messen, wenn nicht ein anderer Umstand störend einwirkte, nämlich die Influenz seitens der im Zimmer vertheilt sitzenden Electricität. Man erhält deswegen bei dem eben beschriebenen Versuche, wo man einen isolirten Brenner mit frei brennender Flamme mit dem Electrometer verbindet, einen Ausschlag, welcher dem Potential $F|M+M|G+$ einem unbekannten Potential V äquivalent ist. Stellen wir jetzt denselben Versuch mit einem anderen Metall M' an, so erhalten wir $F|M'+M'|G+V$, wenn wir annehmen dürfen, dass sich letzteres nicht geändert hat; nun ist aber:

$$F|M'+M'|G+V-(F|M+M|G+V)=[MFM'],$$

d. h. die Differenzen der beobachteten Ausschläge müssen bei unverändertem V wieder die Werthe $[MFM']$ liefern.

Ich habe eine Reihe solcher Versuche mit den am Anfange von § 1 beschriebenen Brennermündungen angestellt, und theile dieselben zunächst in Tabelle VIII$_a$ mit. Dabei sind die zwischen denselben zwei Horizontallinien stehenden Werthe immer durch unmittelbar aufeinander folgende Beobachtungen erhalten worden, und für sie infolge dessen mit grösster Wahrscheinlichkeit V constant zu setzen.

Tabelle VIII$_a$.

Werthe für $F\|M+M\|G+V$ für $M=$						
Pt	Zn	Cu	Sn	C	Pb	Fe
1,01	0,66	1,00	—	—	—	—
1,18	0,57	—	1,15	1,33	0,90	1,35
		0,88		0,91		
		0,84		0,70		
0,98	0,22	0,86	1,24	0,81	0,67	1,47
—	—	—	1,17	—	1,00	1,38
1,33	0,87	1,35	1,62	1,30	—	1,60
					1,53	
1,58	0,03	1,51	1,82	1,80	1,54	2,08
1,52	1,00	1,50	1,80	1,73	1,51	2,09
1,55	1,01	1,50	1,81	1,77	1,53	2,09
1,45	0,86	1,41	1,91	1,55	—	—
					1,55	2,15
					1,71	2,06
1,86	1,12	1,73	2,20	1,69	1,63	2,11

Bildet man aus den einzelnen Horizontalreihen die Werthe $[MFM']$, so ergibt sich für die Mittelwerthe dieser Differenzen folgende Uebersicht:

Tabelle VIII$_b$.

M	$[MFFe]$	$[MFSn]$	$[MFPt]$	$[MFC]$	$[MFCu]$	$[MFPb]$
Zn	0,97	0,88	0,58	0,63	0,52	0,45
Pb	0,53	0,37	0,21	0,22	0,09	—
Cu	0,46	0,39	0,06	0,05	—	—
C	0,37	0,22	−0,02	—	—	—
Pt	0,34	0,26	—	—	—	—
Sn	0,14	—	—	—	—	—

Die Zahlen der Tabelle VIII$_b$ stimmen mit denen der Tabelle II in Hinblick auf die Unsicherheit der Voraussetzung $V = \text{const.}$ gut überein. Schlüsse auf die Werthe $F|M + M|G$ gestatten jedoch die Zahlen der Tabelle VIII$_b$ nicht.

Ich komme endlich zur Betrachtung der eigenthümlichen Phänomene, welche eintreten, wenn ein Platindraht sich sehr weit oberhalb der Brennermündung befindet, oder sehr weit seitwärts aus der Flamme herausgezogen worden ist, auf welche bereits p. 252 und 260 aufmerksam gemacht worden ist. Denken wir uns zunächst einen Platindraht vollkommen in die Flamme eingetaucht und metallisch mit dem Brenner verbunden, so circulirt alsbald ein electrischer Strom, den man auch leicht mit einem empfindlichen Galvanometer nachweisen und messen kann. Die Leitung innerhalb der Flamme kommt dadurch zu Stande, dass Molecüle, welche von dem einen Pole ausgehen, den anderen treffen und umgekehrt. Eine directe Mittheilung der Electricität von Molecül zu Molecül beim Zusammenstoss derselben ist nicht wohl annehmbar, da sonst die gewöhnliche Luft ziemlich ebensogut leiten müsste, wie die Flamme. Solange nun die Anzahl der in der Zeiteinheit zwischen den beiden Polen sich hin und her bewegenden, und so die Electricität überführenden Molecüle eine sehr beträchtliche ist, verhält sich die Flamme wie ein guter Leiter, und wenn der eine Pol zur Erde, der andere zum Electrometer geführt ist, so verhält sich letzteres

wie zur Erde abgeleitet, sodass also ausser den in der Ableitung zur Erde liegenden Spannungen keine anderen Electricitäten auf dasselbe einwirken können. Die Zahl dieser Theilchen nimmt aber ab, je weiter wir uns von der eigentlichen Flamme entfernen, was sich zunächst in einer Verlangsamung der Bewegung des Goldblättchens kund gibt; auch bringt jetzt z. B. eine der Flamme genäherte, geriebene Siegellackstange eine momentane Aenderung des Ausschlages hervor, die indessen alsbald wieder verschwindet. Noch sind aber die Ausschläge beim Umlegen des Commutators bei sonst gut justirtem Electrometer entgegengesetzt gleich. Geht man noch weiter, so hört schliesslich die Verbindung beider Pole durch zwischen ihnen sich hin und her bewegende Gastheilchen ganz oder so gut wie ganz auf; beide Pole werden bis zu einem gewissen Grade voneinander unabhängig, und die Ausschläge des Goldblättchens sind beim Umlegen des Commutators nicht mehr entgegengesetzt gleich. Es beginnt nämlich jetzt die auf beide Electroden influenzirend wirkende, im Zimmer vertheilte Electricität die Ausschläge zu modificiren, weil die Ableitung zur Erde unterbrochen ist, dagegen noch der am Anfange dieses Paragraphen beschriebene Vorgang der Electricitätszerstreuung durch die Flammengase stattfindet.

Ich will jetzt eine Reihe derartiger Beobachtungen mittheilen, wie sie mit den zu Anfange von § 1 beschriebenen Brennern erhalten wurden, als sich der Draht *pt* 340 mm über der Brennermündung befand. War der Draht *pt* zur Erde abgeleitet, so zeigten die mit dem Electrometer verbundenen Brenner folgende Spannungen:

Pt	Zn	Cu	Sn	C	Pb	Fe
0,65	−0,19	0,49	0,66	0,56	0,41	0,92.

Wurde der Draht *pt* ganz entfernt, so zeigten die Brenner bei frei brennenden Flammen:

1,06	0,48	0,89	1,19	0,97	0,86	1,40.

Die Differenzen zwischen den unteren und oberen Zahlen sind:

0,41	0,67	0,40	0,53	0,41	0,45	0,48,

d. h. nahezu constant, und im Mittel = 0,48. Die ganze Erscheinung lässt sich erklären, wenn man annimmt, dass die

Luft eine positive Ladung besass, gegen welche die Brennermündungen durch den zur Erde abgeleiteten Draht pt soweit gedeckt wurden, dass die Einwirkung der Luftladung auf dieselben um 0,48 Dan. vermindert wurde: die Zahlen der zweiten Reihe stellen die Werthe $F|M+M|G+V$ dar, die der ersten $F|M+M|G+V-0{,}48$. Wurden alsdann die Brenner abgeleitet, der Draht pt aber mit dem Electrometer verbunden, so zeigte er für die verschiedenen Brenner folgende Spannungen:

$$-0{,}10 \quad 0{,}74 \quad 0{,}21 \quad 0{,}00 \quad 0{,}00 \quad 0{,}20 \quad -0{,}28.$$

Diese Werthe bestehen erstens aus der electromotorischen Kraft $F|pt+pt|G$; sodann aus der Influenzwirkung der äusseren positiven Electricität, welche aber eine andere sein wird, als die auf die Brenner ausgeübte (V'); an dritter Stelle ist zu beachten, dass die Flammenmolecüle, die den in der ersten Reihe angeführten entgegengesetzten Spannungswerthe mit sich führen, d. h. die Flamme bildet in den einzelnen Fällen ein electrisches Feld von den Intensitäten:

$$-0{,}65 \quad 0{,}19 \quad -0{,}49 \quad -0{,}66 \quad -0{,}56 \quad -0{,}41 \quad -0{,}92,$$

welche Ladungen ebenfalls noch vom Drahte pt aufgenommen werden (was übrigens vielleicht nicht vollständig genau der Fall sein wird). Aus allen drei Wirkungen setzen sich die beobachteten Werthe zusammen, d. h. es müssen folgende sieben Gleichungen stattfinden:

$$F|pt+pt|G+V' = \left\{\begin{array}{l} -0{,}65 = -0{,}10 \\ +0{,}19 = \ \ 0{,}74 \\ -0{,}49 = \ \ 0{,}21 \\ -0{,}66 = \ \ 0 \\ -0{,}56 = \ \ 0 \\ -0{,}41 = \ \ 0{,}20 \\ -0{,}92 = -0{,}28 \end{array}\right\}, \text{ woraus folgt } F|pt+pt|G+V' = \left\{\begin{array}{l} 0{,}55 \\ 0{,}55 \\ 0{,}70 \\ 0{,}66 \\ 0{,}56 \\ 0{,}61 \\ 0{,}64 \end{array}\right.$$

oder es ist im Mittel $F|pt+pt|G+V' = 0{,}61$. Auch aus diesen Versuchen sind Schlüsse über die Werthe $F|M+M|G$ und $F|pt+pt|G$ ohne weitere Annahmen nicht zu machen.

Ob die im Vorstehenden für die Erscheinungen an in grosser Höhe abgeleiteten und frei brennenden Flammen gegebene Erklärung, welche für die angeführten Versuche sich als ausreichend erweist, berechtigt ist, müssen weitere

ausgedehnte Untersuchungen entscheiden, bei denen Influenzwirkungen von messbarer Grösse ausgeübt werden. Man übersieht leicht, wie durch messbare Aenderungen der Potentiale V und V' die Werthe $F|M + M|G$ und $F|pt + pt|G$ einzeln ermittelt werden könnten.

§ 4. Ableitung der Flamme durch Wasserstrahlen.

Da ein in die Flamme oder deren Nähe gebrachter Platindraht mit dem Orte seine Temperatur ändert, so ist er nicht geeignet, die Frage zur Entscheidung zu führen, ob die auftretenden electromotorischen Kräfte lediglich auf thermoelectrischen Ursprung zurückzuführen sind, oder ob die Berührung der Metalle mit den Flammengasen einen wesentlichen Beitrag liefert. Man könnte nun der Entscheidung dieser wichtigen Frage dadurch näher zu treten versuchen, dass man durch Eis oder Wasser abgekühlte Platingefässe in die Flamme bringt, wie Becquerel[1]) und Hankel[2]) gethan haben. Indessen sind mit Eis abgekühlte Electroden in einer Wasserdampf entwickelnden Flamme schon deshalb nicht geeignet, hier zu entscheiden, weil ein Wasserbeschlag unvermeidlich ist, sodass nicht mehr, wie vorausgesetzt wird, die Combination Flammengase — Platin, sondern Flammengase — Wasser — Platin vorhanden ist. Um diesen Wasserbeschlag zu vermeiden, füllte ich eine grosse Platinschale, ehe ich sie über die Flamme brachte, mit nahezu siedendem Wasser. Aber auch so ergaben die Versuche keine bestimmt definirbaren Resultate, da sich auch jetzt noch am Boden des Gefässes Beschläge bildeten, über deren Beschaffenheit sich etwas Bestimmtes kaum behaupten lässt; ich will deshalb diese Versuche hier übergehen, um in § 5 nochmals auf die Frage, ob wir es hier mit rein thermoelectrischen Vorgängen zu thun haben oder nicht, zurückzukommen.

Es sollen in diesem Paragraphen einige Versuche beschrieben werden, wo eine thermoelectrische Erregung mit Sicherheit auszuschliessen ist, bei denen die in die Flamme

1) Hankel, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 5. p. 9. 4861.
2) Hankel, l. c. p. 26 ff.

gebrachten Electroden aus Wasserstrahlen bestanden, ein Verfahren, dessen sich bereits Hankel[1]) bedient hat. Dieselben wurden mittelst isolirt aufgestellter Mariotte'scher Flaschen erzeugt, in welche zur Ableitung Kupferdrähte (cu) eintauchten. Die Strahlen selbst strömten aus fein ausgezogenen, durch Glashähne verschliessbaren Glasröhren, welche behufs verticaler und horizontaler Verschiebung an denselben Vorrichtungen isolirt sich befestigen liessen, welche bei den ähnlichen Versuchen mit den Platindrähten verwendet worden sind. Durch die Kupferdrähte konnten dieselben mit dem Electrometer beziehentlich der Erde in leitende Verbindung gesetzt werden. Die Ableitung durch die zum Auffangen dienenden Gefässe genügte nicht, weil die Strahlen bereits in Tropfen aufgelöst daselbst anlangten. Die Wasserstrahlen sind im Folgenden immer mit *h* bezeichnet.

Ich will jetzt zunächst die Resultate der Beobachtungen mittheilen, und zwar in den Tabellen IX a, b, c derjenigen, wo der Wasserstrahl seitwärts aus der Flamme heraus bewegt wurde, in den Tabellen X a bis d derjenigen, wo derselbe vertical verschoben wurde; in den letzteren Versuchen ging der Strahl durch die Axe der Flamme.

Tabelle IX_a.

Bunsen'scher Brenner, Flamme 150 mm hoch, Wasserstrahl im Querschnitt 40 mm über der Mündung.

Entfern. v. d. Axe mm	0	2	4	6	8	10	12	14	15
[cu *h F Fe*]	1,32	1,32	1,32	1,31	1,40	1,46	1,49	1,49	1,48

Tabelle IX_b.

Leuchtende Flamme, 140 mm hoch, Wasserstrahl im Querschnitt 20 mm über der Mündung.

Entfern. v. d. Axe mm	0	1	2	3	4	5	6	7
[cu *h F Fe*]	1,01	1,01	1,00	0,98	1,05	1,14	1,16	1,17

1) Hankel, l. c. p. 27.

Tabelle IX_c.

Alkoholflamme, Alkohol durch Kupferdraht Cu abgeleitet. Ohne Flamme zeigte der Draht cu gegen Cu die Spannung $[cu\ h\ Alk.Cu] = -0{,}04$.

Entfernung von d. Axe mm	0	1	2	3	4	5
h in 5 mm über Docht $[cu\ h\ F\ Alk.Cu]$	0,23	0,25	0,16	0,20	0,35	0,40
h in d. Höhe d. Spitze d. inneren Kegels $[cu\ h\ F\ Alk.Cu]$	0,38	0,36	0,37	0,43	0,47	—

Tabelle X_a.

Bunsen'scher Brenner, Flamme 60 mm hoch.

Höhe üb. d. Mündung	10	25	40	50	70	100	110
$[cu\ h\ F\ Fe]$	1,05	1,26	1,43	1,52	1,61	1,68	1,70

Hieraus wurden die Werthe:

$$[cu\ h_x\ F\ Fe] - [cu\ h_{10}\ F\ Fe] = [cu\ h_x\ F h_{10}\ cu]$$

berechnet und alsdann mittelst eines Wasserstrahles in 10 mm und eines zweiten in x mm Höhe über dem isolirten Brenner direct gemessen. Es ergaben sich folgende Werthe:

Tabelle X_b.

X = mm		25	40	50	70	100
$[cu\ h_x\ F h_{10}\ cu]$	ber.	0,21	0,37	0,46	0,56	0,62
	beob.	0,30	0,50	0,52	0,56	0,56

Dass beide Zahlenreihen nicht völlig übereinstimmen, ist wahrscheinlich daraus zu erklären, dass der untere Wasserstrahl die kleine Flamme bereits ziemlich störte.

Tabelle X_c.

Leuchtende Flamme, 60 mm hoch.

Höhe üb. d. Münd.	10	20	40	60	80	100	120	140	160
$[cu\ h\ F\ Fe]$ . . .	0,89	0,96	1,32	1,44	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54

Tabelle X_d.

Alkoholflamme, Cu im Alkohol, $[cu\ h\ Alk.Cu] = -0{,}04$.

Höhe üb. dem Docht	10	20	40	60	80	100	110
$[cu\ h\ F\ Alk.Cu]$ . .	0,21	0,27	0,46	0,49	0,49	0,50	0,51

Was nun zunächst die Tabellen IX anlangt, so ergibt sich durchgängig für den Strahl ausserhalb der Flamme ein höherer Werth, als für den innerhalb, und zwar beträgt die Differenz in den ersten beiden Fällen 0,16, bei der Alkoholflamme 0,17 Dan. für den unteren Querschnitt, dagegen nur 0,09 für den oberen.

Weit beträchtlichere Aenderungen zeigen die Werthe in den Tabellen X, wobei ebenfalls dem ausserhalb der Flamme befindlichen Strahle die höheren Spannungswerthe zukommen. Diese Aenderungen betragen resp. 0,65 Dan. für die Bunsen'sche und die leuchtende Gasflamme, dagegen nur 0,30 Dan. für die Alkoholflamme.

Wollte man nun diese Vorgänge etwa durch die Annahme erklären, dass diese Differenzen aus der Verschiedenartigkeit der Erregung des Wassers seitens der Flammengase entspringen, so würde man auf die Schwierigkeit stossen, dass sich hierbei die Gase in der Richtung von unten nach oben nicht mehr, wie bei den Versuchen mit dem Platindraht, ebenso verhalten, wie in der Richtung von der Flammenmitte zur Peripherie.

Eine andere Erklärung für diese Erscheinungen lässt sich vielleicht folgendermassen gewinnen: Schon infolge der im Zimmer vertheilten Electricität führen die Theilchen der zur Erde abgeleiteten Flamme Electricität von bestimmter Spannung mit sich. Nehmen wir nun an, das Element Kupfer — Wasser — heisse Brennermündung besitze eine gewisse Spannung a, und zwar beim Eisen so, dass sich die positive Electricität von cu durch h und F zum Fe bewegt. Ausserdem sei die Flamme infolge der Influenzwirkung von im Zimmer vertheilter, positiver Electricität negativ geladen; die Spannung sei $-a$. Dann vermittelt einmal die Flamme als gewöhnlicher Leiter in der in § 3 beschriebenen Weise

den Austausch der Spannung a; ferner aber condensirt der Wasserstrahl h von dem negativelectrischen Felde in jedem Zeittheilchen die Electricitätsmenge $-k\alpha$, wovon er in derselben Zeit wegen der Schwierigkeit des Austrittes der negativen Electricität[1]) nur $-k'\alpha$ wieder sofort an andere, ihn treffende und von ihm nicht condensirte Flammenmolecüle abgibt, sodass er also einen Ueberschuss $-(k-k')\alpha$ behält, welcher sich zum Potentialwerthe a addirt; wir messen also am Electrometer bei dem Element [cu h *FFe*] nicht die Spannung a allein, sondern $a+(k-k')\alpha$. Nun wird k', wenn h aus der Flamme herausrückt, kleiner werden, d. h. der Verlust an Electricität wird um so geringer, oder der Widerstand gegen den Austritt negativer Electricität um so grösser, je weiter man sich von der eigentlichen Flamme entfernt, während k beim Aufwärtsbewegen wahrscheinlich wegen der Zunahme condensirbarer Molecüle zunächst wachsen und später wegen des nahzu cylindrischen Verlaufes des heissen Gasstromes nahezu constant bleiben wird. Es muss hiernach die Spannung beim Aufwärtsbewegen des Wasserstrahles erst rascher, dann langsamer wachsen, wie dies die in den Tabellen X_a bis X_d mitgetheilten Versuche thatsächlich zeigen.

Aehnlich wird es sich bei der Seitwärtsbewegung verhalten, nur dass hier jedenfalls ausser k' auch k abnehmen wird, weil sich einmal die Strecke, in welcher das electrische Feld durchsetzt wird, verkleinert, zweitens aber nach dem Rande zu die mit Electricität geladenen Molecüle weniger dicht nebeneinander sich vorfinden werden. Das Gesammtresultat jedoch ist nach den Beobachtungen auch hierbei, dass $k-k'$ wächst, wenn auch beträchtlich weniger als bei verticaler Verschiebung von h in der Axe der Flamme.

Diese zu den Spannungen a sich hinzuaddirenden Werthe sind es, welche man beobachtet, sobald zwei Wasserstrahlen durch die Flamme geschickt werden (Tabelle X_b). Ebendaher sind auch die Spannungen bei der durch einen Wasserstrahl abgeleiteten Weingeistflamme herzuleiten (Tabelle X_d), ohne dass man eine besondere Erregung der Flüssigkeit durch das Gas anzunehmen nöthig hätte.

1) Hankel, l. c. p. 39 ff.

Die Zulässigkeit dieser Art und Weise der Interpretation dieser Versuche wäre übrigens einer genaueren und umfassenderen Prüfung zu unterwerfen, wobei wieder die Entscheidung durch messbare Veränderung der influenzirend wirkenden Electricitäten herbeizuführen sein würde.

§ 5. Recapitulation der hauptsächlichsten Ergebnisse.

Die im Vorstehenden mitgetheilten Versuche ergaben zunächst, dass die Spannungen von der chemischen Beschaffenheit und der Temperatur der Brennermündungen abhängen, und dass sich diese letzteren nach Eintritt eines stationären Zustandes in eine Spannungsreihe einordnen lassen. Dabei erwies sich vor allen das Eisen als sehr stark negativ.

Es zeigte sich ferner, dass die electromotorischen Kräfte Functionen des Ortes sind, an welchem sich die Electrode in der Flamme befindet, und ich habe bereits p. 255 behauptet, dass die Orte grösster Spannung mit den Temperaturmaximis zusammenfallen, eine Behauptung, die ich jetzt genauer zu begründen versuchen will. Wenn man die ausserordentlich hohen Beträge der gewissen Schichten der Flamme entsprechenden Spannungen (ca. 4 Dan.) mit denjenigen vergleicht, welche man sonst bei thermoelectrischen Wirkungen beobachtet, so fällt es schwer, dieselben lediglich aus einer positiven Verschiebung des Platins durch die Temperaturerhöhung zu erklären. Ich will deshalb die Beobachtungen in anderer Weise zu interpretiren versuchen, wobei ich mich auf eine Abhandlung St.-Claire-Deville's [1]) berufe, worin dieser bezüglich der Kohlenoxydknallgasflamme nachweist, dass in derselben mit der Temperatur die Menge des freien Kohlenoxydes zunimmt, oder dass dem Temperaturmaximum ein Dissociationsmaximum entspricht. Uebertragen wir diese Resultate auf die Kohlenwasserstoffflamme, so wird in einer solchen an den heissesten Stellen Wasserstoff und Kohlenoxyd in grösster Menge frei sein. Es lehren ferner die Untersuchungen Grove's, dass die das Wasser nicht zersetzenden Metalle in Berührung mit Wasserstoff und Kohlen-

1) St.-Claire-Deville, Compt. rend. **60.** p. 884 ff. 1865.

oxyd stark negativ erregt werden. Diese Beobachtungen beziehen sich allerdings nur auf kalte Metalle und Gase; nehmen wir aber an, dass auch für hohe Temperaturen ähnliche Beziehungen statthaben, so wird einmal an den Stellen höchster Temperatur, vermöge der positiven Verschiebung des Platins infolge der Temperaturerhöhung in dem das Molecül pt mit dem Brenner M verbindenden Drahte positive Electricität von M nach pt getrieben, zweitens aber treibt die Berührung von pt mit den nach Vorstehendem vorwiegend aus Kohlenoxyd und Wasserstoff bestehenden Flammengasen negative Electricität nach der entgegengesetzten Richtung, d. h. beide Wirkungen summiren sich. An den Stellen niederer Temperatur überwiegt nach St.-Claire-Deville Kohlensäure (und Wasserdampf), welche das Platin schwach positiv erregen; hier fällt also die zweite Wirkung weg, und es bleibt allein die thermoelectrische übrig. Dies letztere gilt nun vor allem für die über der Flamme und seitwärts derselben gelegenen Orte, wo ausserdem noch die thermoelectrische Wirkung stark vermindert ist. Die Verhältnisse compliciren sich aber in allen Fällen dadurch, dass die Flamme kein homogenes Gebilde ist, und dass die Beobachtungen immer nur gewisse Mittelwerthe liefern.

Im Anschluss hieran will ich noch erwähnen, dass meine Beobachtungen mit denen der Hrn. Elster und Geitel, soweit sie mit denselben vergleichbar sind, den numerischen Werthen nach gut übereinstimmen. Dieselben fanden die electromotorische Kraft eines ausserhalb der Flamme befindlichen Platindrahtes gegen einen in demselben Querschnitte bis zur Mitte geführten, für die Flamme des Bunsen'schen Brenners = 1,92 Dan., für die Alkoholflamme = 1,44 Dan.[1]) Aus meinen Beobachtungen folgt nach Tabelle IV$_a$ als Mittel von a_{13} bis a_{16} = — 0,37; dies von a_1 abgezogen, gibt 1,95 für die obengenannte electromotorische Kraft; die directe Beobachtung lieferte genau dieselbe Zahl. Für die Alkoholflamme fand ich aus den ähnlichen (hier nicht mitgetheilten) Versuchen 1,43.

1) Elster u. Geitel, Wied. Ann. **16.** 193 u. 199. 1882.

III. *Ueber eine Compensationsmethode zur Bestimmung des Widerstandes unpolarisirbarer Elemente; von Dr. F. Fuchs,*

Professor der Jatrophysik in Bonn.

(Hierzu Taf. II Fig. 14—17.)

In der (Fig. 14) dargestellten Versuchsanordnung ist E das Element, dessen Widerstand bestimmt werden soll, A eine Säule von einem oder mehreren grösseren Bunsen'schen Elementen, G ein Galvanometer; a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 sind die Quecksilbernäpfe einer Pohl'schen Wippe, von welcher der eine Arm des Kreuzes entfernt ist; bm ist ein über eine Scala ausgespannter Platindraht, von welchem der Widerstand der Längeneinheit vorgängig ermittelt worden ist; d ist ein Quecksilbercontact, durch dessen Verschiebung der Widerstand des Kreises continuirlich geändert werden kann, c ein ebenfalls verschiebbarer Metallcontact, welcher einen Punkt des Platindrahtes mit dem Quecksilbernapfe b_1 in Verbindung setzt.

Die Widerstandsbestimmung wird in folgender Weise ausgeführt. Man gibt dem Bügel der Pohl'schen Wippe zuerst die Lage, bei der a_2 mit a_3, b_2 mit b_3 communicirt, und stellt das Galvanometer G durch Verschiebung des Quecksilbercontactes d auf Null ein. Dann führt man den Bügel in die andere Lage über, in der a_1 mit a_2, b_1 mit b_2 in Verbindung steht, und verschiebt den Metallcontact c, bis das Galvanometer abermals stromfrei ist. Der Widerstand der Drahtlänge bc ist alsdann, wie die folgende Ueberlegung zeigen wird, gleich dem zu bestimmenden Widerstande des Elementes E.

Bei der ersten Lage des Bügels ist das übersichtlicher in Fig. 17 dargestellte Versuchsschema realisirt. Der negative Pol des zu untersuchenden Elementes E ist dem positiven Pole der Säule A zugekehrt. Ist das Galvanometer durch Verschiebung des Quecksilbercontactes d stromfrei geworden, so sind a und b Punkte gleichen Potentialniveaus, welche folglich zusammengelegt werden könnten, ohne dass sich die Stromstärke deshalb änderte. Durch die gedachte Vereinigung der Punkte a und b würde der Kreis in zwei andere (Fig. 16) EbE und $AdbA$ zerlegt werden. Der erstere würde aus dem zu untersuchenden Elemente und zwei kurzen Ver-

bindungsdrähten bestehen; die in ihm herrschende Stromesintensität wäre demnach, wenn man mit E die electromotorische Kraft, mit W den Widerstand des Elementes bezeichnet:

$$i = \frac{E}{W}.$$

Der andere Kreis (Fig. 16) würde die Säule A, den Platindraht bd und die Verbindungsdrähte Ab, Ad enthalten; in ihm würde also die Stromstärke:

$$i = \frac{A}{R}$$

bestehen, worin A die electromotorische Kraft der Säule A, R den Widerstand des Kreises $AdbA$ bedeutet. Die Stromesintensitäten der beiden gedachten Kreise (Fig. 16) sind gleich der Stromesintensität in dem Kreise Fig. 15. Mithin ist die Stromstärke i, bei der das Galvanometer (Fig. 15) auf Null steht:

(1) $$i = \frac{E}{W} = \frac{A}{R}.$$

In der zweiten Lage des Bügels (Fig. 14) ist der Stromkreis $AdbA$ der Fig. 16 wirklich hergestellt; das Element E kehrt jedoch jetzt seinen positiven Pol dem positiven Pole der Säule A zu; der andere Pol steht mit dem Galvanometer und dieses mit dem Metallcontacte c in Verbindung; wie es übersichtlicher in Fig. 15 dargestellt ist. Wird nun der Contact c verschoben, bis die Zweigleitung $bEGc$ stromfrei ist, so herrscht in dem Kreise $AdcbA$ nach wie vor die Stromesintensität:

(1) $$i = \frac{E}{W} = \frac{A}{R},$$

und es ist somit:

$$E = iW.$$

Die durch den Strom i erzeugte Potentialdifferenz zwischen den Punkten b und c ist gleich der electromotorischen Kraft des Elementes E. Es ist also, wenn man mit w den Widerstand der Drahtlänge bc bezeichnet:

(2) $$E = iw.$$

Aus den beiden vorstehenden Gleichungen folgt:

$$W = w.$$

Der Widerstand W des Elementes E kann also bei diesem Verfahren, ohne dass irgend eine Rechnung auszuführen wäre, direct an der unterhalb des Platindrahtes bm befindlichen Scala abgelesen werden.

Ist das Verhältniss der electromotorischen Kräfte A und

E bereits bekannt, so erfährt man zugleich den Widerstand der Säule A. Nach Gleichung (1) ist nämlich:

$$\frac{E}{W} = \frac{A}{R}.$$

Mithin ist: $$R = \frac{A}{E} W = \frac{A}{E} w.$$

Der Widerstand R besteht aus dem Widerstande r der Säule A [inclusive dem der Verbindungsdrähte Ab, Ad (Fig. 17)], und dem ebenfalls an der Scala ablesbaren Widerstande q der Drahtlänge bd. Es ist also:

(3) $$R = r + q,$$

und folglich ist:

$$r + q = \frac{A}{E} w, \qquad r = \frac{A}{E} w - q.$$

Die Ausführbarkeit der Bestimmung ist an gewisse Bedingungen gebunden, welche im allgemeinen leicht zu realisiren sind. Nach Gleichung (1) ist:

$$R = \frac{A}{E} W,$$

und nach Gleichung (3) ist:

$$R = r + q.$$

Also: $$r + q = \frac{A}{E} W.$$

Der Widerstand q besteht aus zwei Theilen, nämlich dem Widerstand e w der Drahtlänge bc (Fig. 17), welcher dem Widerstande W des Elementes E gleich ist, und dem Widerstande x der Drahtlänge cd. Mithin ist:

(4) $$r + W + x = \frac{A}{E} W,$$

$$\left(\frac{A}{E} - 1\right) W - r = x.$$

Die Bestimmung ist ausführbar, wenn x gleich oder grösser als Null ist. Bei der Anordnung des Versuches ist demnach die Bedingung einzuhalten:

$$\left(\frac{A}{E} - 1\right) W - r \geqq 0,$$

oder in anderer Schreibweise:

(5) $$\frac{r}{W} \leqq \frac{A}{E} - 1.$$

Soll beispielsweise der Widerstand W eines Daniell'schen Elementes bestimmt werden, so kann die Säule A aus einem einzigen Bunsen'schen Elemente bestehen, sofern der Widerstand desselben der Forderung entspricht:

$$r \leqq \left(\frac{A}{E} - 1\right) W, \qquad r \leqq (1{,}7 - 1)\, W, \qquad r \leqq 0{,}7\, W.$$

Auch der Widerstand y des Platindrahtes bm muss passend gewählt werden. Da:

$$y > W + x$$

sein muss, und nach Gleichung (4):

$$W + x = \frac{A}{E} - r$$

ist, so hat y der Forderung zu genügen:

$$y > \frac{A}{E} W - r.$$

Die Länge des Maassdrahtes ist also immer ausreichend, wenn:

(6) $$y > \frac{A}{E} W \quad \text{ist.}$$

IV. *Zur Theorie der thermoelectrischen Kräfte; von E. Budde.*

§ 1. Es sind bis jetzt zwei Theorieen aufgestellt, welche die Erklärung oder, besser gesagt, die systematische Auffassung des Ursprunges der thermoelectromotorischen Kräfte ermöglichen sollen. Die ältere betrachtet die thermoel. Kraft als ein Contactphänomen zwischen Stoffen von verschiedener Constitution, und um die Erscheinungen, welche an stark erhitzten Löthstellen auftreten, in ihren Rahmen zu bringen, nimmt sie an, dass zwei Stellen eines und desselben Metalles, die verschiedene Temperatur haben, als zwei Körper von verschiedener Constitution aufzufassen seien. Die älteste mir bekannte Quelle, in welcher diese Ansicht deutlich ausgesprochen ist, ist die Abhandlung von Clausius über die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die thermoelectrischen Erscheinungen[1]); doch mag sie wohl schon vorher von manchen Physikern gehegt worden sein. Die jüngere Theorie, von F. Kohlrausch[2]) befürwortet, lässt die Annahme von Contactwirkungen fallen und führt die fraglichen Kräfte auf Beziehungen zwischen Wärme und Electricität

1) Clausius, Pogg. Ann. 90. p. 513. 1853. Abhandl. 12. 1864.
2) Kohlrausch, Pogg. Ann. 156. p. 601. 1875.

in ein und demselben Metall zurück. Der von W. Thomson eingeführte Begriff „specifische Wärme der Electricität" lässt sich an die Kohlrausch'sche Theorie anlehnen, enthält aber an sich nicht eine selbständige Theorie, sondern nur eine neue Benennung für Constanten, die sich aus beiden vorstehenden Theorien ableiten lassen.

Wir gehen darauf aus, zu untersuchen, ob zwischen den Ansichten von Clausius und von Kohlrausch Unterschiede bestehen, die es möglich machen, zu entscheiden, welche von beiden den Vorzug verdient. Kohlrausch[1]) sagt: „Während alle sicher bekannten Thatsachen der Thermoelectricität aus dieser (der zweiten) Grundlage folgen, ergeben sich noch zwei, äusserlich unbedeutende Folgerungen, welche ihr eigenthümlich sind; nämlich erstens eine electrische Differenz zwischen zwei Punkten eines Körpers von verschiedener Temperatur, und zweitens ein Unterschied der von einem electrischen Strom entwickelten Wärme in einem ungleich warmen Leiter, je nach der Richtung des Stromes." Der Verf. führt dann an, dass die Versuche von W. Thomson und Leroux[2]) die zweite Folgerung zu bestätigen scheinen, und setzt auseinander, dass auch die erste keine Unwahrscheinlichkeit enthält.

Ich glaube auch, dass die Versuche der beiden genannten Autoren die zweite und damit auch die erste Folgerung bestätigen, und zwar mit einer Wahrscheinlichkeit, die an Sicherheit grenzt: denn wenn die von Kohlrausch bezeichneten Potentialdifferenzen auf dem homogenen Draht nicht existirten, so liesse sich für die Resultate des Experimentes überhaupt keine Begründung geben. Aber man darf diese Resultate doch nicht als einen Beweis für die Richtigkeit der Kohlrausch'schen Theorie auffassen; denn beide Folgerungen ergeben sich ebenso streng aus der Clausius'schen Theorie, wie aus jener.

Ich habe kurz vor Hrn. Kohlrausch in diesen Annalen eine Abhandlung[3]) „Thermoelectrische Studien" (im Folgenden

1) Kohlrausch, l. c. p. 603.
2) Wied. Galv. 1. p. 917 ff.
3) Budde, Pogg. Ann. 153. p. 343. 1874.

citirt als „Th. St.") veröffentlicht, welche nichts anderes ist, als die Anwendung der Clausius'schen Theorie auf den Fall, dass die durch Temperaturerhöhung hervorgerufenen Aenderungen der Constitution mit in Rechnung gezogen werden. Dieselbe enthält bereits die allgemeine Formel und einige angenäherte Zahlenangaben für die Abweichungen vom Joule'schen Gesetz, die nach W. Thomson und Leroux zu beobachten sind, wenn ein galvanischer Strom durch einen homogenen Draht von veränderlicher Temperatur geht; man kann aus den dort gegebenen Gleichungen auch ohne Mühe den Betrag der Potentialdifferenz ablesen, welche zwischen zwei Stellen eines homogenen Drahtes besteht, die auf den Temperaturen T_1 und T_2 gehalten werden.

Nachdem ich verschiedene Berichte und Auszüge aus jener meiner Abhandlung gelesen, scheint es mir, als hätte ich damals den Hauptpunkt ihres Inhaltes nicht genügend hervorgehoben: das ist die strenge Folgerichtigkeit, womit die Clausius'sche Theorie allen Ergebnissen der Erfahrung gerecht wird; wenigstens tritt dieser Punkt in den Citaten nicht heraus. Theils um diese Lücke auszufüllen, theils im Interesse des beabsichtigten Vergleiches erlaube ich mir, hier noch einmal auf die Grundzüge der Ableitung zurückzukommen, an die dann später die Betrachtung der Kohlrausch'schen Theorie angelehnt wird.

§ 2. Clausius'sche Theorie. Grundannahme: Berühren sich irgend zwei Metalltheile von verschiedener Beschaffenheit, einerlei ob sie verschiedene Namen oder gleichen Namen und verschiedene Temperatur haben, so besteht zwischen ihnen eine thermoelectrische Differenz; dieselbe unterliegt, was ihren Werth und ihre Arbeit anlangt, den von Clausius aufgestellten Gesetzen. Wir acceptiren dabei die Clausius'sche Annahme, dass die Carnot'sche Function mit der absoluten Temperatur T identisch ist.

Zwei Metalle A und B seien bei der Temperatur T gegeben und in Berührung. Zwischen ihnen besteht dann eine Potentialdifferenz; von dieser haben wir nur den Theil zu berücksichtigen, der von der Wärme hervorgebracht wird.

Diesen allein unterwerfen wir der Betrachtung und nennen ihn ΔV. Dann ist nach Clausius[1]):

$$\Delta V = \varepsilon T, \tag{1}$$

wo ε eine Constante, die nur von der Natur der beiden Metalle abhängt. Die Constanz von ε besteht indessen nur bei constantem T; ändert sich die Temperatur der Metalle, so ist ε eine Function von T. Wir setzen zunächst T als unveränderlich voraus. Dann beweist die Existenz einer thermoelectrischen Spannungsreihe, dass ε aufgefasst werden darf als die Differenz zweier Grössen α und β, von denen α dem Metall A in allen Combinationen eigenthümlich ist, β dem Metall B u. s. w. Wir können (1) also schreiben:

$$\Delta V = (\beta - \alpha) T, \tag{2}$$

wenn wir der Differenz ΔV dasjenige Vorzeichen geben, welches dem Uebergang von A zu B entspricht.

Die Grössen α, β u. s. w. haben eine einfach darstellbare Bedeutung. Wir denken uns eine Scala construirt und verlegen irgend ein beliebig ausgewähltes Metall, z. B. Quecksilber, an den Nullpunkt derselben. Für irgend ein zweites Metall, z. B. unser A, bestimmen wir dann bei der gewählten Temperatur seine thermoelectromotorische Differenz gegen Quecksilber, dividiren sie durch T, messen die erhaltene Grösse an der Scala von Null aus ab, und bezeichnen ihren Endpunkt mit α. Ebenso verfahren wir mit B und allen anderen Metallen. Dann sind α, β u. s. w. die Stellungen der Metalle in dieser Reihe, die wir kurz die „reducirte Spannungsreihe" für die Temperatur T nennen wollen; sie ist „reducirt" weil sie von dem Factor T befreit ist. Die Differenz $(\beta - \alpha)$ liefert dabei ein Maass für die Constitutionsdifferenz, welche bei der Temperatur T zwischen A und B besteht.

Nehmen wir nun an, die Temperatur T ändere sich, so ändert sich auch die Constitution von A und B; gemäss der Grundannahme werden also α, β u. s. w. Temperaturfunctionen. Es sei für irgend ein Metall, z. B. A, die charakteristische Grösse α bei allen Temperaturen zwischen T_0 und T_n be-

1) Clausius, l. c. Gl. 14a.

kannt, oder, was dasselbe sagt, es sei α_0 bei der Temperatur T_0 und ausserdem der Verlauf von $d\alpha/dT$ innerhalb der genannten Grenzen gegeben; dann können wir α durch eine Gleichung:

(3) $$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 \ldots\ldots$$

darstellen; ebenso β, wenn die gleichen Bedingungen für B erfüllt sind u. s. w. Als Beispiel setze ich die angenäherten Bestimmungsgleichungen dieser Art für Blei, Eisen, Kupfer hierher; wie man zu ihnen gelangt, wird sich später zeigen; die Grösse, welche dem α entspricht, möge dabei für Blei mit π, Cu mit $\varkappa$, Fe mit φ bezeichnet werden; sie gelten von 0° C. bis gegen 260° C.:

(4) $$\begin{cases} \pi = 0, \quad \varphi = 0{,}1865 - 0{,}00054\,(T - 293), \\ \varkappa = 0{,}0306 + 0{,}00011\,(T - 293). \end{cases}$$

Dabei ist π bei 0° C. willkürlich als Nullpunkt genommen, und die Einheiten, in denen die π u. s. w. gemessen sind, betragen nach einem Vergleich mit absoluten Bestimmungen von Kohlrausch[1]) und Ammann annähernd 0,0059 Siemens-Weber oder 0,0005 Daniell.

Die Gleichungen gestatten eine sehr einfache graphische Darstellung. Senkrecht zu der oben erklärten Scala der α, β u. s. w. bringe man eine Axe der Temperaturen an, betrachte die Temperaturen als Abscissen und die zugehörigen Werthe von α, β u. s. w. als Ordinaten. So erhält man für die α, β u. s. w. Curven. Dieselben sind in Fig. 1 für Pb, Fe, Cu ausgeführt; die Ordinaten sind dabei 100 mal vergrössert und horizontal gelegt, weil sich die graphische Tabelle in der Form am leichtesten fortsetzen, also auf andere Metalle ausdehnen lässt. Die Curven sind gerade Linien, weil nur die erste Potenz von T berücksichtigt ist.

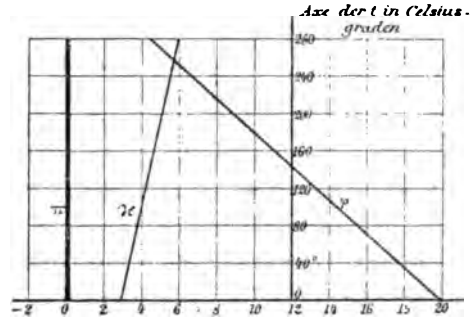


Fig. 1.

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 141. p. 456. 1870.

Die Gleichungen (4) oder die graphische Darstellung derselben enthalten nun in der einfachsten und rationellsten Weise alle thermoelectrischen Eigenschaften der in sie eingetragenen Metalle.

a) Wollen wir die thermoelectrische Differenz der Metalle A und B bei der Temperatur T haben, so ist ΔV einfach aus Gl. (2) und (4) zu bestimmen, oder wir lesen aus der graphischen Tabelle den Werth von $\beta - \alpha$ bei der Temperatur T ab und multipliciren ihn mit T. Die Thatsache, dass jedes Metall für sein α eine von dem anderen unabhängige Curve, resp. Gleichung besitzt, enthält als Gesetz, dass bei jeder Temperatur eine thermoelectrische Spannungsreihe existirt, und dies Gesetz beweist umgekehrt, dass für jedes Metall eine Gleichung oder Curve der festgesetzten Art existirt. Das Gesetz zeigt auch, dass und wie man alle Gleichungen (4) aufstellen kann, wenn eine einzige derselben, z. B. die für α, gegeben ist, und ausserdem die Spannungsreihen bei verschiedenen Temperaturen T_1, T_2 u. s. w. quantitativ bekannt sind. Man stellt aus den Spannungsreihen die Differenzen $(\beta - \alpha)$ für die Temperaturen T_1, T_2 u. s. w. her, addirt sie zu den entsprechenden Werthen von α und erhält so die Werthe von β für T_1, T_2 u. s. w., aus denen sich dann die Gleichung und die Curve für β ableitet.

b) Ein Draht vom Metall A sei an der Stelle s_1 auf die Temperatur T_1, an der Stelle s_2 auf T_2 gebracht. An der Stelle s zwischen jenen Punkten herrsche die Temperatur T, und im Abstand ds davon die Temperatur $T + dT$. Dann stossen an dieser Stelle zwei Metalltheile zusammen, in denen α die Werthe α und $\alpha + (d\alpha/dT)\,dT$ hat. Behalten wir im Auge, dass α in einem homogenen Draht nur von T abhängt, so können wir statt $\alpha + (d\alpha/dT)\,dT$ kurz $\alpha + d\alpha$ schreiben. Nach der Grundannahme entspricht nun der Differenz $d\alpha$ bei dieser Berührung eine electromotorische Differenz dV, welche den Clausius'schen Gesetzen gehorcht; dieselbe hat also den Werth, entsprechend Gl. (1):

$$dV = T d\alpha. \tag{5}$$

Daraus ergibt sich durch Integration über die Strecke s_1 s_2 bei entsprechender Bezeichnung von V:

$$(6) \qquad V_2 - V_1 = \int_{T_1}^{T_2} T d\alpha .$$

Zwischen s_1 und s_2 besteht also bei endlichem Temperaturunterschied eine endliche Potentialdifferenz. Da α blos mit T variirt, hängt der Werth des Integrales nur von den Grenzen ab.[1]) Die numerische Bestimmung ergibt für die drei oben angeführten Metalle zwischen 0 und 200° C.

$$(7) \quad \begin{cases} \text{für Blei } V_2 - V_1 = 0, \quad \text{für Eisen } V_2 - V_1 = -40, \\ \qquad\qquad \text{für Kupfer } V_2 - V_1 = +8, \end{cases}$$

in Einheiten von denen 2000 auf 1 Daniell gehen.

Die Werthe sind zu klein, als dass ich mit meinen jetzigen Mitteln den praktischen Nachweis derselben hätte versuchen können. Vgl. übrigens den Schluss der Abhandlung.

c) Zwei Metalle A und B werden in gewöhnlicher Weise zum thermoelectrischen Element aneinander gefügt. Die eine Löthstelle heisse (1), die andere (2), und die bezüglichen Grössen werden entsprechend markirt, dann sind die electromotorischen Kräfte, deren Summe E heissen möge, vom Ende A_1 in der Richtung über A_2 B_2 gezählt:

$$(8) \qquad \int_{T_1}^{T_2} T d\alpha + T_2(\beta_2 - \alpha_2) + \int_{T_2}^{T_1} T d\beta + T_1(\alpha_1 - \beta_1) = E.$$

Differentiirt man dies nach T_2 und bedenkt, dass $d\alpha$ beim Einsetzen von T_2 in $(d\alpha/dT)\,dT$ den Werth annimmt, den wir mit $d\alpha_2$ zu bezeichnen haben, so findet sich:

$$(9) \qquad T_2 d\alpha_2 + T_2(d\beta_2 - d\alpha_2) + dT_2(\beta_2 - \alpha_2) - T_2 d\beta_2 = \frac{dE}{dT_2} dT_2.$$

Hierin heben sich die mit T_2 behafteten Glieder, und es bleibt:

$$(10) \qquad \frac{dE}{dT_2} = \beta_2 - \alpha_2$$

oder, da das für jedes T_2 gilt:

$$(11) \qquad \frac{dE}{dT} = \beta - \alpha,$$

worin alle Grössen auf dieselbe Temperatur zu beziehen sind. Dies ist die Grundgleichung der thermoelectrischen Berüh-

1) Budde, Th. St. p. 348–349.

rungsstellen bei vollständiger Betrachtung ihrer Processe. Sie zeigt, dass ein Satz streng richtig ist, den Clausius in seiner oben citirten Abhandlung nur als angenähert bestätigt aussprechen konnte, weil er sich auf die Voraussetzung beschränkte, dass die α, β etc. constant seien; der Satz nämlich: bei der Temperatur T ist die Potentialdifferenz einer Löthstelle proportional mit ihrem dE/dT.[1]) Wir erhalten für diesen Potentialunterschied aus (11) durch Multiplication mit T:

$$T(\beta - \alpha) = T\frac{dE}{dT}. \tag{12}$$

Gleichung (11) zeigt, wie man aus der Beobachtung thermoelectrischer Ströme die Differenzen $\beta - \alpha$ bestimmen kann; sie gibt also nach (α) das Mittel, alle Grössen α, β etc. festzustellen, wenn eine derselben bekannt ist.

d) Das Peltier'sche Phänomen unterliegt nach Clausius dem Princip: Geht ein Strom von der Intensität J von einer Stelle, die das Potentialniveau V_1 hat, zu einer anderen mit dem Potentialniveau V_2, so ist die von ihm verrichtete Arbeit L gleich $J(V_2 - V_1)$. In unserem Falle ist L die Arbeit, welche die Wärme am Strom leistet, die also durch ein entsprechendes Verschwinden von Wärme gedeckt wird.

Das gibt erstens für die Löthstelle A/B, wenn der Strom J von A zu B geht:

$$L = J(V_B - V_A) = JT(\beta - \alpha) = JT\frac{dE}{dT}. \tag{13}$$

Dies ist die wichtigste verificirbare Gleichung der Theorie. Die bekannten Versuche von Edlund zeigen, dass L bei constantem T proportional mit dE/dT ist. Ich selbst habe in den thermoelectrischen Studien § 8 einen Versuch beschrieben, der mit Sicherheit zeigt, dass L bei derjenigen Temperatur T zu Null wird, wo $dE/dT = 0$ ist. Dieselbe Versuchsreihe schliesst sich für Temperaturen zwischen 0° C. und 260° C. sehr gut der Gleichung (13) an.[2]) Ich habe ferner vor sechs Jahren Versuche angestellt, bei denen zu-

1) Clausius, l. c. Gleichung (18), Vergleich 3.

2) Budde, l. c. p. 371: Das erste Glied der Reihe für δ enthält dort und in der Tabelle p. 369 einen Schreibfehler, es muss $23^1/_2$ statt $24^1/_2$ heissen; das Vergleichsergebniss wird dadurch nicht wesentlich gestört.

erst dE/dT für eine gegebene Löthstelle absolut gemessen, dann dieselbe Löthstelle in ein Bunsen'sches Eiscalorimeter gebracht und ihre Wärmeentwicklung unter dem Einfluss eines commutirbaren, absolut gemessenen Stromes J beobachtet wurde. Die Versuchsreihe wurde durch äussere Umstände unterbrochen, ehe ich sie meiner Absicht gemäss auf verschiedene Combinationen ausdehnen konnte, und ich habe sie deshalb nicht veröffentlicht. Mit einer Löthstelle Kupfer-Antimon konnte ich das Experiment bei günstigem Wetter vollständig durchführen, und es sei mir hier gestattet, das Schlussergebniss mitzutheilen: Die der Arbeit L entsprechende Wärmemenge ergab sich im Calorimeter zu 92 Proc. des von Gleichung (13) geforderten Werthes. Der Fehler von 8 Proc. fällt fast in die Fehlergrenze der damaligen absoluten Strombestimmung (vergl. die Unterschiede in der Bestimmung von einem Siemens/Ohmad und einem Daniell/Volt bei Kohlrausch, Lorenz, Bosscha u. a.), also sicher in die Fehler, welche Strommessung und Calorimeter zusammen erlauben.

Ich halte hiernach die Gleichung (13) für hinreichend durch die Erfahrung bestätigt.

Zweitens gehe der Strom J durch einen Draht A, dessen Enden die Temperaturen T_1 und T_2 haben. Steigt er von T_1 zu T_2, so ist die verbrauchte Arbeit gemäss Gleichung (5):

$$L = J \int_{T_1}^{T_2} T d\alpha . \tag{14}$$

Die Wärmetönung, welche dem entspricht, findet sich in den eingangs citirten Arbeiten von W. Thomson und Leroux. Die Gleichungen (13) und (14) enthalten zugleich die Formeln, welche W. Thomson aus der wärmetheoretischen Betrachtung der „specifischen Wärme der Electricität" abgeleitet hat.

Gleichung (14) gibt nun, wenn quantitative Bestimmungen von L gelingen, das Mittel, $\int T d\alpha$ zwischen den beliebig gewählten Grenzen T_1 und T_2 in dem Intervall T_0 bis T_n festzustellen, woraus dann in bekannter Weise $d\alpha/dT$, und damit die Gleichung für α sich ergibt. Bekanntlich fehlen

solche Messungen von L; nur das Resultat von Leroux: bei Blei ist kein L nachweisbar, stellt eine derartige Messung dar, und zwar vermuthlich mit erheblicher Annäherung an die Wahrheit, da ja der Werth Null einer Grösse sich leichter feststellen lässt, als jede andere. Demgemäss nehme ich für Blei $\pi = \text{const.}$ zwischen 0 und 300°, und mit dieser Annahme sind dann die Gleichungen (4) aus Gaugain's Beobachtungen thermoelectrischer Ströme berechnet. (Näheres siehe thermoelectrische Studien.) Der Fehler von π überträgt sich dabei auf alle weiteren Gleichungen; aber eben deshalb lässt er die aus diesen Gleichungen für die thermoelectrischen Ströme gezogenen Folgerungen unberührt, und die Gleichungen (4) stellen demgemäss das Verhalten der thermoelectrischen Elemente mit derselben Genauigkeit dar, womit sie aus den Versuchen über thermoelectrische Ströme berechnet sind. Die Gleichungen (4) und die entsprechenden Curven lassen sich also jederzeit mit einer der vorhandenen Beobachtung entsprechenden Genauigkeit aufstellen und verwenden, einerlei wie gross der Fehler der Annahme $\pi = \text{const.}$ sein mag. Erreichen die Messungen von L oder dem entsprechenden Potentialunterschied einmal grössere Genauigkeit, so kann man die Curven α danach corrigiren.

Wo zwei dieser Curven, z. B. $\varkappa$ und φ sich schneiden, da ist nach Gleichung (11) $dE/dT = 0$, also der neutrale Temperaturpunkt der Combination Cu-Fe, vergl. Fig. 1.

Die Curven und Gleichungen (4) bilden hiernach einen äusserst einfachen Ausdruck der Versuchsergebnisse; sie sind zugleich der rationellste Ausdruck derselben, weil sie das ganze Verhalten der Metalle auf Constanten α_0, α_1 u. s. w. reduciren, die von allen Factoren abgesondert sind. Die Aufgabe der thermoelectrischen Messungen ist damit auf die Bestimmung dieser Constanten zurückgeführt; doch glaube ich nicht, dass es jetzt schon angezeigt ist, die vorhandenen Erfahrungsergebnisse auf die Form der Gleichung (4) umzurechnen; ich halte die Ergebnisse mit Ausnahme derjenigen von Kohlrausch und Ammann dazu nicht für zuverlässig genug. Meine Fig. 1 soll nur als Beispiel betrachtet werden.

Es ist *a* priori wahrscheinlich, dass die Constanten in

den Formeln $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 T +$ u. s. w. mit steigender Ordnungsnummer rasch abnehmen, da alle analogen Molecular-Constanten (Compressionscoëfficienten, Wärmeleitung, electrische Leitungsfähigkeit u. s. w. u. s. w.) in ihrer Abhängigkeit von der bestimmenden Variabeln dasselbe Verhalten zeigen. Ist dem so, so kann man für mässige Temperaturgrenzen die Formeln mit zwei Gliedern abbrechen und $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 T$ schreiben Setzt man das in Gleichung (8) ein, so wird E offenbar eine parabolische Function von $T_2 - T_1$; die thermoelectrische Kraft eines Elementes bekommt die Form $E = \varepsilon_0 (T_2 - T_1) + \varepsilon_1 (T_2 - T_1)^2$. Das ist das Ergebniss von Avenarius[1]), welches neuerdings in England unnützer Weise als neues „Tait'sches Gesetz" proclamirt wurde, in Wirklichkeit aber schon 20 Jahre alt ist. Dasselbe findet hiernach seine einfache Erklärung und Würdigung: es ist für mässige Temperaturintervalle von vornherein sehr wahrscheinlich, für sehr grosse aber weder bewiesen noch wahrscheinlich; da dürften auch die höheren Coëfficienten α_2 u. s. w. in Wirksamkeit treten.

Alles Vorstehende vereinigt sich zu dem Nachweis, dass die Clausius'schen Grundlagen der Theorie alle bekannten Erscheinungen consequent umfassen und eine höchst einfache Tabellirung derselben gestatten. Die grundlegenden Gleichungen (1) und (5) stehen dabei explicite auf dem Boden der mechanischen Wärmetheorie.

§ 3. Kohlrausch's Theorie. Ich muss auch hier ein wenig über die vom Verfasser gegebenen Entwicklungen hinausgehen, weil die ganze Theorie hier wie in § 2 doch erst dann brauchbar wird, wenn man die Veränderlichkeit der Metall-„Constanten" mit der Temperatur berücksichtigt. Doch halte ich mich streng an die Kohlrausch'schen Grundlagen; die Kenntniss der betreffenden Abhandlung wird vorausgesetzt.

Kohlrausch geht zunächst von der Annahme aus: „Geht durch ein Flächenelement im Innern eines Leiters A

1) Avenarius, Pogg. Ann. **99.** p. 406. 1863, citirt nach Wied. Galv. I. p. 845.

eine Wärmemenge W, so führt sie eine proportionale Electricitätsmenge aW mit". [1]) Diese führt, wenn ds ein Längenelement eines Drahtes ist, auf eine Gleichung [2]), die in unserer Bezeichnung lautet:

$$\frac{dV}{ds} = -\vartheta \frac{dT}{ds} \tag{15}$$

und die für die ganze Erstreckung des homogenen Drahtes gilt. Hierin ist ϑ eine für die Drahtsubstanz charakteristische Grösse, welche sich später als Temperaturfunction ausweist.

Wir betrachten sie von vornherein als solche. Unsere frühere Gleichung (4) lässt sich entsprechend schreiben:

$$dV = T\frac{d\alpha}{dT}dT, \tag{4}$$

(15) und (4) werden identisch, wenn wir setzen:

$$-\vartheta = T\frac{d\alpha}{dT}, \tag{16}$$

eine Annahme, der nichts im Wege steht; ϑ und α sind beides Temperaturfunctionen des betreffenden Metalles, und jedes kann entsprechend (16) bestimmt werden. Dann geben beide Theorien gleichlautende Ergebnisse für die Potentialdifferenzen auf einem homogenen Draht von veränderlicher Temperatur.

Wir nehmen nun an, zwei Metalle A und B, in denen ϑ die Werthe ϑ_α und ϑ_β (beide mit der Temperatur variabel) besitzt, werden zum Thermoelement verbunden. Die eine Löthstelle sei wieder (1), die andere (2), und die entsprechenden Grössen ϑ werden oben mit einem und mit zwei Strichen markirt. Dann ist die electromotorische Kraft der Combination, gezählt wie in § 2:

$$E = -\int_{T_1}^{T_2} \vartheta_\alpha dT - \int_{T_2}^{T_1} \vartheta_\beta dT. \tag{17}$$

Die Löthstellen selbst kommen nicht in Betracht, und man sieht leicht, dass die Integrale die Potentialdifferenzen

1) Kohlrausch, l. c. p. 606 Gleichung (1).
2) Kohlrausch, l. c. p. 606 Gleichung (3).

auf den homogenen Drähten darstellen. Differentiirt man (17) nach T_2, so findet sich:

$$\frac{dE}{dT_2} = \vartheta''_\beta - \vartheta''_\alpha, \tag{18}$$

oder, da die Marken wieder fortgelassen werden können:

$$\frac{dE}{dT} = \vartheta_\beta - \vartheta_\alpha, \tag{19}$$

wo E und die ϑ auf die gleiche Temperatur T bezogen sind. Also auch hier eine höchst einfache Grundgleichung für das Thermoelement. Diese gestattet, ganz ähnlich, wie es in § 2 geschehen, sämmtliche Erfahrungsresultate über thermoelectrische Ströme auf tabellarische Feststellung der Constanten ϑ für die untersuchten Metalle zu reduciren, wenn ein einziges ϑ gegeben ist als Function von T.

Gl. (19) ist aber von der entsprechenden (8) der anderen Theorie wesentlich dadurch verschieden, dass in ihr die Löthstellen nicht in Rechnung kommen. Zur Controle können nun a) die Peltier'schen Wirkungen, b) der Vergleich des erzeugten Stromes mit den erzeugenden Potentialdifferenzen herangezogen werden. Letztere lassen sich zur Zeit nicht messen, wir halten uns also an die Peltier'schen Wirkungen.

Zur Erklärung des Peltier'schen Phänomens macht Kohlrausch die weitere Annahme: „Das Verhältniss zwischen Wärme- und Electricitätsbewegung ist reciprok; die bewegte Electricität führt auch die Wärme fort." Daraus berechnet er (Gl. (7_a)): Stossen zwei Drähte A und B von der Temperatur T zusammen, und geht der Strom J von A nach B, so scheidet er an der Contactstelle eine Wärmemenge Q aus; wir ersetzen unserer früheren Bezeichnung gemäss Q durch seinen Arbeitswerth L, dann ist bei passender Wahl der Verschiebungsrichtung:

$$L = CJ(\vartheta_\beta - \vartheta_\alpha). \tag{20}$$

C ist dabei eine von der Natur der Metalle unabhängige Grösse, bei unveränderlichem T eine Constante, sonst aber, wie wir sehen werden, eine Temperaturfunction.

Vergleichen wir (20) mit (19), so findet sich:

$$L = CJ\frac{dE}{dT}, \tag{21}$$

wo dE/dT die Zunahme der scheinbaren thermoelectrischen Kraft der Löthstelle mit der Temperatur bezeichnet. Neben (21) stellen wir (13):

$$L = JT\frac{dE}{dT}, \tag{13}$$

in der sich dE/dT von dem vorigen nicht unterscheidet. Der Vergleich zeigt, dass beide in Uebereinstimmung gebracht werden können, wenn:

$$C = T \tag{22}$$

gesetzt wird. Diese Annahme ist erlaubt, denn sie widerspricht nicht dem, was von vornherein über die Natur von C festgestellt war, und sie ist nöthig, denn sonst geräth die Theorie II mit der mechanischen Wärmetheorie in Conflict. Wir machen sie also und haben dann für (20) die bestimmtere Form:

$$L = JT(\vartheta_\beta - \vartheta_\alpha). \tag{23}$$

So liefert die zweite Theorie für das Peltier'sche Phänomen an Löthstellen dieselben Ergebnisse wie die erste.

Wir betrachten nun die entsprechende Wärmeerzeugung in einem homogenen Drahte von veränderlicher Temperatur. Kohlrausch berechnet die Wärmetönung an der Stelle s, wo zwei Elemente mit den Temperaturen T und $T+dT$ aneinander stossen, indem er einfach auf Gl. (15) das Princip der Erhaltung der Energie anwendet; es folgt dann aus:

$$dV = -\vartheta\, dT, \tag{15}$$

bei passender Stromrichtung:

$$dL = -JdV = J\vartheta\, dT, \tag{24}$$

was mit Kohlrausch's Gl. (9) übereinstimmt. Dieses Verfahren ist aber nicht ohne weiteres statthaft. Stützt man nämlich die Theorie der Peltier'schen Wirkung auf die besondere Grundannahme, „dass die strömende Electricität Wärme mit fortführt", so muss auch die Behandlung der Wärmetönung im ungleich temperirten Draht auf dieselbe Grundannahme gestützt werden, und wenn man statt dessen die Gl. (15) und das Princip der Erhaltung der Energie substituirt, so muss man erst den Nachweis führen, dass jene Grundannahme sich mit diesen beiden Sätzen verträgt. Wir untersuchen nun, ob das der Fall ist. Ein Element ds

des Drahtes s habe die Temperatur T, das benachbarte, zu dem der Strom hingeht, habe $T + dT$. Verschiebt nun der Strom J die Wärme im homogenen Draht A, so thut er es auch im homogenen Drahtelemente ds, und zwar nach dem gleichen Gesetz, also nach Gl. (23). Die beiden Elemente an der betrachteten Stelle besitzen nun wegen der ungleichen Temperatur ungleiche Werthe von ϑ, in einem herrscht ϑ, im anderen $\vartheta + (d\vartheta/dT)\,dT$ oder kürzer $\vartheta + d\vartheta$. In Gl. (23) sind also für ϑ_β und ϑ_α die Werthe $\vartheta + d\vartheta$ und ϑ zu substituiren, um die Arbeit zu erhalten, welche in Form von Wärme an der Berührungsstelle der beiden ds verbraucht wird. Das gibt:

(25) $$dL = JT\,d\vartheta$$

und die entsprechende Integralgleichung:

$$L_{1-2} = J\int_{T_1}^{T_2} T\,d\vartheta.$$

Gl. (25) ist nun von (24) durchaus verschieden, $T\,d\vartheta$ ist etwas anderes als $\vartheta\,dT$, also verträgt sich die zweite Grundannahme von Kohlrausch nicht mit dem, was aus der ersten und aus dem Princip der Erhaltung der Energie hervorgeht. Also ist die Theorie nicht ohne weitere berichtigende Annahmen brauchbar.

Nun könnte man freilich, um sie aufrecht zu erhalten, die weitere Annahme machen, es sei wirklich $T\,d\vartheta = \vartheta\,dT$, und a priori lässt sich diese Annahme nicht unbedingt ausschliessen. Sie bildet eine Differentialgleichung, deren Integral lautet:

(26) $$\vartheta = -\,c\,T,$$

wo $-c$ nunmehr eine absolute Constante des Metalles darstellt, nicht mehr eine Temperaturfunction. Was die Gleichung bedeutet, übersehen wir am einfachsten, wenn wir sie in die Sprache des § 2 übersetzen. Wegen $\vartheta = -\,T(d\alpha/dT)$ heisst sie da:

(27) $$\frac{d\alpha}{dT} = c, \quad \text{also} \quad \alpha = c\,T + c_0,$$

wo c_0 eine zweite Constante. Nach dem Früheren bedeutet dies, dass das Gesetz von Avenarius für beliebige Tem-

peraturgrenzen streng gültig sein muss. Unter dieser Bedingung also lässt sich die Theorie von Kohlrausch halten und liefert dann in allen Punkten dieselben Ergebnisse wie die von Clausius. Aber die letztere hat ihr gegenüber dann den grossen Vorzug dass sie von jener Bedingung unabhängig, also viel allgemeiner ist. Die Erfahrung reicht nicht aus zur Entscheidung, ob das Avenarius'sche Gesetz, „α lässt sich für jedes Metall durch eine zweigliedrige Formel ausdrücken", für streng zu nehmen sei, aber sie reicht aus, um es höchst unwahrscheinlich zu machen; denn bei grosser Erwärmung oder starker Erkältung gehen bekanntlich manche Metalle in andere Modificationen über, Eisen z. B. bei schwacher Glühhitze (vgl. die von Tait beobachteten Abkühlungserscheinungen des Eisens). Da wird nun wohl niemand vermuthen, dass die Grössen c und c_0 während der Modification constant bleiben. Die allmähliche Structuränderung, welche die Metalle bei Temperaturerhöhungen erleiden, ist aber nichts anderes, als langsames Uebergehen in eine neue Modification, also ist es allgemein wahrscheinlich, dass auch c_0 und c Temperaturfunctionen sind, mit anderen Worten, dass Gl. (27) und (26) nur angenäherte Geltung haben. Wären die c im einzelnen Metall durch alle Modificationen hin constant, so wäre auch kein Grund vorhanden, weshalb sie von einem Metall zum anderen verschiedene Werthe haben sollten, und dann fiele die ganze Thermoelectricität fort. Es scheint demnach höchst gewagt, die Annahme $d\alpha = c dT$ wirklich zu machen.

Aber selbst wenn man sie zugibt, bleibt nun noch ein schwerer Einwurf gegen die zweite Grundannahme von Kohlrausch: „die strömende Electricität führt Wärme mit fort" übrig; vom Standpunkt der mechanischen Wärmetheorie angesehen, wird sie nämlich im wichtigsten Specialfalle widersinnig. Im Punkte x mögen zwei Drähte A und B zusammenstossen, durch welche der Strom J geht. In x tritt das Peltier'sche Phänomen auch dann ein, wenn der Draht A auf der Strecke xy auf der constanten Temperatur T gehalten wird. Die obige Grundannahme verlangt dann, dass auch in dieser Strecke xy die Wärme in Strömung sei; denn sonst

könnte die Wärmetönung in x nicht zum Vorschein kommen. Kohlrausch macht nun darauf aufmerksam, dass diese Wärmeströmung in der Strecke xy keine Wirkung äussern könne; ich glaube, das genügt nicht: sie kann nicht blos keine Wirkung äussern, sondern sie ist überhaupt undenkbar. Wäre die Wärme eine Substanz, so hätte ihre Strömung unter allen Umständen einen Sinn. Ist sie aber Energie, so heisst der Satz: „die Wärme strömt in einem homogenen Körper von einer Stelle zu einer anderen, die gleiche Temperatur hat" durchaus nichts mehr.

Es können dann wohl Differenzen der Wärmevertheilung sich ausgleichen, aber wo keine Differenzen sind, ist auch nichts da, dem man die Strömung zuschreiben könnte. Man versuche nur, sich den Strömungsprocess vorzustellen, da sieht man sofort, dass das nicht angeht. Derselbe Einwurf trifft die Wärmeströmung im einzelnen Element ds des ungleich temperirten Drahtes. Stossen in x zwei Elemente ds_1 und ds_2 mit den Wärmeinhalten q_1 und $q_2 = q_1 + dq$ zusammen, so kann wohl die Differenz dq auf ds_1 übergehen, aber die Annahme, dass die ganze Wärmemenge $q + dq$ in Verschiebung von ds_2 nach ds_1 begriffen sei, heisst wieder nichts.

Man entgeht diesem Widersinn nur dadurch, dass man die Beziehung zwischen Wärme und Electricität, der das Peltier'sche Phänomen seinen Ursprung verdankt, an der Stelle sucht, wo die Peltier'sche Wärmetönung wirklich auftritt, also an den Contactstellen x. Dann ist aber auch an diesen Stellen die arbeitende Potentialdifferenz vorhanden, d. h. dann ist die Grundannahme von Clausius richtig.

Die erste Grundannahme von Kohlrausch enthält an sich nichts Widersinniges. Wählt man, um sie in Worte zu fassen, statt der Kohlrausch'schen Gleichung (1) seine Gleichung (3), so lässt sie sich aussprechen: „Die Temperaturdifferenz dT zweier Drahtelemente ruft an ihnen den Potentialunterschied $dV = -\vartheta dT$ hervor, und dann stimmt sie mit Clausius Grundannahme in Form der Gleichung (5). Aber man muss dann, wie oben gesagt, ausser der Wirkung im homogenen Draht auch noch die Wirkung an Contact-

stellen annehmen und berücksichtigen. Thut man das, so ist man vollständig auf dem Boden der Clausius'schen Theorie.

Nach allem Vorstehenden glaube ich, dass die letztere die einzig berechtigte ist, und dass die von Kohlrausch befürwortete Theorie fallen zu lassen ist.

§ 4. Man hat nun der Theorie, welche die thermoelectromotorischen Erscheinungen als Contactphänomene ansieht, den Vorwurf gemacht, sie lasse sich nicht leicht auf bestimmte Vorstellungen zurückführen. Abgesehen davon, dass die Kohlrausch'sche Fassung der Grundannahmen sich in dem Punkte noch viel schwieriger zeigen würde, ist der Vorwurf nicht begründet. Die Vorstellungen, auf welche sich unsere Grundannahme bauen lässt, sind schon vorhanden und verbreitet. W. Weber hat die Hypothese aufgestellt, die Electricität (ich schreibe jetzt abkürzend „die E") sei in den Leitern erster Classe in Form von Punktpaaren vorhanden, von denen die einen, etwa die +E-Theilchen, mit den ponderablen Körpermolecülen in fester Verbindung stehen, die anderen, die −E-Theilchen, drehende und schwingende Bewegungen um jene als Anziehungsmittelpunkte ausführen. Weber schreibt den E-Punkten eine kleine, aber endliche Masse zu.

(Anmerkung. Weber's Hypothese steht ganz auf dem Boden der alten Symmer'schen Theorie, welche die Electricität als eine Substanz auffasst. Man kann geneigt sein oder wenigstens für möglich halten, zu glauben, dass die „electrischen Substanzen" nur eine bildliche Darstellung, gewissermassen Rechenpfennige für eine unbekannte Wirklichkeit sind. Aber das Bild deckt dann die Wirklichkeit so ausgezeichnet, dass man annehmen darf, jeder Zug desselben entspreche einem wirklich vorhandenen, auch wenn es eben nur ein Bild ist. Betrachtungen, wie die folgende, behalten einen Sinn auch dann, wenn man die Weber'sche Hypothese nur als provisorischen Ausdruck der Thatsachen ansieht.)

Die −E-Punkte besitzen, da sie in Bewegung sind, eine gewisse lebendige Kraft, und diese ist nach Weber die Wärme des Körpers. Letztere Annahme verträgt eine kleine, erweiternde Modification, durch die die ganze Hypothese an Wahrscheinlichkeit gewinnt. Ist 1) die Auffassung

der Wärme als Bewegung, 2) Weber's moleculare Structur der Electricität richtig, so ist von vornherein klar, dass in dem warmen Leiter A sowohl die ponderablen Molecüle, als auch die E-Punkte in Bewegung sein müssen. Denn Bewegungen des einen ziehen Bewegungen des anderen nach sich, da ja zwischen ihnen endliche Kräfte bestehen, Kräfte die sogar wahrscheinlich im Vergleich zur Masse der ponderablen Molecüle erheblich sind. Man kann also allgemein den ponderablen Molecülen eine mittlere lebendige Kraft U, und den E-Punkten eine mittlere lebendige Kraft u zuschreiben, wo das Verhältniss u/U von den Massen, von der Art der Verknüpfung, vom Aggregatzustand, den Schwingungsamplituden, von der Natur des Anziehungsgesetzes zwischen ponderablen Molecülen und E, und wenn dies Anziehungsgesetz die Geschwindigkeiten enthält, von der Geschwindigkeit der vorhandenen Bewegungen abhängt. u/U wird also bei einer bestimmten Temperatur einen bestimmten Werth haben. Setzt man es verschwindend klein, was bei grosser Amplitude der Molecülbewegungen das Wahrscheinlichste ist, so hat man die Grundlage der Clausius'schen Gastheorie. Gibt man ihm einen grösseren Werth, so ist $u + U$ die Gesammtwärme des Körpers A. Geht dann ein galvanischer Strom durch A, so treibt derselbe die $-$E-Punkte nach einer Richtung. Es reissen sich also einzelne $-$E-Theilchen von ihrem positiven Paarling los und gehen zu anderen $+$E-Punkten über. Bei diesen langen sie, weil sie unterwegs der Arbeit des Stromgefälles ausgesetzt waren, mit vermehrter Geschwindigkeit an, besitzen also in der zweiten Stellung eine erhöhte lebendige Kraft, von der sich nach dem Obigen ein dem Verhältniss U/u entsprechender Antheil auf die ponderablen Molecüle überträgt. So kommt die Joule'sche Erwärmung zu Stande.

Die ganze Vorstellung unterliegt nun ohne weiteres der Betrachtung, mit deren Hülfe Clausius die Vorgänge in Electrolyten klar gemacht hat: die kleinste electromotorische Kraft bringt im Leiter A einen dem Ohm'schen Gesetz entsprechenden Strom hervor. Daraus folgt, dass sie nicht erst nöthig hat, die Punktpaare $+$E und $-$E auseinander zu

reissen; diese müssen vielmehr auch im neutralen Leiter A schon in theilweiser Dissociation begriffen sein. Es kommt bei ihren Bewegungen öfter vor, dass ein $-$E-Theilchen die Anziehungssphäre seines positiven Paarlinges verlässt, sich nach irgend einer Richtung von ihm entfernt und nach einiger Zeit mit einem anderen Paarling $+$E associirt wird. Derartige Wanderungen der $-$E finden im neutralen Leiter gleichmässig nach allen Richtungen statt; im durchströmten haben sie nach einer Richtung einen Ueberschuss. Die $+$E und $-$E sind eben die „Jonen" im Leiter erster Classe, nur dass die $+$E durch die grosse Masse der ihnen angehefteten ponderablen Molecüle auf kleinere Bewegungen beschränkt sind.

Sind demnach fremde Kräfte ausgeschlossen, und ist f eine Fläche im Leiter A, so treten durch diese Fläche, wenn eine Seite derselben die rechte genannt wird, in der Zeiteinheit eben so viele $-$E-Punkte nach rechts wie nach links, ein Theil davon zu dauernder Entfernung. In erster Annäherung kann dies so aufgefasst werden, als ginge quer durch f ein Strom von $-$E-Punkten, der in der Secunde afT negative Punkte nach rechts wirft, wo a ein dem Körper A eigenthümlicher Coëfficient, der selbst eine Temperaturfunction ist, und ein zweiter Strom von gleicher Stärke ginge nach links. (Ist a eine Temperaturfunction, so ist auch aT eine solche, man könnte also statt $aT.f$ auch $\mathfrak{a}f$ schreiben, wo $\mathfrak{a}$ eine neue Temperaturfunction; aber es wird sich gleich zeigen, dass die Zahl der durch f strömenden $-$E-Punkte ein Maass für die thermoelectromotorische Arbeitsfähigkeit der Wärme abgibt; dann enthält sie nach dem zweiten Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie den Factor T, ich ziehe es daher vor, diesen explicite mitzuführen und $\mathfrak{a}$ in die beiden Factoren a und T zu spalten.) Ganz dasselbe findet in einem zweiten Körper B statt; dort gehen durch jede Fläche f zwei Ströme von $-$E-Punkten, welche in der Zeiteinheit bfT Punkte nach beiden Seiten schaffen, wenn b eine dem Körper B zukommende Temperaturfunction ist.

Es sei nun aber f eine Fläche, in der die beiden Körper A und B aneinander stossen, wobei B nach rechts von A liegen möge. Dann wirft A nach rechts, also nach B

hinein, in der Secunde afT negative Punkte, B dagegen nach A eine andere Anzahl bfT. Im ganzen gelangt nach B die Anzahl $f(a-b)T$ von $-$E-Punkten mehr als nach A. Es besteht also in f die Tendenz, in der Secunde ein Quantum von Electricität nach B zu schaffen, welches, wenn wir jedem $-$E-Punkt die Quantität $-q$ beilegen, den Werth $f(b-a)qT$ hat.

Man könnte annehmen, die Dissociationsvorgänge im Körper A erlitten durch die Annäherung von B eine Störung, und umgekehrt, sodass die Grössen a und b in der Nähe der Grenzfläche nicht dieselben Werthe hätten, wie im Innern der Leiter. Aber wenn dem so ist, so ist die Störung reciprok, und wird der von A kommende Strom nach rechts um einen Betrag δ geschwächt, so erleidet der von B nach links gehende Strom dieselbe Schwächung; ihre Differenz bleibt also ungeändert; a und b können bei unveränderlicher Temperatur als constant, auch in der Nähe der Grenzfläche, angesehen werden.

Ist nun keine andere Einwirkung gegeben, so entsteht durch den beschriebenen Vorgang zwischen A und B eine Potentialdifferenz ΔV; diese treibt die überschüssigen $-$E-punkte zurück und wirkt dem Process entgegen. Die Quantität von Electricität, welche durch ΔV in der Zeiteinheit durch f getrieben werden kann, ist offenbar mit ΔV proportional, also $\varkappa\Delta V$, wo $\varkappa$ eine Constante. Somit tritt stationärer Austausch in f ein, das Hinüberwandern der Electricität wird aufgehoben, wenn:

$$\varkappa\Delta V = f(b-a)qT$$

wird, d. h. der Potentialunterschied, welcher durch die Vorgänge in f entsteht, ist:

$$\Delta V = \frac{b-a}{\varkappa} qT.$$

Man kann nun $aq/\varkappa$ und $bq/\varkappa$ in zwei Grössen α und β zusammenziehen, welche Temperaturfunctionen (charakteristische Coëfficienten) der beiden Metalle sind. Dann ist:

$$\Delta V = (\beta - \alpha)\,T,$$

d. i. § 2 (2); die Grössen α, β sind mit denen der Clausius'schen Theorie identisch. Diese sind demnach wesentlich „Dissociationscoëfficienten" der E-Punkte.

Dieselbe Betrachtung gilt, wenn man für A und B zwei aneinanderstossende Elemente ds eines homogenen Drahtes substituirt, welche die Temperatur T und $T + dT$ haben. In diesen hat a die Werthe a und $a + (da/dT)\,dT$ oder kürzer a und $a + da$. Also gehen durch die Trennungsfläche f in der Secunde faT negative Punkte nach der einen, $f(a + da)\,T$ nach der anderen Seite. Dem entsprechend stellt sich zwischen den beiden ds der Potentialunterschied:

$$dV = \frac{da}{\varkappa} q\,T = T\,da$$

her, ganz entsprechend § 2, Gl. (5).

Bis hierher ist die Voraussetzung festgehalten, dass nur die negativen E-Punkte im Leiter beweglich sind. Die Betrachtung gilt aber auch dann noch, wenn wir statt dessen folgende viel allgemeinere Annahme einführen: „In jedem Leiter ist sowohl + E wie − E beweglich, aber nicht nothwendig beide in gleichem Grade. In Metallen z. B. kann man sich denken, dass ein Theil der + E-Punkte und ein Theil der − E-Punkte an den paralellen Molecülen befestigt, und dass ein anderer Theil der + E-Punkte und der − E-punkte beweglich sei. Für einen bestimmten Körper bei einer bestimmten Temperatur, besteht ein festes Verhältniss zwischen der mittleren Zahl der beweglichen + E- und der beweglichen − E-Punkte; dasselbe kann aber mit der Temperatur variiren, und von einem Körper zum anderen verschiedene Werthe haben." Der oben beschriebene Dissociationsvorgang lässt sich dann so an: durch die Fläche f im Innern des Körpers A geht 1) ein Doppelstrom von + E, der in der Secunde $a_1 fT$ Theilchen nach rechts und eben so viele nach links wirft; 2) geht durch sie ein Doppelstrom von − E, der in der Secunde $a_2 fT$ Theilchen von − E nach rechts und eben so viele nach links wirft. Die beiden nach rechts gehenden Ströme sind zusammengenommen äquivalent einem einzigen, der in der Secunde $(a_1 - a_2) fT$ Theilchen von + E nach rechts wirft. Entsprechend sind die beiden nach links gerichteten Ströme äquivalent einem einzigen von der Intensität $(a_1 - a_2) fT$. In einem zweiten Körper B existiren die entsprechenden Ströme von der Intensität $(b_1 - b_2) fT$.

Die ganze Reduction bleibt also bestehen, es treten nur die Differenzen $(a_2 - a_1)$ und $(b_2 - b_1)$ an die Stelle von a und b, und sobald $a_2 - a_1$ nicht constant gleich $b_2 - b_1$ ist, muss die thermoelectrische Wirkung zwischen A und B auftreten. Man sieht leicht, dass die früher behandelte Annahme, nur die $-E$ sei beweglich, der Specialfall $a_1 = b_1 = 0$ dieser allgemeineren Annahme ist.

Diese Betrachtung gilt nun auch, wenn man sich alle $\pm$E-Punkte an bewegliche ponderable Atome angeheftet denkt, sobald nur das negative Ion eine andere Masse hat als das positive. Die Theorie weist demnach hier auf einen Zusammenhang zwischen der thermoelectrischen Charakteristik a eines Electrolyten und der Wanderung der Ionen in demselben Electrolyten hin. Doch fehlt es an Erfahrungen, die ein näheres Eingehen auf diesen Zusammenhang an dieser Stelle wünschenswerth machen.

Aus der Herstellung der Potentialdifferenzen zu beiden Seiten der Trennungsfläche f folgt nach den allgemeinen Principien die Herstellung des Stromes, wenn das Thermoelement AB geschlossen wird und seine Löthstellen ungleiche Temperatur haben.

Es bedarf keines besonderen Hinweises, dass die Fortschleuderung der $-$E-Punkte eine Arbeit der Wärme ist, dass also eine ihr entsprechende Wärmemenge verschwinden muss, die bei stationärem Strom als Phänomen von Peltier, W. Thomson und Leroux bemerkbar wird.

Unsere ganze Betrachtung ist unabhängig von der Frage, ob ausser der Wärme noch andere Ursachen vorhanden sind, welche die Electricität in f von A nach B oder umgekehrt zu treiben streben. Erzeugt in f die Wärme den Potentialunterschied ΔV und irgend eine andere Ursache den Unterschied ΔU, so superponiren sich beide, und beim Volta'schen Versuch beobachten wir ihre algebraische Summe $\Delta V + \Delta U$. Nun ist es freilich wahr, dass man auf erhebliche Schwierigkeiten stösst, wenn man diese Summe schlechtweg der Kirchhoff'schen Theorie des galvanischen Stromes als das Bestimmende an Metallcontacten einfügt; es widersprechen sich da sowohl manche Erfahrungen, wie einige

theoretische Betrachtungen. Hier ist nicht der Ort, den Kern der Schwierigkeit darzulegen; aber das sieht man ohne weiteres: die Widersprüche treffen nicht den Theil ΔV der Volta'schen Potentialdifferenz, sondern den anderen ΔU. Jener ist so kein, dass die Erfahrung ihn direct kaum wahrnehmen würde; er spielt in der Theorie eine vollkommen klare Rolle, und das thermische Aequivalent seiner Arbeit wird im Peltier'schen Phänomen bestimmt und quantitativ richtig beobachtet. ΔU ist unsicher, was Existenz, Grösse und Arbeit in reinen, nicht oxydirten Metallen angeht. ΔV misst hiernach nicht die Volta'sche Contactkraft zwischen Metallen, sondern einen sicher gestellten Bestandtheil derselben; wie es um ΔU bestellt ist, das muss erforscht werden, wenn man über die ganze Contactkraft eine sichere Ansicht haben will.

Noch ist zu bemerken, dass ΔU, wenn es in merklicher Grösse existirt, möglicherweise auch eine Temperaturfunction ist, da ja alle charakteristischen Coëfficienten der Metalle von der Temperatur abhängen. Dann kann auch ΔU am warmen Ende eines Drahtes einen anderen Werth haben, als am kalten, und wenn man an einem ungleich temperirten Draht die vorhandenen Potentialdifferenzen direct electrostatisch beobachtet, so hat man keineswegs die Sicherheit, dass dieselben wirklich blos eine Arbeit der Wärme sind; sie können auch eine Arbeit fremder Kräfte sein, welche nur indirect durch die Wärme modificirt werden.

V. *Ueber Electrostriction; von H. Lorberg.*

§ 1. Einleitung.

Die von Quincke über die electrische Ausdehnung von kugelförmigen und cylindrischen Glascondensatoren angestellten, sehr umfangreichen Beobachtungen[1]) sind von Quincke selbst und von Boltzmann mit der Theorie verglichen worden; indessen stimmt die Rechnung durchaus nicht mit den

1) Quincke, Wied. Ann. **10.** p. 161. 1880; **19.** p. 545. 1883.

Beobachtungen überein; die von Quincke aufgestellte Formel gibt in den meisten Fällen das Doppelte bis Dreifache, die Boltzmann'sche in dem einzigen von ihm berechneten Beispiel das Doppelte, in den Fällen, in denen ich nach derselben die Rechnung ausgeführt habe, das Drei- bis Siebenfache des beobachteten Werthes, je nach dem Werth, welchen man den nur sehr unsicher bekannten elastischen Constanten des Glases beilegt. Obwohl nun die Beobachtungen zu einer genauen Vergleichung mit der Theorie wohl kaum geeignet sind, einestheils wegen der bei diesen höchst schwierigen Untersuchungen sehr bedeutenden Fehlerquellen der Beobachtungen selbst, welche in ihrer mangelhaften Uebereinstimmung unverkennbar zu Tage treten, anderentheils wegen der nur höchst unsicher bestimmten Werthe mehrerer in die Berechnung eingehender Constanten: so genügen diese Umstände doch nicht, um Abweichungen von solchem Betrage zu erklären, und man könnte versucht sein, daraus einen Schluss auf die Unrichtigkeit der von Korteweg und v. Helmholtz aufgestellten Theorie der Electrostriction zu ziehen, wenn die der Berechnung zu Grunde gelegten Formeln als einwurfsfreie Consequenzen jener Theorie betrachtet werden könnten. Das ist indessen keineswegs der Fall.

Was zunächst die von Quincke aufgestellten Formeln für cylindrische und kugelförmige Condensatoren [1]) betrifft, so identificirt Quincke die Constante K in dem Ausdruck:

$$\frac{K}{8\pi} R^2,$$

welcher die parallel der resultirenden electrischen Kraft R auf die Flächeneinheit wirkende electrische Zugkraft angibt, nach Maxwell einfach mit der Dielectricitätsconstante [2]), was nach der oben erwähnten Theorie nicht allgemein zulässig ist; wenn er daher die mit diesem Werth von K berechnete Volumenänderung von der beobachteten abweichend findet, so beweist das nichts gegen die Richtigkeit der Theorie. Ferner nimmt er blos einen auf die Oberfläche des Dielectricums wirkenden electrischen Druck an und ver-

1) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 570 u. p. 574. 1883.
2) Quincke, l. c. p. 569.

nachlässigt die veränderlichen electrischen Druckkräfte im Inneren, womit es zusammenhängt, dass er den auf die den Kraftlinien parallelen Flächenelemente wirkenden Druck nicht berücksichtigt. Ferner ist die von ihm der Berechnung für Cylindercondensatoren zu Grunde gelegte Lamé'sche Formel auf den vorliegenden Fall nicht ohne Modification anwendbar. Lamé[1]) betrachtet nämlich einen an den Enden durch beliebig gekrümmte Flächen geschlossenen Hohlcylinder von dem inneren und äusseren Radius r_1 und r_2, auf welchen innen und aussen gleichförmige normale Druckkräfte, p_1 und p_2 wirken; dabei resultirt dann aus der der Axe parallelen Druckcomponente $\pi r_1^2 p_1 - \pi r_2^2 p_2$ ein auf die Flächeneinheit des ringförmigen Querschnittes der Röhrensubstanz wirkender axialer Zug:

$$F = \frac{\pi r_1^2 p_1 - \pi r_2^2 p_2}{\pi (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Dieser Ausdruck für den axialen Zug gilt aber in dem vorliegenden Falle offenbar nicht; dies ergibt sich auch schon daraus, dass bei dem vorliegenden Problem die electrischen Druckkräfte die Form:

$$p_1 = \frac{a}{r_1^2}, \qquad p_2 = \frac{a}{r_2^2}$$

haben, woraus $F = 0$ folgt; danach aber ergeben die Lamé'schen Formeln für die lineare Dilatation nach der Axe den Werth 0, während doch Quincke's eigene Beobachtungen dieselbe ungefähr $= \frac{1}{3}$ der Volumendilatation ergeben. Schliesslich ist auch Quincke's Annahme, dass für Glas — d. h. für die von ihm benutzten Gefässe — das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation $= \frac{1}{4}$ sei, durchaus unsicher und wird durch seine eigenen Versuche über die durch Druckänderung hervorgebrachte Volumenänderung von Hohlkugeln widerlegt.

Was die von Boltzmann für cylindrische und kugelförmige Condensatoren aufgestellten Formeln anlangt, so beruhen dieselben auf einem Ausdruck für die electrische Zugkraft — und zwar für die den Kraftlinien parallele, da ein Druck senkrecht gegen die Kraftlinien nach ihm nicht

1) Lamé, Elasticité des corps solides, p. 190.

existirt — welcher von dem von v. Helmholtz nach Maxwell aufgestellten Ausdruck vollständig verschieden ist, nämlich[1]):

$$\text{(a)} \qquad p = \vartheta(1+2\pi\vartheta)R^2 = \vartheta(1+2\pi\vartheta)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \cdots\right],$$

wo R die resultirende electrische Kraft, ϑ die durch die Gleichung:

$$\lambda = -\vartheta\frac{d\varphi}{dx}$$

definirte Dielectrisirungsconstante bezeichnet; dabei sind λ, μ, ν die Componenten des dielectrischen Momentes der Volumeneinheit, $\varphi = V + U$ das Potential der ganzen freien Electricität, U das dielectrische Potential, also:

$$U = \int\left(\lambda'\frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + \cdots\right)d\tau' = -\int\left(\frac{d\lambda'}{dx'} + \cdots\right)\frac{d\tau'}{r} - \int[\lambda'\cos(N'x) + \ldots]\frac{d\sigma'}{r}$$

$$= \vartheta\int\frac{\Delta\varphi'}{r}d\tau' + \vartheta\int\frac{d\varphi'}{dN'}\frac{d\sigma'}{r} = \vartheta\int\frac{d\varphi'}{dN'}\frac{d\sigma'}{r},$$

wenn im Inneren des Dielectricums ausser der dielectrischen Vertheilung keine freie Electricität vorhanden, also $\Delta\varphi = 0$ ist.

Boltzmann's Ableitung des Ausdruckes (a) lässt sich kurz folgendermassen darstellen. Ist m das resultirende dielectrische Moment der Volumeneinheit, so sind zwei auf den Kraftlinien senkrechte benachbarte Flächenelemente a und b mit den electrischen Dichtigkeiten $+m$ und $-m$ belegt, und auf ein electrisches Theilchen ε der Fläche a wirkt der zunächstliegende Theil der Fläche b, den man als eine unendliche Ebene betrachten kann, in der Richtung der Kraftlinien, d. h. von a nach b, mit der Kraft $2\pi m\varepsilon$, der umgebende Theil der Fläche a mit der Kraft o, während die Kräfte der entfernteren Theile der Flächen a und b sich gegenseitig aufheben. Daraus resultirt auf die Flächeneinheit von a die Kraft $2\pi m^2$ nach der Richtung der Kraftlinien, während der von der resultirenden Kraft R der ganzen „Oberflächenelectricität" ausgehende Druck nach derselben Richtung $= mR$ ist; dies gibt:

$$p = 2\pi m^2 + mR = 2\pi\vartheta^2R^2 + \vartheta R^2 = \vartheta(1+2\pi\vartheta)R^2$$

1) Boltzmann, Wien. Ber. 2. Separatabdruck. 1880. p. 9.

wie in (a). Hierbei scheint mir aber übersehen zu sein, dass nach dem obigen Ausdruck für $U R$ die ganze electrische Kraft bedeutet, dass also das erste Glied des obigen Ausdruckes von p schon in dem zweiten enthalten ist und also wegfallen muss. Auch müsste, wenn die Kraft p den Charakter einer elastischen Zugkraft, d. h. einer von dem auf der einen Seite der Fläche a liegenden Theil des Körpers herrührenden Kraft haben sollte, wie Boltzmann (p. 9) behauptet, die von dem auf der anderen Seite liegenden Theil herrührende Kraft $= -p = -2\pi m^2 - mR$ sein, während dieselbe doch $= -2\pi m^2 + mR$ ist. Ausserdem genügt die Boltzmann'sche Formel dem Princip nicht, dass die bei elastischen Verschiebungen des Dielectricums gegen die electrischen Kräfte geleistete Arbeit gleich dem Zuwachs der potentiellen Energie der electrischen Vertheilung ist: ein Princip, welches an sich durchaus plausibel ist, und welches sich auch in der von Korteweg angegebenen Weise begründen lässt. Ferner führt die Boltzmann'sche Betrachtungsweise für die an der Oberfläche des Dielectricums wirkenden Kräfte auf ganz andere Ausdrücke, als für die im Inneren wirkenden[1]): eine Discontinuität innerhalb des Dielectricums, welche an sich höchst unwahrscheinlich ist, und durch welche namentlich die nach Maxwell stattfindende und auch von Boltzmann behauptete Analogie der electrischen Druckkräfte mit elastischen Kräften verloren geht.

Ausdrücke für die electrischen Druckkräfte, welche diesen Bedenken nicht unterliegen, sind von Korteweg[2]) und v. Helmholtz[3]) abgeleitet worden. Dieselben unterscheiden sich dadurch voneinander, dass v. Helmholtz nur eine, Korteweg zwei Constanten einführt; mit einer naheliegenden Verallgemeinerung aber führt die Theorie von v. Helmholtz im allgemeinen Falle genau zu demselben Ausdruck, welcher sich aus dem Korteweg'schen Ausdruck für die an einer deformirten Kugelschale geleistete Arbeit[4])

1) Boltzmann, l. c. p. 11 u. 12.
2) Korteweg, Wied. Ann. **9**. p. 48. 1880.
3) v. Helmholtz, Wied. Ann. **13**. p. 385. 1881.
4) Korteweg, l. c. p. 55.

ergibt. Dagegen stimmen die von Korteweg für den allgemeinen Fall aufgestellten Ausdrücke (die Werthe von p_1 und p_2 p. 52 und 53) hiermit nicht überein, da sie sich nur auf den fingirten Fall eines isolirten dielectrischen Molecüls beziehen, wobei die Wirkung des übrigen Dielectricums nicht berücksichtigt ist.

Hiernach dürfte es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, wenn ich vor näherem Eingehen auf die Quincke'schen Beobachtungen zuerst die nach Korteweg verallgemeinerten Ausdrücke für die in einem Dielectricum wirkenden electrischen Druckkräfte nach der von v. Helmholtz angewandten allgemeinen Methode ableite.

§ 2. Ableitung des Ausdruckes für die in einem Dielectricum wirkenden Druckkräfte nach v. Helmholtz und Korteweg.

Es seien ε, ε_1 und $\varepsilon_0 = \varepsilon + \varepsilon_1$ die Raumdichtigkeiten der von aussen zugeleiteten, der durch die dielectrische Polarisation erzeugten und der ganzen freien Electricität; e, e_1 und $e_0 = e + e_1$ die entsprechenden Flächendichtigkeiten auf einer Discontinuitätsfläche, d. h. der Trennungsfläche zweier verschiedener Dielectrica oder eines Dielectricums und eines Leiters; N die in das erste Medium hinein gerichtete Normale einer solchen Fläche, a, b, c ihre Richtungscosinus; φ (resp. φ_1) das Potential der ganzen freien Electricität im ersten (resp. zweiten) Medium; ϑ die Dielectrisirungsconstante, $D = 1 + 4\pi\vartheta$ die gewöhnlich als „Dielectricitätsconstante" bezeichnete Grösse; λ, μ, ν die Componenten des dielectrischen Momentes der Volumeneinheit. Es ist dann bekanntlich:

$$\varepsilon_1 = -\left(\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz}\right),$$

$$e_1 = -\left[(\lambda - \lambda_1)a + (\mu - \mu_1)b + (\nu - \nu_1)c\right],$$

es gelten daher die Gleichungen:

$$(1) \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon - \left(\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz}\right),$$

$$(1_a) \qquad e_0 = e - \left[(\lambda - \lambda_1)a + (\mu - \mu_1)b + (\nu - \nu_1)c\right],$$

$$(2) \qquad \Delta\varphi = -4\pi\varepsilon_0, \qquad (2_a) \quad \frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN} = -4\pi e_0.$$

Diese Gleichungen gelten für eine ganz beliebige Vertheilung, wobei die dielectrischen Momente ganz beliebige sein können; entsprechen letztere dagegen der augenblicklich wirkenden Kraft — ein Zustand, den ich nach v. Helmholtz als den „electrischen Gleichgewichtszustand des Dielectricums" bezeichnen will —, so treten dazu die Gleichungen:

$$(3) \qquad \lambda = -\vartheta \frac{d\varphi}{dx}, \quad \mu = -\vartheta \frac{d\varphi}{dy}, \quad \nu = -\vartheta \frac{d\varphi}{dz},$$

aus denen in Verbindung mit (1) und (2) folgt:

$$(3_a) \qquad -4\pi\varepsilon = \frac{d}{dx}\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(D\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(D\frac{d\varphi}{dz}\right),$$

$$(3_b) \qquad -4\pi e = D\frac{d\varphi}{dN} - D_1\frac{d\varphi_1}{dN}.$$

Bekanntlich ist bei einer Verschiebung starrer geladener Leiter im Luftraum die gegen die electrischen Kräfte geleistete Arbeit gleich der Aenderung, welche durch diese Verschiebung, wobei die Electricität als an den ponderabeln Molecülen fest haftend betrachtet wird, in dem Werth der electrischen Energie eintritt, d. h. in dem Werth der bei Ladung der Körper gegen die electrischen Kräfte verbrauchten Arbeit. Dieses Princip dehnen v. Helmholtz und Korteweg auch auf solche Verschiebungen aus, welche mit elastischen Deformationen der Leiter und Dielectrica verbunden sind, wobei zu der Aenderung der Energie durch die Verschiebungen und Deformationen noch die durch Aenderung der Dielectricitätsconstante hinzutritt; sie setzen nämlich die dabei gegen die ponderomotorischen electrischen Kräfte geleistete Arbeit gleich der Aenderung desjenigen Theiles W der electrischen Energie, welcher der Vertheilung der zugeleiteten Electricität entspricht, während in dem Dielectricum der Gleichgewichtszustand als sich beständig von selbst herstellend angenommen wird. Um diesen Theil der Energie zu finden, denken wir uns die schliessliche Ladung mit den Dichtigkeiten ε und e und den dielectrischen Momenten λ, μ, ν in der Weise ausgeführt,

dass wir zuerst die Electricitätsmengen $n\varepsilon$ und ne (wo n einen für den ganzen Raum constanten Factor < 1 bezeichnet) aus unendlicher Entfernung heranbringen und in dem Dielectricum den Gleichgewichtszustand sich herstellen lassen, wodurch wir das Gesammtpotential $n\varphi$ und die dielectrischen Momente $n\lambda$ erhalten, und dass wir dazu die aus unendlicher Entfernung herangebrachten unendlich kleinen Electricitätsmengen εdn und edn hinzufügen, wodurch auch $n\varphi$ und $n\lambda$ um φdn und λdn wachsen. Die zu der Ladung εdn und edn verbrauchte Arbeit ist:

$$dA = \int n\varphi . \varepsilon dn\, d\tau + \int n\varphi . edn\, d\sigma,$$

wo $d\tau$ ein Volumenelement, $d\sigma$ ein Element einer Discontinuitätsfläche bezeichnet; mithin der ganze oben mit W bezeichnete Theil der schliesslichen Ladungsarbeit:

$$W = \int_0^1 \frac{dA}{dn} dn = \tfrac{1}{2}\int \varphi \varepsilon\, d\tau + \tfrac{1}{2}\int \varphi e\, d\sigma. \tag{4}$$

Bei der gleichzeitig von selbst eintretenden Vermehrung λdn der dielectrischen Polarisation leisten die electrischen Kräfte eine Arbeit; wird hierbei aus dem Inneren eines Volumenelementes $dx\,dy\,dz$ die Electricitätsmenge $+\lambda\, dy\,dz\,dn$ um die Strecke δ auf die eine Fläche $dy\,dz$ verschoben, die Menge $-\lambda\, dy\,dz\,dn$ um die Strecke δ_1 auf die gegenüberliegende Fläche, so ist die hierbei geleistete Arbeit, wenn wir $\delta + \delta_1 = dx$ setzen,

$$\lambda dy\,dz\,dn \cdot \left(-n\frac{d\varphi}{dx}\delta\right) - \lambda dy\,dz\,dn \cdot \left(n\frac{d\varphi}{dx}\delta_1\right) = -\lambda d\tau\, n\frac{d\varphi}{dx} dn,$$

und die hierbei während der ganzen Ladung geleistete Arbeit ist:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} -V = -\int_0^1 n dn \int \left(\lambda\frac{d\varphi}{dx} + \mu\frac{d\varphi}{dy} + \nu\frac{d\varphi}{dz}\right) d\tau \\ \qquad = -\tfrac{1}{2}\int \left(\lambda\frac{d\varphi}{dx} + \ldots\right) d\tau. \end{cases}$$

Die ganze electrische Energie ist also:

$$(b)\quad \begin{cases} W+V=\frac{1}{2}\int\varphi e\,d\tau+\frac{1}{2}\int\varphi e\,d\sigma+\frac{1}{2}\int\left(\lambda\frac{d\varphi}{dx}+\ldots\right)d\tau \\ \qquad =\frac{1}{2}\int\varphi\varepsilon_0\,d\tau+\frac{1}{2}\int\varphi e_0\,d\sigma=\frac{1}{8\pi}\int R^2\,d\tau=P, \end{cases}$$

wo P das Potential der ganzen freien Electricität auf sich selbst, und $R=\sqrt{(d\varphi/dx)^2+(d\varphi/dy)^2+(d\varphi/dz)^2}$ die resultirende electrische Kraft bezeichnet. Das obige Princip lässt sich nun mit einer gewissen Modification des von Korteweg[1]) gegebenen Beweises folgendermassen begründen. Werden die Körper electrisch geladen, so wird dazu gegen electrische Kräfte eine Arbeit P_1 verbraucht, wo P die vorstehende Grösse ist; werden sie darauf durch beliebige Verschiebung und Deformation in einen zweiten Zustand übergeführt, so ist dazu eine mechanische Arbeit A_1 gegen elastische und Verschiebungskräfte nöthig; werden sie darauf entladen, so wird dabei eine electrische Arbeit P_2 gewonnen; werden sie schliesslich in den ersten mechanischen Zustand zurückgeführt, so wird eine mechanische Arbeit A_2 gewonnen. Da dies ein Kreisprocess ist, so muss die ganze Arbeit $=0$ sein, also:

$A_1-A_2=P_2-P_1=(W_2-W_1)+(V_2-V_1)$ nach Gl. (b).

Die mechanische Arbeit A_1-A_2, welche im geladenen Zustand mehr zu der Deformation verbraucht wird als im ungeladenen, muss nun gegen die ponderomotorischen und electromotorischen electrischen Kräfte verbraucht sein; der letztere (zu electro-kinetischer Energie verbrauchte) Theil ist nach dem Obigen $=V_2-V_1$, mithin ist die bei der Deformation gegen die electrischen Kräfte verbrauchte ponderomotorische Arbeit $=W_2-W_1$. Zugleich ergibt sich aus der vorstehenden Ableitung, dass bei Berechnung der durch Verschiebung und Deformation eintretenden Aenderung von W, in dem Dielectricum der jedesmalige Gleichgewichtszustand als sich immer gleichzeitig herstellend angenommen werden muss, dass also nur die zugeleitete Electricität, nicht aber die dielectrische Polarisation als während der Deformation an den ponderabeln Molecülen fest haftend zu betrachten ist, dass mithin während der Variation beständig die Gl. (3), (3_a), (3_b) gelten; mittelst derselben ergibt sich:

1) Korteweg, l. c. p. 49.

$$(5)\quad \begin{cases} W = -\frac{1}{8\pi}\int \varphi \left[\frac{d}{dx}\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right) + \cdots\right] d\tau \\ -\frac{1}{8\pi}\int \varphi \left(D\frac{d\varphi}{dN} - D_1\frac{d\varphi_1}{dN}\right) d\sigma = \frac{1}{8\pi}\int D R^2 \, d\tau . \end{cases}$$

Nach Gl. (4) und (5) lässt sich W auch in die Form bringen:

$$(6)\quad W = \int\left(\varphi\,\varepsilon - \frac{D}{8\pi}R^2\right) d\tau + \int \varphi e \, d\sigma,$$

und dies ist die von v. Helmholtz[1]) angewandte Form; dieselbe bietet den Vortheil, dass man, um die von den im Inneren des Dielectricums eintretenden Aenderungen herrührende Variation von W zu berechnen, die Aenderung von φ nicht zu berücksichtigen braucht; denn die von $\delta\varphi$ herrührenden Glieder ersten Grades in δW sind:

$$\delta_\varphi(W) = \int \varepsilon\,\delta\varphi\, d\tau - \frac{1}{4\pi}\int D\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\delta\varphi}{dx} + \cdots\right) d\tau + \int e\,\delta\varphi\, d\sigma$$

oder:

$$(c)\quad \begin{cases} \delta_\varphi(W) = \int\left\{\varepsilon + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dx}\left(D\frac{d\varphi}{dx}\right) + \cdots\right]\right\}\delta\varphi\, d\tau \\ \quad + \int\left[e + \frac{1}{4\pi}\left(D\frac{d\varphi}{dN} - D_1\frac{d\varphi_1}{dN}\right)\right]\delta\varphi\, d\sigma = 0 \end{cases}$$

nach (3_a) und (3_b). Der Ausdruck (4) stimmt auch mit dem von Korteweg für den Fall eines Leiters angewandten überein; Korteweg setzt nämlich die Arbeit, welche bei der Deformation eines mit der Electricitätsmenge E geladenen Leiters und des umgebenden Dielectricums von den electrischen Kräften geleistet wird, $= \frac{1}{2}E(\varphi_1 - \varphi_2)$, wo φ_1 und φ_2 die Werthe des (theils von der Ladung des Leiters selbst, theils von dem Dielectricum herrührenden) Potentials auf dem Leiter vor und nach der Deformation bezeichnen.

Um nun die Variation δW des Ausdruckes W in Gl. (6) zu bilden, bezeichnen wir mit ξ, η, ζ die Componenten der Verschiebung in irgend einem Punkt des Raumes und betrachten dieselben als continuirliche Functionen der Coor-

1) v. Helmholtz, l. c. p. 396, wo das letzte Glied aus Versehen weggelassen ist.

dinaten x, y, z dieses Punktes; die Verschiebung eines Punktes einer Discontinuitätsfläche bestehe aus zwei aufeinander senkrechten tangentialen Verschiebungen δs und $\delta s'$, und aus einer normalen Verschiebung $\delta N = \xi a + \eta b + \zeta c$, welche letztere wir der Einfachheit halber als überall positiv, d. h. in das erste Medium hinein gerichtet annehmen wollen. Die Aenderung $\delta\varepsilon$ in einem festen (d. h. an der Verschiebung nicht theilnehmenden) Raumelement $d\tau$ besteht aus einem von der Verschiebung der Electricität herrührenden Theil:

$$\delta'\varepsilon = -\left(\xi\frac{d\varepsilon}{dx} + \eta\frac{d\varepsilon}{dy} + \zeta\frac{d\varepsilon}{dz}\right)$$

und aus einem von der räumlichen Dilatation

$$\alpha = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

herrührenden Theil, nämlich:

$$\varepsilon' - \varepsilon = \frac{\varepsilon d\tau}{d\tau(1+\alpha)} - \varepsilon = -\alpha\varepsilon = -\varepsilon\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right);$$

es ist also:

$$\text{(d)} \qquad \delta\varepsilon = -\left[\frac{d(\varepsilon\xi)}{dx} + \frac{d(\varepsilon\eta)}{dy} + \frac{d(\varepsilon\zeta)}{dz}\right].$$

ϑ, welches wir als eine innerhalb eines Dielectricums continuirliche Function der Coordinaten betrachten, ändert sich zunächst durch die Verschiebung um:

$$\delta'\vartheta = -\left(\xi\frac{d\vartheta}{dx} + \eta\frac{d\vartheta}{dy} + \zeta\frac{d\vartheta}{dz}\right).$$

Was die Aenderung von ϑ durch die elastische Deformation betrifft, so machen wir mit Korteweg die Annahme, dass sich das resultirende dielectrische Moment $m = \vartheta R$ bei ungeänderter Kraft R sowohl durch eine lineare Dilatation g_1 in der Richtung der Kraftlinien, als auch durch zwei Dilatationen g_2 und g_3 nach zwei aufeinander und auf den Kraftlinien senkrechten Richtungen ändert, und zwar setzen wir:

$$\delta''\vartheta = -\alpha g_1 - \beta(g_2 + g_3) = -\beta(g_1 + g_2 + g_3) - (\alpha - \beta)g_1$$
$$= -\beta\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) - (\alpha - \beta)g_1,$$

wo die Coëfficienten α und β im allgemeinsten Falle Functionen der Coordinaten sein können. Dies gibt:

$$\text{(e)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\vartheta = -\left(\xi\frac{d\vartheta}{dx} + \eta\frac{d\vartheta}{dy} + \zeta\frac{d\vartheta}{dz}\right) \\ -\beta\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) - (\alpha-\beta)\,g_1. \end{array} \right.$$

Dabei ist, wenn $\cos Rx$ etc. die Richtungscosinus von R bezeichnen[1]):

$$\text{(f)} \quad \left\{ \begin{array}{c} g_1 = \frac{d\xi}{dx}\cos^2 Rx + \frac{d\eta}{dy}\cos^2 Ry + \frac{d\zeta}{dz}\cos^2 Rz \\ + \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)\cos Rx\cos Ry + \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)\cos Rx\cos Rz \\ + \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\cos Ry\cos Rz. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir nun mit $\delta' W$ die Variation von W, wenn zunächst φ in jedem Raumpunkt ungeändert bleibt, so ist nach (d) (e) (f), indem wir zugleich berücksichtigen, dass in dem Raum zwischen zwei successiven Lagen einer Discontinuitätsfläche, dessen Element $= \delta N d\sigma$ ist, das erste Medium durch das zweite ersetzt wird:

$$\text{(g)} \quad \left\{ \begin{array}{c} \delta'\int\varphi\,\varepsilon\,d\tau = \int\varphi\,\delta\varepsilon\,d\tau + \int\varphi\,(\varepsilon_1-\varepsilon)\,\delta N d\sigma \\ = -\int\varphi\left[\frac{d(\varepsilon\xi)}{dx} + \cdots\right]d\tau + \int\varphi\,(\varepsilon_1-\varepsilon)\,\delta N d\sigma \\ = \int\varepsilon\left(\xi\frac{d\varphi}{dx} + \cdots\right)d\tau + \int\varphi\,(\varepsilon-\varepsilon_1)\,\delta N d\sigma + \int\varphi(\varepsilon_1-\varepsilon)\,\delta N d\sigma \\ = \int\varepsilon\left(\xi\frac{d\varphi}{dx} + \cdots\right)d\tau. \end{array} \right.$$

Ferner:

$$\text{(h)} \quad \delta'\int\varphi\,e\,d\sigma = \int e\left(\frac{d\varphi}{dN}\delta N + \frac{d\varphi}{ds}\delta s + \frac{d\varphi}{ds'}\delta s'\right)d\sigma.$$

Ferner:

$$-\delta'\int\frac{D}{8\pi}R^2\,d\tau = -\frac{1}{8\pi}\int(D_1-D)\,R^2\,\delta N d\sigma - \tfrac{1}{3}\int R^2\,\delta\vartheta\,d\tau$$

1) Lamé, l. c. p. 46.

$$= -\frac{1}{8\pi}\int (D_1 - D) R^2 \delta N \, d\sigma + \tfrac{1}{2}\int R^2 \left[\left(\xi \frac{d\vartheta}{dx} + \cdots\right) + \beta\left(\frac{d\xi}{dx} + \cdots\right)\right] d\tau$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int (\alpha - \beta)\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 \frac{d\xi}{dx} + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \frac{d\eta}{dy} + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 \frac{d\zeta}{dz}\right.$$
$$+ \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$
$$\left. + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)\right] d\tau,$$

oder wenn wir zur Abkürzung:

$$A = -R^2 \frac{d\vartheta}{dx} + \frac{d(\beta R^2)}{dx} + \frac{d}{dx}\left[(\alpha - \beta)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right]$$
$$+ \frac{d}{dy}\left[(\alpha - \beta)\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right] + \frac{d}{dz}\left[(\alpha - \beta)\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right]$$

setzen, die analogen Grössen für die y- und z-Axe mit B und C bezeichnen und beachten, dass an einer Discontinuitätsfläche:

$$\frac{d\varphi}{dx}\xi + \frac{d\varphi}{dy}\eta + \frac{d\varphi}{dz}\zeta = \frac{d\varphi}{dN}\delta N + \frac{d\varphi}{ds}\delta s + \frac{d\varphi}{ds'}\delta s' \text{ ist,}$$

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\delta' \int \frac{D}{8\pi} R^2 \, d\tau = -\frac{1}{2}\int (\xi A + \eta B + \zeta C) \, d\tau \\ \quad -\frac{1}{2}\int \left[\frac{D_1 - D}{4\pi} R^2 + \beta R^2 - \beta_1 R_1^2 \right. \\ \quad \left. + (\alpha - \beta)\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 - (\alpha_1 - \beta_1)\left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2\right] \delta N \, d\sigma \\ -\frac{1}{2}\int \left[(\alpha - \beta)\frac{d\varphi}{dN} - (\alpha_1 - \beta_1)\frac{d\varphi_1}{dN}\right]\left(\frac{d\varphi}{ds}\delta s + \frac{d\varphi}{ds'}\delta s'\right) d\sigma. \end{array} \right.$$

Geht nun noch φ in jedem Raumpunkt in den der neuen Vertheilung entsprechenden Werth über, und verwandelt sich dadurch $W + \delta' W = W'$ in $W' + V = W''$, so ist $V = -(W' - W'') = -\delta_\varphi(W'')$, wo W'' den Werth von W in (6) für die neue Vertheilung bezeichnet. Da nun nach Gl. (c) die Glieder erster Ordnung in $\delta_\varphi(W'') = 0$ sind, so ist:

$$V = \frac{1}{8\pi}\delta \int D_1 R_1^2 \delta N \, d\sigma,$$

in welchem Ausdruck nur das mit $(\delta\varphi_1)^2$ behaftete Glied zu berücksichtigen ist; da in dem Raum des vorstehenden Integrals R_1^2 in R^2 übergeht, so ist $\delta(R_1^2)$ endlich, und zwar:

$$\delta(R_1^2) = R^2 - R_1^2 = \left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 = \left[\frac{d\varphi_1}{dN} + \delta\left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)\right]^2 - \left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2$$

$$= 2\frac{d\varphi_1}{dN}\delta\left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right) + \left(\delta\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 = 2\frac{d\varphi_1}{dN}\delta\frac{d\varphi_1}{dN} + \left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2,$$

also:

(k) $$V = \frac{1}{8\pi}\int D_1\left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 \delta N\, d\sigma.$$

Hiernach ist die vollständige Variation von W:

(l)
$$\left\{\begin{aligned}
\delta W = \delta' W + V = &-\int\Big[\xi\Big(-\varepsilon\frac{d\varphi}{dx} + \tfrac{1}{2}A\Big) \\
&+ \eta\Big(-\varepsilon\frac{d\varphi}{dy} + \tfrac{1}{2}B\Big) + \zeta\Big(-\varepsilon\frac{d\varphi}{dz} + \tfrac{1}{2}C\Big)\Big]d\tau \\
&-\int\Big[-e\frac{d\varphi}{dN} + \frac{D_1 - D}{8\pi}R^2 - \frac{D_1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dN} - \frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2 \\
&+ \frac{\beta}{2}R^2 - \frac{\beta_1}{2}R_1^2 + \frac{\alpha-\beta}{2}\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 - \frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2\Big]\delta N\, d\sigma \\
&-\int\Big(-e + \frac{\alpha-\beta}{2}\frac{d\varphi}{dN} - \frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\frac{d\varphi_1}{dN}\Big)\Big(\frac{d\varphi}{ds}\delta s + \frac{d\varphi}{ds'}\delta s'\Big)d\sigma.
\end{aligned}\right.$$

Sind nun X, Y, Z die Componenten der auf die Volumeneinheit des Inneren wirkenden electrischen Druckkraft, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$ die Componenten der an einer Discontinuitätsfläche auf die Flächeneinheit nach den Richtungen δN, δs, $\delta s'$ wirkenden Druckkraft, so ist nach dem obigen Princip:

(m) $$\delta W = -\int(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\,d\tau - \int(\mathfrak{N}\delta N + \mathfrak{S}\delta s + \mathfrak{S}'\delta s')\,d\sigma,$$

und die Vergleichung der Coëfficienten von ξ, η, ζ gibt:

$$X = -\varepsilon\frac{d\varphi}{dx} + \tfrac{1}{2}A \text{ etc.}$$

Aus Gl. (3_a) folgt aber:

$$-\varepsilon\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{D}{4\pi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{D}{4\pi}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right)$$

$$+ \frac{d}{dz}\left(\frac{D}{4\pi}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{D}{8\pi}R^2\right) + \tfrac{1}{2}R^2\frac{d\vartheta}{dx},$$

wodurch der vorstehende Werth von X die Form des Ausdruckes einer elastischen Zugkraft erhält, nämlich:

(A) $$X = \frac{dX_x}{dx} + \frac{dX_y}{dy} + \frac{dX_z}{dz},$$ analog Y und Z, wo:

(B) $$\begin{cases} X_x = -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2 + \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2, \text{ analog } Y_y \text{ und } Z_z, \\ X_y = Y_x = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}, \quad X_z = Z_x = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}. \end{cases}$$

Hiernach wirkt auf die Einheit eines auf irgend einer Richtung n senkrechten Flächenelementes ein normaler Druck:

(7) $$A_n = -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2$$

und eine Zugkraft mit den Componenten:

$$X'_n = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\frac{d\varphi}{dn}\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) R^2 \cos Rn \cos Rx \text{ etc.},$$

d. h. eine den Kraftlinien parallele Zugkraft:

(8) $$B_n = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) R^2 \cos Rn.$$

Auf ein auf den Kraftlinien senkrechtes Flächenelement wirkt also ein normaler Zug:

(9) $$K_p = A_n + B_n = \left(\frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha}{2}\right) R^2 = \varkappa_p R^2,$$

und auf jedes den Kraftlinien parallele Flächenelement wirkt (je nachdem $D/8\pi - \beta/2 > 0$ oder < 0 ist) ein normaler Druck oder Zug:

(10) $$K_s = -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2 = -\varkappa_s R^2.$$

Weiter gibt die Vergleichung der Coëfficienten von $\delta N, \delta s, \delta s'$ in den Gl. (l) und (m), mit Berücksichtigung der Gl. (3_b):

$$\mathfrak{N} = -\left(\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2}\right) R^2 + \left(\frac{D_1}{8\pi} - \frac{\beta_1}{2}\right) R_1^2$$
$$+ \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(\frac{d\varphi}{dN}\right)^2 - \left(\frac{D_1}{4\pi} + \frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dN}\right)^2$$
$$\mathfrak{S} = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\frac{d\varphi}{dN}\frac{d\varphi}{ds} - \left(\frac{D_1}{4\pi} + \frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right)\frac{d\varphi_1}{dN}\frac{d\varphi}{ds}$$
$$\mathfrak{S}' = \left(\frac{D}{4\pi} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\frac{d\varphi}{dN}\frac{d\varphi}{ds'} - \left(\frac{D_1}{4\pi} + \frac{\alpha_1-\beta_1}{2}\right)\frac{d\varphi_1}{dN}\frac{d\varphi}{ds'},$$

es wirkt also auf ein Element $d\sigma$ einer Discontinuitätsfläche

von der Seite des ersten, resp. zweiten Mediums aus ein normaler Druck, welcher für das erste Medium den Werth hat:

$$-\left(\frac{D}{8\pi}-\frac{\beta}{2}\right)R^2,$$

und ein der Kraftlinie paralleler Zug, welcher für das erste Medium den Werth:

$$\left(\frac{D}{4\pi}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)R^2\cos RN$$

besitzt. Dies sind aber dieselben Kräfte, welche nach Gl. (7) und (8) auf ein beliebiges Flächenelement im Inneren wirken, wodurch die Analogie der electrischen mit elastischen Druckkräften vervollständigt wird.

Die Ausdrücke (7) und (8) oder (9) und (10) stimmen mit den v. Helmholtz abgeleiteten überein, wenn man $\alpha=\beta$ setzt, d. h. nach Gleichung (e), wenn man die Dielectricitätsconstante blos durch eine Volum- oder Dichtigkeitsänderung sich ändernd annimmt; da, wenn ϱ die Dichtigkeit bedeutet:

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=\frac{\delta(d\tau)}{d\tau}=-\frac{\delta\varrho}{\varrho},\text{ so ist }\beta=\varrho\frac{d\vartheta}{d\varrho}.$$

§ 3. Electrische Ausdehnung eines kugelförmigen Condensators.

Wir betrachten eine aus einem Dielectricum bestehende Kugelschale von dem inneren und äusseren Radius r_1 und r_2, deren innere und äussere Fläche metallisch belegt oder mit einer leitenden Flüssigkeit in Berührung ist, und auf dem Potential P, resp. 0 erhalten wird; setzen wir:

$$\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}=\zeta,$$

so ist das Potential im Inneren der Kugelschale in der Entfernung r vom Mittelpunkt:

$$V=\frac{P}{\zeta}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right),$$

also die resultirende Kraft:

$$R=\frac{P}{\zeta r^2}.$$

Auf ein auf r senkrechtes Flächenelement wirkt nach Gleichung (9) eine normale electrische Zugkraft:

$$K_p = \varkappa_p R^2 = \varkappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r^4},$$

und auf jedes mit r parallele Flächenelement wirkt nach Gleichung (10) eine normale electrische Zugkraft:

$$K_e = -\varkappa_e R^2 = -\varkappa_e \frac{P^2}{\zeta^2 r^4}.$$

Bezeichnen nun u, v, w die elastischen Verschiebungen eines Punktes der Kugelschale nach dem Radius, nach der Tangente des Meridians und senkrecht gegen den Meridian, so ist in unserem Falle offenbar $v = w = 0$, u eine blosse Function von r; sind R_1, Φ_2, Ψ_3 die normalen Zugkräfte auf drei aufeinander senkrechte Flächenelemente, von denen das erste senkrecht auf dem Radius, das zweite senkrecht auf der Tangente ist, während das dritte im Meridian liegt, so ist[1]):

$$R_1 = (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dr} + 2\lambda\frac{u}{r} + \varkappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r^4},$$

$$\Phi_2 = \Psi_3 = \lambda\frac{du}{dr} + 2(\lambda + \mu)\frac{u}{r} - \varkappa_e \frac{P^2}{\zeta^2 r^4},$$

während die übrigen Spannungen $= 0$ sind; die Bedingungen des elastischen Gleichgewichtes reduciren sich auf die eine Gleichung:

$$\frac{dR_1}{dr} + \frac{2(R_1 - \Phi_2)}{r} = o, \quad \text{d. h., wenn wir:}$$

(11) $$\varkappa_p - \varkappa_e = \varkappa \quad \text{setzen:}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = \frac{2\varkappa}{\lambda + 2\mu}\frac{P^2}{\zeta^2 r^5}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn wir mit a und b die Integrationsconstanten bezeichnen:

$$u = ar + \frac{b}{r^2} + \frac{\varkappa}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{P^2}{\zeta^2 r^3},$$

woraus:

(12) $$R_1 = (3\lambda + 2\mu)a - 4\mu\frac{b}{r^3} + \left(\varkappa_p - \frac{\lambda + 6\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\varkappa\right)\frac{P^2}{\zeta^2 r^4}.$$

1) Lamé, l. c. p. 199.

Da an den zwei Grenzflächen keine äusseren Kräfte wirken, so muss für $r = r_1$ und $r = r_2$ $R_1 = 0$ sein; daraus ergibt sich:

$$a = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\left(\varkappa_p - \frac{\lambda + 6\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\varkappa\right)\frac{P^2}{\zeta^2}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 (r_2^3 - r_1^3)},$$

$$b = \frac{1}{4\mu}\left(\varkappa_p - \frac{\lambda + 6\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\varkappa\right)\frac{P^2}{\zeta^2}\,\frac{r_2^4 - r_1^4}{r_1 r_2 (r_2^3 - r_1^3)}.$$

Wir wollen die Lamé'schen Constanten λ, μ durch den Elasticitätscoëfficienten E des Dielectricums und das Verhältniss σ der Quercontraction zur Längendilatation ersetzen; es ist nämlich:

$$(13) \qquad \frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \qquad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Setzen wir zugleich:

$$r_2 - r_1 = \delta, \qquad \frac{r_2}{r_1} = \varrho, \quad \text{so wird:}$$

$$a = \frac{1 - 2\sigma}{E}\,\frac{P^2}{\delta^2}\left(\varkappa_p - \frac{3 - 5\sigma}{2(1 - \sigma)}\varkappa\right)\frac{\varrho(\varrho - 1)}{\varrho^3 - 1},$$

$$\frac{b}{r_1^3} = \frac{1 + \sigma}{2E}\,\frac{P^2}{\delta^2}\left(\varkappa_p - \frac{3 - 5\sigma}{2(1 - \sigma)}\varkappa\right)\frac{\varrho(\varrho^4 - 1)}{\varrho^3 - 1}.$$

Die Vergrösserung der Volumeneinheit des Hohlraumes ist:

$$\tau = \frac{\Delta(r_1^3)}{r_1^3} = 3\,\frac{\Delta r_1}{r_1} = 3\,\frac{u_1}{r_1} = 3\left(a + \frac{b}{r_1^3}\right) + 3\,\frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{2E(1 - \sigma)}\varkappa\,\frac{P^2}{\delta^2}\,\varrho^3.$$

Setzen wir hierin $\varrho = 1 + \delta/r_1$ und berücksichtigen nur die erste Potenz der als sehr klein vorausgesetzten Grösse δ/r_1, so ergibt sich:

$$(\mathrm{I}) \qquad \tau = \frac{3}{E}\left[\varkappa_p - (1 - \sigma)\varkappa + (1 + \sigma)\left(\varkappa_p - \frac{\varkappa}{2}\right)\frac{\delta}{r_1}\right]\frac{P^2}{\delta^2},$$

oder da nach Gleichung (9) und (10):

$$\varkappa_p = \frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha}{2}, \qquad \varkappa = \varkappa_p - \varkappa_s = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{ist:}$$

$$(\mathrm{I_a}) \qquad \tau = \frac{3}{E}\left[\frac{D}{8\pi} - \frac{\beta}{2} + \sigma\,\frac{\alpha + \beta}{2} + (1 + \sigma)\left(\frac{D}{8\pi} + \frac{\alpha - \beta}{4}\right)\frac{\delta}{r_1}\right]\frac{P^2}{\delta^2},$$

welche Formel bei Vernachlässigung von δ/r_1 mit der von Korteweg[1]) auf anderem Wege abgeleiteten übereinstimmt.

1) Korteweg, l. c. p. 57.

§ 4. Electrische Ausdehnung eines cylindrischen Condensators.

Wir betrachten eine aus einem Dielectricum gebildete cylindrische Röhre, welche an den Enden durch beliebig gekrümmte Flächen geschlossen ist, und deren innere und äussere Fläche von den Radien r_1 und r_2 metallisch belegt oder mit einer leitenden Flüssigkeit in Berührung ist und auf dem Potential P, resp. 0 erhalten wird. Setzen wir:

$$\log \frac{r_2}{r_1} = \zeta,$$

so ist das Potential im Inneren des Dielectricums in der Entfernung r von der Axe, wenn wir dabei die Wirkung der Endflächen vernachlässigen:

$$V = -\frac{P}{\zeta} \log \frac{r}{r_2},$$

also die resultirende Kraft nach r:

$$R = \frac{P}{\zeta r},$$

und die normalen electrischen Zugkräfte auf ein auf r senkrechtes und auf jedes mit r parallele Flächenelement nach Gleichung (9) und (10):

$$K_p = \varkappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}, \qquad K_s = -\varkappa_s \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}.$$

Die elastischen Verschiebungen seien u nach r, w parallel der Axe des Cylinders (der z-Axe), v senkrecht gegen beide; dann können wir u als eine blosse Function von r, w als Function von z, $v = 0$ annehmen. Sind R_1, Φ_2, Z_3 die normalen Zugkräfte auf drei aufeinander senkrechte Flächenelemente, von denen das erste senkrecht auf r, das zweite parallel mit r und der Axe, das dritte senkrecht auf der Axe ist, so ist[1]):

$$\text{(a)} \quad \left| \begin{aligned} R_1 &= (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dr} + \lambda\left(\frac{u}{r} + \frac{dw}{dz}\right) + \varkappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r^2} \\ \Phi_2 &= (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{dw}{dz}\right) - \varkappa_s \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}, \\ Z_3 &= (\lambda + 2\mu)\frac{dw}{dz} + \lambda\left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) - \varkappa_s \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}, \end{aligned} \right.$$

während die tangentialen Zugkräfte $= 0$ sind.

1) Lamé, l. c. p. 189.

Die Bedingungen des elastischen Gleichgewichtes sind:

$$\frac{dZ_3}{dz} = 0, \text{ d. h. } \frac{d^2w}{dz^2} = 0, \text{ woraus } w = cz,$$

ferner:

$$\frac{dR_1}{dr} + \frac{R_1 - \Phi_2}{r} = 0,$$

also, wenn wir wieder $\varkappa_p - \varkappa_s = \varkappa$ setzen:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{\varkappa}{\lambda + 2\mu}\frac{P^2}{\zeta^2 r^3},$$

woraus:

(b) $$u = ar + \frac{b}{r} - \frac{\varkappa}{4(\lambda + 2\mu)}\frac{P^2}{\zeta^2 r}(1 + 2\log r).$$

Hieraus folgt nach (a):

(c) $$\left\{\begin{array}{l} R_1 = 2(\lambda + \mu)a + \lambda c - 2\mu\frac{b}{r^2} \\ \quad + \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}\left[\varkappa_p - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\varkappa + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\varkappa\log r\right], \end{array}\right.$$

(d) $$Z_3 = 2\lambda a + (\lambda + 2\mu)c - \frac{P^2}{\zeta^2 r^2}\left[\varkappa_p - \frac{\lambda + 4\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\varkappa\right].$$

Zur Bestimmung der Constanten a, b, c haben wir zunächst die Bedingung $R_1 = 0$ für $r = r_1$ und $r = r_2$, woraus:

(e) $$b = \frac{P^2}{\zeta^2}\left[\frac{1}{2\mu}\left(\varkappa_p - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)}\varkappa\right) + \frac{\varkappa}{2(\lambda + 2\mu)}\frac{r_2^2\log r_1 - r_1^2\log r_2}{r_2^2 - r_1^2}\right],$$

(f) $$2(\lambda + \mu)a + \lambda c = -\frac{P^2}{\zeta(r_2^2 - r_1^2)}\frac{\varkappa\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Zur Aufstellung einer weiteren Bedingung ist der von aussen her längs der Axe wirkende Zug Z_3 zu bestimmen. In einem Punkt der inneren Fläche der beliebig gekrümmten Kappe, welche das eine Ende der Röhre bildet, sei δ_1 die (als sehr gering angenommene) Wanddicke, ϱ und ϱ' die zwei. Krümmungsradien,

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right);$$

dann kann man im Inneren der Kappe in der Entfernung ξ von dieser Fläche das Potential:

$$V = P - P\frac{\xi(1 - \gamma\xi)}{\delta_1(1 - \gamma\delta_1)}$$

setzen[1]), also die nach der äusseren Normale gerichtete resultirende Kraft:

$$R = -\frac{dV}{d\xi} = \frac{P}{\delta_1}\frac{1-2\gamma\xi}{1-\gamma\delta_1}.$$

Die im Inneren der Kappe wirkenden electrischen Zugkräfte sind mit den elastischen Kräften im Gleichgewicht; dagegen geben die auf die innere und äussere Fläche der Kappe nach der Normalen N wirkenden electrischen Zugkräfte $\varkappa_p R_1^2$ und $\varkappa_p R_2^2$ eine nach der Axe, und zwar nach aussen gerichtete Zugcomponente:

$$A = \varkappa_p \int R_1^2 \cos(Nz)\, d\sigma_1 - \varkappa_p \int R_2^2 \cos(Nz)\, d\sigma_2 .$$

Bezeichnen hierin $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ entsprechende, d. h. durch Normalen auf der Innenfläche begrenzte Flächenelemente, so ist $d\sigma_2 = (1+2\gamma\delta_1)\, d\sigma_1$, also:

$$\begin{aligned} A &= \varkappa_p \int [R_1^2 - (1+2\gamma\delta_1) R_2^2] \cos(Nz)\, d\sigma_1 \\ &= \varkappa_p \int [R_1^2 - (1+2\gamma\delta_1) R_2^2]\, d\sigma , \end{aligned}$$

wo $d\sigma$ das Element des auf der Axe senkrechten inneren Querschnittes der Röhre bezeichnet; oder, wenn wir die Wanddicke des cylindrischen Theiles $r_2 - r_1 = \delta$ setzen:

$$A = \varkappa_p P^2 \int \frac{1-(1-2\gamma\delta_1)^2(1+2\gamma\delta_1)}{\delta_1^2(1-\gamma\delta_1)^2}\, d\sigma ,$$

oder mit Vernachlässigung von δ_1 gegen 1:

$$A = \varkappa_p P^2 \int \frac{2\gamma}{\delta_1}\, d\sigma = \varkappa_p \frac{P^2}{\delta^2} \int 2\gamma \frac{\delta}{\delta_1}\, \delta\, d\sigma = \varkappa_p \frac{P^2}{\delta^2} \cdot 2\delta\sigma M\left(\gamma \frac{\delta}{\delta_1}\right),$$

wo $M(x)$ den Mittelwerth der auf der Endfläche stattfindenden Werthe von x bezeichnet; oder da $2\delta\sigma = 2\pi r_1^2 \delta = r_1 F$ ist, wenn F den ringförmigen Querschnitt der cylindrischen Röhrenwand bezeichnet:

$$\text{(g)} \qquad \frac{A}{F} = \varkappa_p \frac{P^2}{\delta^2} \cdot r_1 M\left(\gamma \frac{\delta}{\delta_1}\right) = \varkappa_p \frac{P^2}{\delta^2} h^2 .$$

Diesem axialen Zug auf die Flächeneinheit muss nun der über den ringförmigen Querschnitt ausgedehnte Mittelwerth von Z_3 gleich sein; dies gibt nach (d):

$$\text{(h)} \quad 2\lambda a + (\lambda + 2\mu) c = \frac{2P^2}{\zeta(r_2^2 - r_1^2)} \left(\varkappa_p - \frac{\lambda + 4\mu}{2(\lambda+2\mu)} \varkappa\right) + \frac{P^2}{\delta^2} h^2 \varkappa_p .$$

Hieraus und aus (f) bestimmen sich a und c; mit Vernachlässigung von $(\delta/r_1)^2$ erhalten wir schliesslich:

1) Vergl. z. B. Mascart, Traité d'Electricité statique 1. p. 244.

$$(14)\quad \begin{cases} 2a = -\frac{1}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(1+h^2)\lambda\varkappa_p - \frac{\lambda^2+3\lambda\mu-2\mu^2}{2(\lambda+2\mu)}\varkappa\right]\frac{P^2}{\delta^2}, \\ c = \frac{1}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left[(1+h^2)(\lambda+\mu)\varkappa_p - \frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\varkappa\right]\frac{P^2}{\delta^2}, \\ \frac{b}{r_1^2} = \left[\frac{\varkappa_p}{2\mu}\left(1+\frac{\delta}{r_1}\right) + \frac{\varkappa}{2(\lambda+2\mu)}\left(1+\frac{\delta}{r_1}\right)\left(\log r_1 - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. - \frac{\varkappa}{4(\lambda+2\mu)}\right]\frac{P^2}{\delta^2}. \end{cases}$$

Die Vergrösserung der Volumenheit des Hohlraumes ist, wenn l die Länge des Cylinders bedeutet:

$$\tau = \frac{\Delta(r_1^2 l)}{r_1^2 l} = 2\frac{\Delta r_1}{r_1} + \frac{\Delta l}{l} = 2\frac{u_1}{r_1} + c = 2a + c + 2\frac{b}{r_1^2} - \frac{\varkappa}{2(\lambda+2\mu)}(1+2\log r_1)\left(1+\frac{\delta}{r_1}\right)\frac{P^2}{\delta^2},$$

also nach den obigen Werthen von a, b, c, wenn wir darin wieder E und σ nach Gleichung (13) einführen:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \tau = \frac{3}{E}\left[\left(1+\frac{1-2\sigma}{3}h^2\right)\varkappa_p - (1-\sigma)\varkappa + \frac{2}{3}(1+\sigma)\left(\varkappa_p - \frac{\varkappa}{2}\right)\frac{\delta}{r_1}\right]\frac{P^2}{\delta^2}, \\ \quad = \frac{3}{E}\left[\left(1+\frac{1-2\sigma}{3}h^2\right)\left(\frac{D}{8\pi}+\frac{\alpha}{2}\right) - (1-\sigma)\frac{\alpha+\beta}{2}\right. \\ \qquad \left. + \frac{2}{3}(1+\sigma)\left(\frac{D}{8\pi}+\frac{\alpha-\beta}{4}\right)\frac{\delta}{r_1}\right]\frac{P^2}{\delta^2}. \end{cases}$$

Die Verlängerung der Längeneinheit der Röhre ist:

$$(\mathrm{II_a})\quad \begin{cases} c = \frac{1}{E}\left[(1+h^2)\varkappa_p - (1-\sigma)\varkappa\right]\frac{P^2}{\delta^2} \\ = \frac{1}{E}\left[(1+h^2)\left(\frac{D}{8\pi}+\frac{\alpha}{2}\right) - (1-\sigma)\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\frac{P^2}{\delta^2}. \end{cases}$$

Die Vergleichung der Gl. (I), (II), ($\mathrm{II_a}$) zeigt, dass, wenn man h und δ/r_1 vernachlässigen kann, der Werth von τ für Kugel- und Cylindercondensatoren aus demselben Material und bei demselben Werth von P/δ derselbe ist, und dass unter denselben Voraussetzungen $c = \frac{1}{3}\tau$ ist; letztere Folgerung fand Quincke nahezu bestätigt.[1]) Die Voraussetzung eines kleinen Werthes von δ/r_1 war bei den Quincke'schen Beobachtungen in hinreichendem Maasse erfüllt (die Werthe schwankten nach Tab. 42 zwischen 0,07 und 0,1). Was den Werth von:

1) Quincke, Wied. Ann. 10. p. 518. Tab. 30. 1880.

$$h^2 = r_1 M\left(\gamma \frac{\delta}{\delta_1}\right)$$

betrifft, so kann man, indem man mit $M(\delta/\delta_1)$ einen Mittelwerth bezeichnet:

(k) $$h^2 = M\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)\frac{1}{\pi r_1}\int \gamma\, d\sigma = M\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right) C$$

setzen, wo $d\sigma$ ein Element des inneren Querschnittes bezeichnet. Die Endfläche wird man als eine Rotationsfläche betrachten dürfen; nimmt man dieselbe z. B. als ein Sphäroid mit der Rotationsaxe a und der Queraxe b an, so ist:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{r_1^2} - 1\right)}},$$

nimmt man sie als ein Rotationsparaboloid mit der Meridiancurve $y^2 = 2px$, so ist:

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{r_1^2}}}.$$

In beiden Fällen ist $C \leqq 1$, da jedenfalls $b \geqq r_1$ ist; ist die tangirende Ebene der Fläche an ihrer Grenzlinie gegen die Cylinderfläche nahezu der Cylinderaxe parallel — wie das die vorstehende Ableitung, genau genommen, voraussetzt, und wie es auch bei den Quincke'schen Röhren nach Fig. 18[1]), sowie nach einer brieflichen Mittheilung des Hrn. Quincke der Fall war —, so ist $b/r_1 = 1$ oder p/r_1 sehr klein, also in beiden Fällen nahezu $C = 1$. Ein kleiner Werth von h würde also nach Gl. (k) einen kleinen Werth von $M(\delta/\delta_1)$, d. h. eine bedeutende mittlere Wanddicke der Kappe im Vergleich zu der des cylindrischen Theiles voraussetzen, was durchaus nicht unwahrscheinlich ist. Dagegen würde für $C = 1$ und bei constanter, mit der der cylindrischen Wand übereinstimmender Wanddicke der Kappe $h = 1$ sein. Uebrigens scheinen mir zu einer genaueren Bestimmung des Verhältnisses von c zu τ die oben erwähnten Quincke'schen Beobachtungen wenig geeignet zu sein, da bei denselben sowohl τ als auch c durchaus nicht mit P^2 proportional waren, wie es die Theorie verlangt. Für einen beiderseits offenen Cylinder ist nach Gl. (g) $h = 0$ zu setzen.

1) Quincke, Wied. Ann. **19**. Taf. II Fig. 8. 1883.

§ 5. Die Quincke'schen Beobachtungen an gläsernen Cylindercondensatoren.

Die Hauptquelle der Unsicherheit bei Anwendung der Gl. (I) und (II) scheint in der Unsicherheit der Werthe von E und σ zu liegen. Quincke hat die Werthe von E für die einzelnen Cylindercondensatoren durch besondere Versuche bestimmt; er benutzt dazu eine Formel von Lamé[1]), welche sich auf eine von beliebig gekrümmten Endflächen geschlossene cylindrische Röhre von dem inneren und äusseren Radius r_1 und r_2 bezieht, welche innen und aussen einem gleichförmigen normalen Druck p_1, resp. p_2 ausgesetzt ist. Setzt man:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = M,$$

so ist nach dieser Formel die Vergrösserung der Volumeneinheit des Hohlraumes:

$$(15)\quad \tau = \frac{3}{E}\left[(1-2\sigma)\left(Mp_1-(M+1)p_2\right)+\tfrac{3}{2}(1+\sigma)(M+1)(p_1-p_2)\right],$$

also der Werth von τ bei einer Zunahme von p_1 um $\Delta p_1 = p = 1$ Atmosphäre $= 0{,}01034$ kg/qmm:

$$\frac{r_1}{p} = \frac{1}{E}\left[(5-4\sigma)\,M + 2(1+\sigma)\right], \quad \text{woraus:}$$

$$(a)\qquad E = \left[(5-4\sigma)\,M + 2(1+\sigma)\right]\frac{p}{r_1}.$$

Quincke setzt hierin $\sigma = \frac{1}{4}$; dieser Werth ist indessen höchst unsicher; Wertheim[2]) fand für Glas nahezu $\sigma = \frac{1}{3}$; im folgenden Paragraph zu erwähnende Beobachtungen Quincke's an gläsernen Kugelcondensatoren ergaben Werthe zwischen 0,209 und 0,347; die Werthe scheinen aber sehr von der Gestalt, den inneren Spannungsverhältnissen u. s. w. der Gefässe abzuhängen, da Quincke auch für E Werthe fand, welche für die einzelnen Cylindercondensatoren zwischen 5000 und 6240, für die Kugelcondensatoren in noch viel weiteren Grenzen schwankten. Aus Gl. (a) ergibt sich z. B. für $\sigma = \frac{1}{3}$ und $\sigma = \frac{1}{4}$, da M sehr gross gegen 1 ist:

1) Lamé, l. c. p. 190.
2) Wüllner, Physik. 1. p. 182.

$$\frac{E_{\frac{1}{3}} - E_{\frac{1}{4}}}{E_{\frac{1}{4}}} = \frac{-\frac{1}{3}M + M}{\frac{4}{3}M} = -\frac{1}{12},$$

sodass also Schwankungen von σ zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ schon eine Unsicherheit von 8% im Werthe von E bedingen; etwa die Hälfte der Schwankungen in den von Quincke berechneten Werthen.

Quincke hat seine Beobachtungen über die electrische Volumenänderung τ von Cylindercondensatoren in den Tabellen 45 und 46[1]) zusammengestellt. Nach Gl. (II) sollten dieselben dem Quadrat des auf der Innenfläche herrschenden Potentials P, also in Tab. 45 dem Quadrat der Funkenzahl q der Maassflasche proportional sein. Berechnen wir nun aus den bei $q = 20$, $q = 40$, $q = 60$ beobachteten Werthen von τ diejenigen, welche hiernach bei $q = 20$ stattfinden müssten, für die in der ersten Columne der nachstehenden Tabelle bezeichneten Condensatoren, so ergeben sich folgende Werthe.

	$q = 20$	$q = 40$	$q = 60$
57	—	0,429	0,297
58	0,355	0,244	0,149
54	0,291	0,191	0,152
56	0,129	0,103	0,099

Wie man sieht, stimmen die nebeneinander stehenden Zahlen, welche nach der Theorie unter Voraussetzung einer von der Zeit unabhängigen Polarisation gleich sein sollten, so wenig überein, dass diese Beobachtungsreihe zu einer Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung durchaus ungeeignet ist.

Besser stimmen die Zahlen der Beobachtungsreihe Tab. 46, bei welcher das Potential P nach einer allem Anschein nach zuverlässigeren Methode durch die Anzahl r der Umdrehungen der Schraube eines Thomson'schen Electrometers bestimmt wurde, und zwar ist nach p. 561 und 564:

$$P = 1{,}1415\,(r + 2{,}445)\ \text{C.-G.-S.}$$

Berechnen wir hiernach die Werthe von $\tau \cdot 10^6$ für das Potential $r = 20$ aus den für $r = 40$ und $r = 60$ gefundenen Werthen, so ergibt sich nachstehende Tabelle.

1) Quincke, Wied. Ann. **19.** p. 571 bis 578. 1883.

Tabelle I.

$\tau . 10^6$.

Nr.	$r = 20$	$r = 40$	$r = 60$	Mittel	L
57	0,218	0,308	0,291	0,272	0,0739
58	0,195	0,233	0,247	0,225	0,0922
55	0,208	0,267	—	0,237	0,1251
54	0,204	0,250	0,276	0,243	0,0700
59	0,115	0,154	—	0,134	0,0105

Obwohl auch diese Tabelle das Gesetz der Proportionalität mit P^2 nicht genau bestätigt, sondern die Werthe von τ in einem etwas stärkeren Verhältniss zu wachsen scheinen, so will ich doch die obigen Mittelwerthe als die Werthe von $\tau . 10^6$ für $r = 20$, d. h. für:

b) $$P = 1{,}1415 \,.\, 22{,}445$$

annehmen. In dem Ausdruck für τ in Gl. (II) hat es wegen der Unsicherheit des Werthes von σ keinen Zweck, die Grösse δ/r_1, welche zwischen 0,07 und 0,1 schwankte, zu berücksichtigen; setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{1-2\sigma}{3} h^2 = \gamma ,$$

so geht die Gl. (II) über in:

16) $$\tau = \frac{3}{E}\frac{P^2}{\delta^2}\left[(1+\gamma)\frac{D}{8\pi} + (\sigma+\gamma)\frac{\alpha}{2} - (1-\sigma)\frac{\beta}{2}\right],$$

oder, wenn wir:

17) $$\frac{D}{8\pi} - \frac{E}{3}\frac{\delta^2}{P^2}\tau = L \quad \text{setzen,}$$

18) $$-\gamma\frac{D}{8\pi} - (\sigma+\gamma)\frac{\alpha}{2} + (1-\sigma)\frac{\beta}{2} = L.$$

Mittelst der Werthe von τ in Tab. I, des Werthes von P in (b), der Werthe von δ, E und D in den von Quincke berechneten Tab. 39 und 42 ergeben sich die in Tab. I aufgeführten Werthe von L. Um daraus nach Gl. (18) α und β selbst zu berechnen, müsste man für die verschiedenen Condensatoren α und β als gleich, dagegen σ und γ (oder wenigstens letzteres) als verschieden und bekannt annehmen dürfen, was beides nicht der Fall ist. Jedenfalls zeigt sich aber, da die Werthe von L positiv sind (ein Resultat, welches auch trotz der in Tab. I sich zeigenden Unsicherheit der

Werthe von τ/P^2 und trotz der Unsicherheit der Werthe von E bestehen bleibt), und da γ nicht negativ ist, dass man den Beobachtungen nicht durch die Annahme Quincke's $\alpha = \beta = 0$, also $\varkappa_p = \varkappa_s = D/8\pi$ genügen kann. Für flüssige Dielectrica hat Quincke[1]) $\varkappa_p$ und $\varkappa_s$ nahezu gleich und bedeutend grösser als $D/8\pi$ gefunden; dies würde $\alpha > 0$, $\beta = -\alpha$ voraussetzen, was für Glas nach Gl. (18) nicht zulässig ist.

Quincke berechnet τ nach Gl. (15), indem er:

$$p_1 = \varkappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r_1^2}, \quad p_2 = \varkappa_p \frac{P^2}{\zeta^2 r_2^2}, \quad \varkappa_p = \frac{D}{8\pi}$$

setzt, wo nach § 4 $\zeta = \log r_2/r_1$ ist; dies gibt:

$$\tau = \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{D}{8\pi} \frac{P^2}{\zeta^2 r_1^2} = \frac{2(1+\sigma)}{E} \frac{D}{8\pi} \frac{P^2}{\delta^2}$$

oder, wenn man mit Quinke $\sigma = \frac{1}{4}$ setzt:

$$\tau = \frac{5}{2E} \frac{D}{8\pi} \frac{P^2}{\delta^2};$$

dass diese Gleichung auch bei den gemachten Annahmen und für $\gamma = 0$ nicht mit Gl. (16) übereinstimmt, erklärt sich daraus, dass nach dem schon im § 1 Bemerkten die Gl. (15) auf den vorliegenden Fall nicht ohne Modification anwendbar ist.

§ 6. Die Beobachtungen Quincke's an gläsernen Kugelcondensatoren.

Bei diesen Condensatoren hat Quincke sowohl die Volumenänderung τ_1 des Hohlraumes bei einer blos auf das Innere wirkenden gleichförmigen Druckvermehrung, als auch die Volumenänderung τ_2 bei einer auf die innere und äussere Fläche wirkenden gleichen Druckvermehrung durch Vorversuche gemessen; durch Combination dieser beiden Beobachtungen lässt sich sowohl E als auch σ bestimmen. Wirkt nämlich auf eine Kugelschale vom inneren und äusseren Radius r_1 und r_2 innen und aussen ein Druck p_1 und p_2, so ist nach Gl. (12), indem wir die dort noch hinzutretenden electrischen Druckkräfte = 0 setzen:

$$R_1 = (3\lambda + 2\mu)\alpha - 4\mu \frac{b}{r^3},$$

1) Quincke, Wied. Ann. **19**. p. 725. 1883.

und die an den zwei Grenzflächen zu erfüllenden Bedingungen lauten:

$$(3\lambda + 2\mu)\,a - 4\mu\frac{b}{r_1^3} = -p_1\,, \qquad (3\lambda + 2\mu)\,a - 4\mu\frac{b}{r_2^3} = -p_2$$

woraus, wenn wir

$$\frac{r_1^3}{r_2^3 - r_1^3} = M \text{ setzen:}$$

$$a = \frac{Mp_1 - (M+1)p_2}{3\lambda + 2\mu}\,, \quad \frac{b}{r_1^3} = \frac{M+1}{4\mu}(p_1 - p_2),$$

also die Vergrösserung der Volumeneinheit des Hohlraumes:

$$(19)\quad \tau = 3\left(a + \frac{b}{r_1^3}\right) = 3\left[\frac{Mp_1 - (M+1)p_2}{3\lambda + 2\mu} + \frac{M+1}{4\mu}(p_1 - p_2)\right].$$

Bei einer Druckzunahme $\Delta p_1 = p = 1$ Atmosphäre ist also:

$$(a)\quad \frac{\tau_1}{p} = \frac{3M}{3\lambda + 2\mu} + \frac{3(M+1)}{4\mu} = \frac{3}{2E}[3(1-\sigma)M + 1 + \sigma]$$

und bei einem Druck $p_1 = p_2 = p$ ist:

$$(b)\quad \frac{\tau_2}{p} = -\frac{3}{3\lambda + 2\mu} = -\frac{3}{E}(1 - 2\sigma).$$

Aus (a) und (b) ergibt sich, wenn wir $-\tau_1/\tau_2 = q$ setzen, und da, wenn $r_2 - r_1 = \delta$, mit hinreichender Annäherung:

$$3M = \frac{r_1}{\delta} - 1$$

gesetzt werden kann:

$$(c)\quad \sigma = \frac{2q - \frac{r_1}{\delta}}{4q + 2 - \frac{r_1}{\delta}},$$

worauf sich dann E aus Gl. (b) bestimmt. Mittelst der Zahlen der Quincke'schen Tabelle 40 (p. 555) ergeben sich so für die Condensatoren 17, 61, 60 die in der zweiten und dritten Columne der nachstehenden Tabelle aufgeführten Zahlen.

Tabelle II.

$\tau \cdot 10^6$.

Nr.	σ	E(C.-G.-S.)	$q = 10$	$q = 20$	$q = 40$	Mittel
17	0,347	$2463 \cdot 10^8$	0,940	0,787	0,801	0,843
61	0,333	$2971 \cdot 10^8$	0,287	0,216	0,218	0,240
60	0,209	$4298 \cdot 10^8$	0,069	0,068	0,071	0,069

Die drei folgenden Columnen enthalten die von Quincke in Tabelle 47 angegebenen beobachteten Werthe der electrischen Volumenänderung τ für die Potentiale (Funkenzahl der Maassflasche) $q = 10$, $q = 20$, $q = 40$, nach dem Gesetz der Proportionalität mit P^2 oder q^2 reducirt auf das Potential $q = 10$; die letzte Columne die Mittel hieraus, welche wir als die bei $q = 10$ beobachteten Werthe nehmen; das dem Werth $q = 10$ entsprechende Potential berechnet sich aus der von Quincke (p. 575) gegebenen Formel:

$$P = \frac{5{,}569 \,.\, 18{,}90}{5{,}569 + c},$$

wo c die in Tabelle 42 angegebene Capacität des Condensators bezeichnet (die Capacität des Condensators 17 als Einheit genommen).

Setzen wir nun, analog wie bei den Cylindercondensatoren:

$$\frac{D}{8\pi}\left[1 + (1+\sigma)\frac{\delta}{r_1}\right] - \frac{E}{3}\frac{\delta^2}{P^2}\tau = L, \tag{20}$$

so gibt die Gl. (I_a) des § 3:

$$-\left(\sigma + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\delta}{r_1}\right)\frac{\alpha}{2} + \left(1 - \sigma + \frac{1+\sigma}{2}\frac{\delta}{r_1}\right)\frac{\beta}{2} = L. \tag{21}$$

Die nach Gl. (20) mittelst der in Tabelle II angegebenen Werthe von E und σ berechneten Werthe von L sind in der nachstehenden Tabelle III unter der Rubrik L_{47} aufgeführt.

In Tabelle 49 (p. 577) gibt Quincke für dieselben Condensatoren noch eine zweite Beobachtungsreihe, bei welcher P mittelst des Schraubenelectrometers gemessen wurde; die nachstehende Tabelle gibt die Werthe von $\tau \,.\, 10^6$ für $r = 10$, 20, 30, 40, reducirt auf das Potential $r = 10$ nach der Gleichung:

$$P = 1{,}1415\,(r + 2{,}445).$$

Zur Beurtheilung der Vergleichbarkeit beider Beobachtungsreihen habe ich in den mit:

$$\left(\frac{\tau \,.\, 10^6}{P^2}\right)_{47} \text{ und } \left(\frac{\tau \,.\, 10^6}{P^2}\right)_{49}$$

überschriebenen Columnen die Werthe aus den Tabellen 47 und 49, beide mit den Mittelwerthen von τ für das Potential $q = 10$, resp. $r = 10$ berechnet, neben einander gestellt;

diese Zahlen sollten für denselben Condensator gleich sein, ebenso wie die aus beiden Beobachtungsreihen berechneten, mit L_{47} und L_{49} bezeichneten Werthe von L; man sieht, dass dies nur annähernd zutrifft, ja dass die Werthe von L für denselben Condensator mehr voneinander abweichen, als die für die verschiedenen Condensatoren.

Tabelle III.

$\tau \cdot 10^6$.

Nr.	$r=10$	$r=20$	$r=30$	$r=40$	Mittel	$\left(\frac{\tau \cdot 10^6}{P^2}\right)_{47}$	$\left(\frac{\tau \cdot 10^6}{P^2}\right)_{49}$	L_{47}	L_{49}
17	0,520	0,529	0,547	0,424	0,505	0,003 284	0,002 502	0,227	0,304
61	0,251	0,277	0,285	0,277	0,272	0,000 925	0,001 348	0,288	0,219
60	0,077	0,077	0,081	0,083	0,079	0,000 238	0,000 391	0,262	0,185

Auch diese Beobachtungsreihen gestatten daher keinen weiteren Schluss, als dass α und β nicht beide $= 0$ sind, und geben eine ungefähre Anschauung von dem Werth der in Gl. (21) links stehenden Grösse.

Boltzmann[1]) findet aus dem in § 1, Gl. (a) angegebenen Ausdruck der electrischen Druckkraft für einen Kugelcondensator die Formel:

$$\tau = \frac{3}{8\pi E}[1 + (D^2 - 1)\sigma]\frac{P^2}{\delta^2},$$

dieselbe gibt z. B. für den Condensator 17 beim Potential $q=10$ $\tau = 6{,}68 . 10^{-6}$ statt des beobachteten Werthes $0{,}843 . 10^{-6}$.

Strassburg, December 1883.

VI. *Zur Berechnung des Potentials von Rollen; von Bernhard Weinstein.*

In der nachfolgenden Arbeit möchte ich Formeln und Methoden zur numerischen Berechnung des magnetischen Potentials coaxialer Rollen aufeinander und auf sich selbst geben und eine Anwendung von denselben auf die infolge ihrer Benutzung zur Bestimmung des Ohms so wichtigen

1) Boltzmann, Wien. Ber. 1. Separatabdr. p. 7. 1880.

Rollen der British Association[1]) und Heinrich Weber's[2]) machen.

Der erste Theil der Arbeit enthält allgemeine Differentialgleichungen für die potentielle Energie eines magnetischen Feldes auf eine Rolle, insbesondere für die von Rollen aufeinander, der zweite Theil eine neue Ableitung des Potentiales zweier coaxialer Drahtkreise aufeinander, der dritte eine Kritik und Verbesserung der von Maxwell[3]) für das Potential einer Rolle auf sich selbst aufgestellten Formel und die Angabe einer für numerische Rechnungen bequemen Formel für das Potential zweier coaxialer Rollen aufeinander, der vierte die Berechnung der Selbstinduction für die Rolle der British Association und Heinrich Weber's. Die ganze Arbeit ist namentlich dieses vierten Theiles wegen entstanden, ich wollte die so grosse Differenz, die sich zwischen dem nach Maxwell's Formeln berechneten und dem experimentell direct gefundenen Betrage des Potentiales dieser Rollen herausgestellt hat[4]), aufklären. Bei der Rolle der Britisch Association verschwindet diese Differenz fast ganz, bei der Weber's reducirt sie sich auf weniger als den dritten Theil ihres Betrages.

1) Differentialgleichungen für das Potential von Rollen. Eine Rolle von rechteckigem Querschnitt, deren äusserer Radius a_2, deren innerer a_1 ist, die die radiale Dicke $a_2 - a_1 = \varrho$ und die axiale α besitzt, und die gleichmässig und so gewunden ist, dass auf einer Längeneinheit in Richtung ihrer Axe n_1/α, auf einer in Richtung ihres Radius n_2/ϱ Windungen zu liegen kommen, befinde sich in einem magnetischen Felde, dessen Potential von Punkt zu Punkt wie die Function V variirt. Die Lage eines Punktes der Rolle soll dadurch fixirt werden, dass man den Abstand

1) Maxwell, Phil. Trans. 1865, p. 511; Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **32.** p. 119. 1881.

2) Heinrich Weber, Der Rotationsinductor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohms in absoluten Maassen. Leipzig, Teubner 1882.

3) Maxwell, l. c. p. 508.

4) Rayleigh, l. c. p. 117 ff. — Weber, l. c. p. 64.

y der Ebene der Windung, der er angehört, von einem festen Punkte der Axe, den Radius r dieser Windung und die Neigung ϑ der durch diesen Punkt und die Axe gelegten Ebene gegen eine feste, durch die Axe gehende Ebene angibt. Die Richtung y der Axe der Rolle rechne ich so, dass das magnetische Feld in seiner Stärke abnimmt, je weiter man auf ihr fortschreitet. Dehnt sich die Rolle radial aus, so schliesst sie immer mehr Kraftlinien ein, wird sie in Richtung ihrer Axe fortbewegt, so schliesst sie von ihnen immer mehr aus.

Ich zerlege die Rolle durch gegeneinander um den Winkel $d\vartheta$ geneigte axiale Ebenen und durch Ebenen, die die Axe senkrecht treffen und einander in gleichen Abständen dl folgen, in einzelne prismatische Elemente. Ist die Entfernung des Mittelpunktes eines solchen Elementes von der Axe der Rolle gleich a, so beträgt das Volumen dieses Elementes $a\,da\,dl\,d\vartheta$. Betrachtet man daher die Rolle wie einen metallischen Ring, dessen Substanz von parallelen, unmittelbar aneinander liegenden, überall mit der Stärke Eins fliessenden Strömen durchzogen wird, so besitzt jenes Element der Rolle $n_1 n_2\, da\, dl/\alpha\varrho$ Stromelemente von der Länge $a\,d\vartheta$, und wenn man es in einer zur Axe der Rolle senkrechten Richtung um die Strecke δr verschiebt, wird an ihm vom magnetischen Felde die Arbeit $n_1 n_2\, a\, da\, dl\, d\vartheta\, (\partial V/\partial y)\, \delta r/\varrho\alpha$ geleistet. Verschieben wir alle Elemente der Rolle in dieser Weise, so beträgt die gesammte vom magnetischen Felde geleistete Arbeit:

$$P = \delta r \frac{n_1 n_2}{\varrho\alpha} \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=y_1+l} a\, d\vartheta\, da\, dl,$$

unter y_1 den Abstand der Ebene der dem festen Punkte der Axe nächsten Windungen verstanden.

Wir transportiren jetzt die Rolle in Richtung ihrer Axe um die Strecke δy, da dabei die Anzahl der von ihr eingeschlossenen Kraftlinien abnimmt, so beträgt die vom Felde geleistete Arbeit:

$$Q = -\delta y \frac{n_1 n_2}{\alpha\varrho} \int_0^{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \int_0^{\alpha} \frac{\partial V_{y=y_1+l}}{\partial r}\, a\, d\vartheta\, da\, dl.$$

Bezeichnet aber M die potentielle Energie der Rolle im magnetischen Felde, so ist jene Arbeit auch $(\partial M/\partial r)\,\delta r$ und diese $(\partial M/\partial y)\,\delta y$, daher haben wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial M}{\partial r} = +\frac{n_1 n_2}{\alpha\varrho}\int_0^{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=y_1+l} d\vartheta\, a\, da\, dl,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{n_1 n_2}{\alpha\varrho}\int_0^{2\pi}\int_{a_1}^{a_2}\int_0^{\alpha}\frac{\partial V_{y=y_1+l}}{\partial r}\, d\vartheta\, a\, da\, dl.$$

Für den speciellen Fall $a_1 = a_2$ und $\alpha = 0$ gehen diese Gleichungen in die schon von Maxwell[1]) für die potentielle Energie eines Kreisstromes in einem magnetischen Felde aufgestellten Gleichungen über.

Ich verstehe unter h die Länge der Axe von dem festen Punkte derselben bis zur Ebene der Mittelwindung der Rolle und bezeichne mit A den Radius dieser Mittelwindung, dann wird $a = A + \xi$, wo ξ alle Werthe von $-\varrho/2$ bis $+\varrho/2$ durchläuft, ferner ist $a_1 = A - \varrho/2$, $a_2 = A + \varrho/2$. $\partial M/\partial r$ sollte die Geschwindigkeit bedeuten, mit der die potentielle Energie der Rolle variirt, wenn man ihre Weite verändert, da aber alle Windungen in gleicher Weise erweitert werden sollten, so wird $\partial M/\partial r$ durch $\partial M/\partial A$ zu ersetzen sein, und man bekommt:

$$(1_1)\qquad \frac{\partial M}{\partial A} = +\frac{n_1 n_2}{\varrho\alpha}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\varrho}{2}}^{+\frac{\varrho}{2}}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=h+l}(A+\xi)\, d\vartheta\, d\xi\, dl,$$

$$(1_2)\qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{n_1 n_2}{\varrho\alpha}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\varrho}{2}}^{+\frac{\varrho}{2}}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}}\frac{\partial V_{y=h+l}}{\partial A}(A+\xi)\, d\vartheta\, d\xi\, dl.$$

Daraus folgt, weil $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=h+l} = \frac{\partial (V_{y=h+l})}{\partial h}$ ist:

1) Maxwell, Lehrb. d. Electr. u. d. Magnetism., deutsche Ausg. von Weinstein, Berlin, Springer 1883, Art. 703.

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial A^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = \frac{n_1 n_2}{\alpha \varrho} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\varrho}{2}}^{+\frac{\varrho}{2}} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} \frac{\partial V_{y=h+l}}{\partial h} d\vartheta \, d\xi \, dl$$

als partielle Differentialgleichung für M, die unter Einhaltung einer der beiden Bedingungen unter (1) zu integriren ist.

Wenn eine Function P von zwei Variabeln ξ, η sich nach steigenden Potenzen von ξ und η entwickeln lässt, so ist nach dem Maclaurin'schen Satz[1]):

$$\frac{1}{\xi \eta} \int_{-\frac{\xi}{2}}^{+\frac{\xi}{2}} \int_{-\frac{\eta}{2}}^{+\frac{\eta}{2}} P d\xi \, d\eta = \left\{ P + \frac{1}{24} \left(\xi^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1920} \left(\xi^4 \frac{\partial^4 P}{\partial \xi^4} + \eta^4 \frac{\partial^4 P}{\partial \eta^4} \right) + \frac{1}{576} \xi^2 \eta^2 \frac{\partial^4 P}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \cdots \right\}_0,$$

wo die angehängte Null bezeichnet, dass in P und seinen Differentialquotienten nach Ausführung der Differentiationen $\xi = \eta = 0$ zu setzen ist. Wir haben also:

$$(2_b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial A^2} + \dfrac{\partial^2 M}{\partial y^2} = n_1 n_2 \displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial h} + \frac{1}{24} \left(\varrho^2 \frac{\partial^3 V_0}{\partial h \partial A^2} + \alpha^2 \frac{\partial^3 V_0}{\partial h^3} \right) \right. \\ \left. + \dfrac{1}{1920} \left(\varrho^4 \dfrac{\partial^5 V_2}{\partial h \partial A^4} + \alpha^4 \dfrac{\partial^5 V_0}{\partial h^5} \right) + \dfrac{1}{576} \varrho^2 \alpha^2 \dfrac{\partial^5 V_0}{\partial h^3 \partial A^2} + \cdots \right\}, \end{array} \right.$$

V_0 ist das Potential des magnetischen Feldes auf die einzelnen Punkte der Mittelwindung der Rolle. Schrumpft aber die Rolle zu dieser Mittelwindung zusammen, so wird $\alpha = \varrho = 0$, also nach (1_1):

$$\frac{\partial M_1}{\partial A} = \int_0^{2\pi} A \frac{\partial V_1}{\partial h} d\vartheta,$$

und darin bedeutet M_1 die potentielle Energie des magnetischen Feldes auf die Mittelwindung der Rolle. Hiernach bekommen wir:

---

1) Maxwell, Lehrb. d. Electr. und d. Magnet. Art. 699.

$$(2_c)\quad \frac{\partial^2 M}{\partial A^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}=n_1 n_2\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial A}+\frac{1}{24}\left(\varrho^2\frac{\partial^2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial A}\right)}{\partial A^2}+\alpha^2\frac{\partial^2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial A}\right)}{\partial h^2}\right)+\cdots\right\}.$$

Nun soll das magnetische Feld dadurch hervorgebracht sein, dass conaxial mit unserer Rolle eine zweite ähnlich geformte Rolle aufgestellt ist, deren jede Windung von einem Strome mit der Stärke Eins durchflossen wird. a sei der Radius der Mittelwindung dieser Rolle n_1', n_2', α', ϱ' mögen für sie dieselben Bedeutungen haben wie die entsprechenden Buchstaben für die erste Rolle. Ich rechne y von der Stelle, wo die Ebene der Mittelwindung dieser Rolle die gemeinschaftliche Axe schneidet, ersetze $\partial^2 M/\partial y^2$ durch $\partial^2 M/\partial h^2$ (h ist jetzt die Entfernung der Ebenen der Mittelwindungen der Rollen voneinander), und nenne M_1 das Potential der zweiten Rolle auf die Mittelwindung der ersten, M_1' das der ersten auf die Mittelwindung der zweiten. M gibt das Potential der beiden Rollen aufeinander und hat den beiden Gleichungen:

$$(a)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial A^2}+\dfrac{\partial^2 M}{\partial h^2}=n_1 n_2 M_1(A,\ \varrho,\ \alpha),\\[2ex] \dfrac{\partial^2 M}{\partial a^2}+\dfrac{\partial^2 M}{\partial h^2}=n_1' n_2' M_1'(a,\ \varrho',\ \alpha')\end{cases}$$

zu genügen, wobei:

$$M_1(A,\ \varrho,\ \alpha)=\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial A}+\frac{1}{24}\left(\varrho^2\frac{\partial^2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial A}\right)}{\partial A^2}+\alpha^2\frac{\partial^2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial M_1}{\partial A}\right)}{\partial h^2}\right)+\cdots$$

gesetzt ist.

Da Kreise wie Rollen von verschwindend kleinem Querschnitt zu betrachten sind, so haben wir zur Bestimmung von M_1, M_1' die vier Gleichungen:

$$(b)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2 M_1}{\partial a^2}+\dfrac{\partial^2 M_1}{\partial h^2}=n_1' n_2' M_0(a,\ \varrho',\ \alpha'),\ \dfrac{\partial^2 M_1}{\partial A^2}+\dfrac{\partial^2 M_1}{\partial h^2}=\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial M_1}{\partial A};\\[2ex] \dfrac{\partial^2 M_1'}{\partial A^2}+\dfrac{\partial^2 M_1'}{\partial h^2}=n_1 n_2 M_0(A,\ \varrho,\ \alpha),\ \dfrac{\partial^2 M_1'}{\partial a^2}+\dfrac{\partial^2 M_1'}{\partial h^2}=\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial M_1'}{\partial a}.\end{cases}$$

$M_0(\ )$ ist aus M_0 so gebildet wie $M_1(\ )$ aus M_1, und es bedeutet M_0 das Potential der Mittelwindungen der beiden Rollen aufeinander. Für dieses Potential finden wir aber durch weitere Specialisirung:

$$(c)\quad \frac{\partial^2 M_0}{\partial A^2}+\frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2}=\frac{1}{A}\frac{\partial M_0}{\partial A},\quad \frac{\partial^2 M_0}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial M_0}{\partial a}.$$

Etwas Neues lehren eigentlich die Gleichungen unter (a) und (b) nicht. Wenn man nämlich M_0 einmal bestimmt hat, so sind die Lösungen der Differentialgleichungen (b):

$$\text{(d)} \quad \begin{cases} M_1 = n_1' n_2' \left\{ M_0 + \frac{1}{24} \left(\varrho'^2 \frac{\partial^2 M_0}{\partial a^2} + \alpha'^2 \frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2} \right) + \cdots \right\}, \\ M_1' = n_1 n_2 \left\{ M_0 + \frac{1}{24} \left(\varrho^2 \frac{\partial^2 M_0}{\partial A^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 M_0}{\partial h^2} \right) + \cdots \right\} \end{cases}$$

und die von (a)

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} M = n_1 n_2 \left\{ M_1 + \frac{1}{24} \left(\varrho^2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial A^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial h^2} \right) + \cdots \right\}, \text{ oder:} \\ M = n_1' n_2' \left\{ M_1' + \frac{1}{24} \left(\varrho'^2 \frac{\partial^2 M_1'}{\partial a^2} + \alpha'^2 \frac{\partial^2 M_1'}{\partial h^2} \right) + \cdots \right\}, \end{cases}$$

d. h. M_1 wird aus M_0 durch zweifache, M durch vierfache Integration gewonnen.

Dagegen lehren die beiden Differentialgleichungen unter (c), dass man das Potential zweier Stromkreise aufeinander unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen durch Auflösung zweier simultaner partieller Differentialgleichungen muss finden können. Einzeln sind diese Gleichungen schon von Maxwell[1]) aufgestellt, zusammen sind sie aber noch nicht bearbeitet worden. Wenn ich das an dieser Stelle thue, so geschieht das aus folgenden Gründen. Das Potential zweier Drahtkreise aufeinander ist schon längst durch vollständige elliptische Functionen erster und zweiter Art dargestellt. Da aber diese Darstellung sich scheinbar nur auf Kreise, die im Verhältniss zu ihrer Weite voneinander genügend entfernt sind, bequem anwenden lässt, so hat Maxwell[2]) für zwei sehr nahe Kreise einen anderen Ausdruck abgeleitet. Inzwischen fehlt einerseits bei dieser Ableitung der Nachweis, dass die dort für die Coëfficienten der Entwickelung des Potentiales nach Potenzen von $A - a$ und h aufgestellten Gleichungen miteinander verträglich sind, ein solcher Nachweis ist aber nicht zu umgehen, weil bei dieser Ableitung zu viel Bedingungsgleichungen herauskommen. Andererseits ist das Endresultat nicht symmetrisch in Bezug

1) Maxwell, l. c. Art. 703.
2) Maxwell, Phil. Trans. 1865. p. 508.

auf A und a, wie es doch offenbar sein muss, und bietet dadurch der Interpretation bedeutende Schwierigkeiten.

2) Potential zweier Stromkreise aufeinander. Ich setze in dem Gleichungssystem (c) für M_0 das Product $\varphi\psi$ und bestimme φ derartig, dass aus den so veränderten Differentialgleichungen die ersten Derivirten von ψ herausfallen, dann wird:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial h}=0,\quad 2\frac{\partial\varphi}{\partial a}-\frac{1}{a}\varphi=0,\quad 2\frac{\partial\varphi}{\partial A}-\frac{1}{A}\varphi=0,\text{ also:}$$

$$(\alpha)\qquad \varphi=\text{const.}\sqrt{Aa}.$$

$$(\beta_1)\qquad a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial h^2}\right)-\tfrac{3}{4}\psi=0,\quad A^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial A^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial h^2}\right)-\tfrac{3}{4}\psi=0.$$

Ich führe eine neue Variable ζ ein, von der weiter nichts feststehen soll, als dass sie von A, a und y abhängt. Die Gleichungen für ψ gehen dann über in:

$$(\beta_2)\qquad \begin{cases} a^2\left(\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial h}\right)^2\right]+\frac{d\psi}{d\zeta}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial h^2}\right]\right)-\frac{3}{4}\psi=0, \\ A^2\left(\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial A}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial h}\right)^2\right]+\frac{d\psi}{d\zeta}\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial A^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial h^2}\right]\right)-\frac{3}{4}\psi=0. \end{cases}$$

Beiden Differentialgleichungen hat ψ gleichzeitig zu genügen, kann man ζ so bestimmen, dass die beiden Gleichungen:

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} a^2\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial h}\right)^2\right]=A^2\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial A}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial h}\right)^2\right], \\ a^2\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial h^2}\right]=A^2\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial A^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial h^2}\right] \end{cases}$$

identisch erfüllt werden, so werden die beiden Differentialgleichungen für ψ einander gleich, und man hat es nur noch mit einer zu thun. Der Anblick der Gleichungen γ lehrt sofort, dass sie durch jede Function von Aa erfüllt werden. Ferner zeigt eine Zusammenhaltung derselben mit gewissen Gleichungen aus der analytischen Geometrie, dass sie auch durch eine Function von $(A+a)^2+y^2$, deren Coëfficienten nur von A und a abhängen, befriedigt werden, man hat daher im einfachsten Fall $\zeta=A^\varkappa a^\varkappa(A+a^2+h^2)^\lambda$. Indem man das in die Gleichungen für ζ einsetzt, findet man, dass sie

identisch erfüllt werden, wenn man $\lambda = -\varkappa$ wählt. Die Function:

$$\zeta_1 = \text{Const.}\,\frac{Aa}{(A+a)^2+h^2}$$

ist also schon jedenfalls brauchbar, wenn aber ζ eine Lösung der Gleichungen (γ) ist, so ist es auch ζ_1^n, ferner auch jede lineare Function von ζ_1^n, also auch jede Potenz $(\alpha+\beta\zeta_1^n)^\lambda$ von dieser linearen Function u. s. f. Wie die allgemeinste Lösung für ζ beschaffen ist, wird hieraus klar, wir können uns aber schon mit der Lösung:

$$\zeta = (\alpha+\beta\zeta_1^n)^\lambda$$

begnügen, in der α, β, n, λ willkürliche Constanten sind, und:

(a) $$\zeta_1 = \frac{4Aa}{(A+a)^2+h^2}$$

gesetzt werden darf. Nun ist:

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial h}\right)^2=\lambda^2n^2\beta^2(\alpha+\beta\zeta_1^n)^{2\lambda-2}\zeta_1^{2n-2}\left(\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial h}\right)^2\right),$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial h^2}$$

$$=\lambda n\beta(\alpha+\beta\zeta_1^n)^{\lambda-2}\zeta_1^{n-2}\Big(n(\lambda-1)\beta\zeta_1^n+(n-1)(\alpha+\beta\zeta_1^n)\Big)\left(\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial h}\right)^2\right)$$

$$+\lambda n\beta(\alpha+\beta\zeta_1^n)^{\lambda-1}\zeta_1^{n-1}\left(\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial h^2}\right),$$

und darin ist:

$$\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial h}\right)^2=\frac{\zeta_1^4}{16A^2a^2}\left(\frac{(A^2-a^2+h^2)^2}{a^2}+4h^2\right)=\frac{1}{a^2}\zeta_1^2(1-\zeta_1),$$

$$\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial h^2}=-\frac{\zeta_1^2}{Aa}\left(1+\frac{\zeta_1}{4Aa}\left(\frac{A^2-a^2+h^2}{a}-2h^2\right)\right)=-\frac{\zeta_1^2}{a^2}.$$

Schreibt man also die Differentialgleichung für ψ in der Form:

(δ) $$\Psi_1\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}+\Psi_2\frac{d\psi}{d\zeta}+\tfrac{3}{4}\psi=0,$$ so hat man:

$$\Psi_1=\lambda^2n^2\beta^2(\alpha+\beta\zeta_1^n)^{2\lambda-2}\zeta_1^{2n}(\zeta_1-1),$$

$$\Psi_2=\lambda n\beta(\alpha+\beta\zeta_1^n)^{\lambda-2}\zeta_1^n\Big((\alpha+\beta\zeta_1^n)(n\lambda\zeta_1-n\lambda+1)-n(\lambda-1)\alpha(\zeta_1-1)\Big).$$

Wenn man jetzt ζ_1 durch seinen Werth:

$$\zeta_1=\left(\frac{\zeta^{\frac{1}{\lambda}}-\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{n}}$$

ersetzt, hängt die Differentialgleichung für ψ nur noch von ψ und ζ ab, ist also total.

Die Constanten α, β, n, λ können zunächst ganz beliebig gewählt werden, insofern wird sich ψ auf unendlich viele Arten darstellen lassen, inzwischen wird die Rücksicht sowohl auf die Einfachheit der Entwickelung als auf die Convergenz derselben für die Wahl dieser Constanten massgebend sein müssen. Um zunächst gebrochene Potenzen zu vermeiden, setze ich:

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad n = \frac{1}{\nu},$$

μ und ν sind immer noch willkürliche ganze Zahlen, ich nehme $\nu = 1$ an und bekomme:

$$\Psi_1 = \frac{\beta^{-1}}{\mu^2}\zeta^{2(1-\mu)}(\zeta^\mu - \alpha)^2(\zeta^\mu - \alpha - \beta),$$

$$\Psi_2 = \frac{\beta^{-1}}{\mu}\zeta^{1-2\mu}(\zeta^\mu - \alpha)\left[\zeta^\mu\left(\frac{\zeta^\mu - \alpha}{\mu} - \frac{\beta - \mu\beta}{\mu}\right) - \alpha\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)\left(\zeta^\mu - \alpha - \beta\right)\right].$$

Nun ist:

(b) $$\zeta = (\alpha + \beta\zeta_1)^{\frac{1}{\mu}},$$

und da ζ_1 zu Folge seiner unter (a) gegebenen Definition nicht grösser als Eins ist, so wird man α, β und μ so zu wählen haben, dass auch ζ nicht grösser als Eins und womöglich viel kleiner als diese Zahl ausfällt.

Im Falle, dass die beiden Kreise, um deren Potential es sich handelt, sehr verschieden grosse Radien haben, oder dass ihre Ebenen voneinander hinlänglich weit entfernt sind, wird ζ_1 an sich schon gegen Eins klein sein, man wird dann am besten wählen:

$$\alpha = 0, \ \beta = 1,$$

also:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\mu^2}\zeta^2\left(\zeta^\mu - 1\right), \qquad \Psi_2 = \frac{1}{\mu^2}\zeta\left(\zeta^\mu - 1\right) + \frac{1}{\mu}\zeta.$$

Die Differentialgleichung für ψ ist in diesem Falle:

$$\zeta^2(\zeta^\mu - 1)\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \zeta(\zeta^\mu - 1 + \mu)\frac{d\psi}{d\zeta} + \tfrac{3}{4}\mu^2\psi = 0.$$

Da in dieser Gleichung nur ganze positive Potenzen von ζ vertreten sind, wird man versuchen ihr durch eine Potenzreihe zu genügen. Ich setze also:

$$\psi = \sum_0^\infty A_\varkappa \zeta^\varkappa ,$$

die Constanten $A_\varkappa$ sind dann so zu wählen, dass:

$$\zeta^2(\zeta^\mu - 1)\sum_0^\infty (\varkappa+2)(\varkappa+1)A_{\varkappa+2}\zeta^\varkappa$$

$$+\zeta(\zeta^\mu - 1 + \mu)\sum_0^\infty (\varkappa+1)A_{\varkappa+1}\zeta^\varkappa + \tfrac{3}{4}\mu^2\sum_0^\infty A_\varkappa\zeta^\varkappa = 0$$

für alle Werthe des ζ identisch erfüllt wird. Man hat also zur Bestimmung dieser Constanten das System der Gleichungen:

$$(\varkappa-\mu)^2 A_{\varkappa-\mu} + [\varkappa(\mu-\varkappa) + \tfrac{3}{4}\mu^2]A_\varkappa = 0, \qquad \varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Da μ eine ganze positive Zahl sein sollte, so ist zunächst entweder $A_0 = 0$, oder $(\frac{3}{4})\mu^2 = 0$, weil aber μ jedenfalls grösser als 0 sein muss, wird man $A_0 = 0$ zu setzen haben. Für $\varkappa = 1$ ist, weil $A_0 = 0$ und μ mindestens gleich Eins ist, entweder $A_1 = 0$, oder $\mu - 1 + \frac{3}{4}\mu^2 = 0$; die letzte Gleichung kann durch keine positive Zahl erfüllt werden, daher ist auch $A_1 = 0$. Allgemein würden wir haben, dass entweder $A_\varkappa = 0$, oder $\varkappa(\mu-\varkappa) + \frac{3}{4}\mu^2 = 0$ sein muss. Aus letzterer Gleichung folgt, dass dann μ entweder $-2\varkappa$, oder $+\frac{2}{3}\varkappa$ sein muss. $-2\varkappa$ ist aber nur dann positiv, wenn $\varkappa$ negativ ist, da dann die Entwickelung für ψ nicht mehr convergiren würde, kann μ nur gleich $+\frac{2}{3}\varkappa$ werden. Wählt man μ so, so wird das erste nicht verschwindende A zum Index ein Vielfaches von drei haben, und ferner wird μ eine gerade Zahl. Welcher geraden Zahl man μ gleich setzt, ist ganz gleichgiltig, die Reihenentwickelung für ψ ist, weil $\zeta = \zeta_1^{1/\mu}$ sein sollte, immer dieselbe, ich setze daher $\mu = 2$. Nunmehr bekommen wir:

$$(1_1) \qquad \zeta = \frac{2\sqrt{A}\sqrt{a}}{\sqrt{(A+a)^2 + h^2}},$$

$$(2_1) \qquad \zeta^2(\zeta^2-1)\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \zeta(\zeta^2+1)\frac{d\psi}{d\zeta} + 3\psi = 0,$$

$$\psi = \zeta^3 \sum_0^\infty A_{2\varkappa} \zeta^{2\varkappa}.$$

$$(2\varkappa+1)^2 A_{2\varkappa-2} - [(2\varkappa+3)(2\varkappa+1) - 3] A_{2\varkappa} = 0,$$
$$\varkappa = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Aus der letzten Gleichung folgt:

$$A_{2\varkappa} = \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots . (2\varkappa-1)^2 (2\varkappa+1)^2}{(2\varkappa+3)\,2\varkappa+1-3)(2\varkappa+1\ 2\varkappa-1-3)\ldots(5.3-3)} A_0,$$

oder nach leichter Umformung:

$$A_{2\varkappa} = \frac{1}{2^{2\varkappa}} \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots . (2\varkappa-1)^2 (2\varkappa+1)^2}{1.3.2.4.3.5.4.6 \ldots \varkappa(\varkappa+2)} A_0,$$

$$= \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2^{2\varkappa}\ 1} \left(\frac{1.3.5.7 \ldots . (2\varkappa+1)}{1.2.3.4 \ldots . (\varkappa+2)} \right)^2 A_0.$$

Das eruirte Integral der Differentialgleichung lautet also:

$$\psi = A_0 \zeta^3 \sum_0^\infty \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2^{2\varkappa-1}} \left(\frac{1.3.5.7 \ldots . (2\varkappa+1)}{(\varkappa+2)!} \zeta^\varkappa \right)^2.$$

Bezeichnen wir dieses particulare Integral mit ψ_1, so wird das allgemeine:

$$\psi = \psi_1 \left\{ C_1 + C_2 \int \frac{d\zeta}{\psi_1^{\,2}} e^{-\int \frac{\zeta^2+1}{\zeta(\zeta^2-1)} d\zeta} d\zeta \right\}.$$

Für zwei voneinander unendlich weit abstehende Kreise ist ψ_1^{-1} unendlich gross wie 0^{-3}, und da:

$$e^{-\int \frac{\zeta^2+1}{\zeta(\zeta^2-1)} d\zeta} = \frac{\zeta}{\zeta^2-1},$$

nur unendlich klein wird wie 0^{+1}, das Potential zweier solcher Kreise aber verschwinden muss, so hat man $C_2 = 0$ zu setzen.

Hiernach wird das magnetische Potential zweier sehr verschieden grosser oder voneinander weit abstehender Kreise:

$$(3_1) \quad M = C . \sqrt{Aa}\, \zeta^3 \sum_0^\infty \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)}{2^{2\varkappa-1}} \left(\frac{1.3.5.7 \ldots (2\varkappa+1)}{(\varkappa+2)!} \zeta^\varkappa \right)^2.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Darstellung mit der sonst üblichen[1]) bis auf eine von der Wahl der Einheiten abhängige multiplicirende Constante identisch ist.

1) Maxwell, Lehrb. Art. 696. Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen p. 176.

Die eben abgeleitete Reihenentwickelung für M convergirt immer langsamer, je mehr sich ζ der Eins nähert. Wenn daher die beiden Kreise einander an Grösse ziemlich gleich und zudem voneinander nur wenig entfernt sind, wie das thatsächlich bei den meisten bisher benutzten Inductorrollen der Fall ist, wird dieser Ausdruck für M nicht recht verwendbar sein.

In diesem zweiten Falle, wo also $A - a$ und h kleine Grössen gegen A und a sind, ist ζ_1 nahezu gleich Eins, da nun:

$$\zeta = (\alpha + \beta\zeta_1)^{\frac{1}{\mu}}$$

war, so wird man jetzt α und β so zu wählen haben, dass ζ gegen Eins sehr klein ist, wenn ζ_1 nahezu gleich Eins ist. Man muss also setzen:

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -1.$$

Damit wird:

$$\zeta = (1 - \zeta_1)^{\frac{1}{\mu}},$$

$$\Psi_1 = -\frac{1}{\mu^2}(\zeta^\mu - 1)^2 \zeta^{2-\mu}, \qquad \Psi_2 = -\frac{1}{\mu^2}(\zeta^\mu - 1)^2 \zeta^{1-\mu},$$

also die Differentialgleichung für ψ:

$$\zeta^{2-\mu}(\zeta^\mu - 1)^2 \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \zeta^{1-\mu}(\zeta^\mu - 1)^2 \frac{d\psi}{d\zeta} - \tfrac{3}{4}u^2\psi = 0.$$

Ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung lässt sich leicht durch Reihenentwickelung finden, das allgemeine würde man dann nach der schon benutzten Regel bilden können, da man aber dabei auf Convergenzschwierigkeiten stösst, so habe ich es vorgezogen, einen anderen Weg einzuschlagen.

Man weiss, dass das Potential eines wirklich unendlich dünnen Stromleiters auf sich selbst logarithmisch unendlich gross wird, für einen solchen Stromleiter ist dann $dM/d\zeta$ unendlich gross, wie $1/\zeta$ und $d^2M/d\zeta^2$ unendlich gross wie $1/\zeta^2$ für $\zeta = 0$. Wenn also die Peripherien zweier Stromleiter einander sehr nahe liegen, so erlangen die ersten Glieder unserer Differentialgleichung ein mächtiges Uebergewicht über das letzte, und es wird:

$$\zeta\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \frac{d\psi}{d\zeta} = 0,$$

d. h. $\zeta = C_1 \log \zeta + C_2$. Diese Form können wir, wenn auch ζ nicht unendlich klein ist, immer noch beibehalten, falls wir unter C_1 und C_2 Function von ζ verstehen. Ich setze also:

$$\psi = u \log \zeta + v,$$

dann wird ψ eine Lösung unserer Differentialgleichung sein, wenn:

$$\zeta^{2-\mu}(\zeta^\mu - 1)^2 \frac{d^2u}{d\zeta^2} + \zeta^{1-\mu}(\zeta^\mu - 1)^2 \frac{dv}{d\zeta} - \tfrac{3}{4}\mu^2 u = 0,$$

$$\zeta^{2-\mu}(\zeta^\mu - 1)^2 \frac{d^2v}{d\zeta^2} + \zeta^{1-\mu}(\zeta^\mu - 1)^2 \frac{dv}{d\zeta} - \tfrac{3}{4}\mu^2 v + 2\frac{du}{d\zeta}\zeta^{1-\mu}(\zeta^\mu - 1)^2$$

$$- \frac{u}{\zeta}(\zeta^\mu - 1)^2\left(\frac{\zeta^{2-\mu}}{\zeta} - \zeta^{1-\mu}\right) = 0.$$

Die erste Differentialgleichung ist genau von der Form der Differentialgleichung für ψ, die zweite ist noch etwas complicirter, man hat aber den Vortheil, von beiden nur particuläre Integrale zu gebrauchen. Setzt man:

$$u = \sum_0^\infty A_\varkappa \zeta^\varkappa,$$

so wird u ein Integral der ersten Differentialgleichung, wenn man die A so bestimmt. dass:

$$(\varkappa - 2\mu + 1)^2 A_{\varkappa-2\mu+1} + [2(\varkappa - \mu + 1)^2 + \tfrac{3}{4}\mu^2] A_{\varkappa-\mu+1} + (\varkappa + 1)^2 A_{\varkappa+1} = 0,$$

$$\varkappa = -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

wird. μ ist zwar eine beliebige ganze positive Zahl, man überzeugt sich aber leicht, dass die Reihenentwickelung für u, gleichgiltig welchen Werth man dieser Grösse ertheilt, immer dieselbe Form aufweist. Ich mache daher wie früher $\mu = 2$. es wird dann:

$$\zeta = \sqrt{1 - \frac{4Aa}{(A+a)^2 + h^2}},$$

also gleich dem Complement der früher mit demselben Buchstaben bezeichneten Grösse.

Die Gleichung für die A reducirt sich nunmehr auf:

$$(\varkappa - 3)^2 A_{\varkappa-3} - [2(\varkappa - 1)^2 + 3] A_{\varkappa-1} + (\varkappa + 1)^2 A_{\varkappa+1} = 0.$$

Da hiernach alle A mit ungeraden Indices verschwinden, so muss u nach geraden Potenzen von ζ fortschreiten, und es wird:

$$u = \sum_0^\infty A_{2\varkappa}\zeta^{2\varkappa}, \quad (\varkappa-1)^2 A_{2\varkappa-2} - (2\varkappa^2 + \tfrac{3}{4})A_{2\varkappa} + (\varkappa+1)^2 A_{2\varkappa+2} = 0,$$

also:

$$A_0 = A_0,\ A_2 = \frac{3}{4}A_0,\ A_4 = \frac{33}{64}A_0,\ A_6 = \frac{107}{256}A_0,\ A_8 = \frac{5913}{16384}A_0, \ldots.$$

$$u = A_0\left\{1 + \frac{3}{4}\zeta^2 + \frac{33}{64}\zeta^4 + \frac{107}{256}\zeta^6 + \frac{5913}{16384}\zeta^8 + \ldots.\right\}.$$

Die Differentialgleichung für v lautet nunmehr:

$$\zeta(\zeta^2-1)^2\frac{d^2v}{d\zeta^2} + (\zeta^2-1)^2\frac{dv}{d\zeta} - 3\zeta v + 2(\zeta^2-1)^2\sum_0^\infty (2\varkappa+2)A_{2\varkappa+2}\zeta^{2\varkappa+1} = 0.$$

Ich setze:

$$v = \sum_0^\infty B_{2\varkappa}\zeta^{2\varkappa}$$

und erhalte zur Bestimmung der B die Gleichungen:

$$(\varkappa-1)^2 B_{2\varkappa-2} - (2\varkappa^2+\tfrac{3}{4})B_{2\varkappa} + (\varkappa+1)^2 B_{2\varkappa+2} + (\varkappa-1)A_{2\varkappa-2} - 2\varkappa A_{2\varkappa} + (\varkappa+1)A_{2\varkappa+2} = 0.$$

Daraus folgt, wenn $B_0 - A_0$ durch B_0 und B_0 durch B_0' ersetzt wird:

$$B_0' = B_0 + A_0,\ B_2 = \frac{3}{4}B_0,\ B_4 = \frac{33}{64}B_0 + \frac{15}{128}A_0,$$

$$B_6 = \frac{107}{256}B_0 + \frac{185}{1536}A_0,\ B_8 = \frac{5913}{16384}B_0 + \frac{7465}{65536}A_0, \ldots.$$

Hiernach haben wir:

$$(1_2) \qquad \zeta = \sqrt{1 - \frac{4Aa}{(A+a)^2+h^2}},$$

$$(2_2) \qquad \zeta(\zeta^2-1)^2\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + (\zeta^2-1)^2\frac{d\psi}{d\zeta} - 3\zeta\psi = 0,$$

$$\psi = \left\{1 + \frac{3}{4}\zeta^2 + \frac{33}{64}\zeta^4 + \frac{107}{256}\zeta^6 + \frac{5913}{16384}\zeta^8 + \cdots\right\}\left\{\frac{1}{2}A_0\log\zeta^2 + B_0\right\} + A_0\left\{1 + \frac{15}{128}\zeta^4 + \frac{185}{1536}\zeta^6 + \frac{7465}{65536}\zeta^8 + \cdots\right\}.$$

Die Werthe der Constanten A_0, B_0 hängen einerseits von der Wahl des Maasssystemes und andererseits von der Bedingung für die Grenzlage der Kreisleiter ab. Wenn nun die Ebenen der beiden Kreisleiter zusammenfallen und die

Peripherien derselben einander so nahe liegen, dass man $A - a$ gegen A und a als sehr klein ansehen darf, so wird[1]):

$$\psi = A_0 \left(\log \frac{4(A+a)}{A-a} - 2 \right).$$

Daher haben wir, wenn wir A_0 vertauschen mit $-A_0$:

$$B_0 = -A_0 (1 - \log 4)$$

zu setzen.

Führen wir noch das magnetische Maasssystem ein, so resultirt:

$$(3_2) \quad \left\{ M = 4\pi \sqrt{Aa} \left\{ \left(1 + \frac{3}{4}\zeta^2 + \frac{33}{64}\zeta^4 + \frac{107}{256}\zeta^6 + \frac{5913}{16384}\zeta^8 + \cdots \right) \left(\log \frac{4}{\zeta} - 1 \right) \right. \right.$$
$$\left. \left. - \left(1 + \frac{15}{128}\zeta^4 + \frac{185}{1536}\zeta^6 + \frac{7465}{65536}\zeta^8 + \cdots \right) \right\} \right.$$

Wenn dieses letztere Potential richtig ist, so muss es durch geeignete Transformation aus dem ersteren unter (3_1) gegebenen abgeleitet werden können. In der That lässt sich das mit Hülfe bekannter Legendre'scher Entwickelungen für die vollständigen Integrale erster und zweiter Art, wenn ihr Modul der Eins sehr nahe kommt, ausführen.

Der Form nach stimmt dieser Ausdruck für das Potential nahe gelegener Kreisbahnen mit dem von Maxwell gegebenen[2]) und seitdem vielfach angewandten:

$$M = 4\pi a \left\{ \left(1 + \frac{A-a}{2a} \right.\right.$$
$$\left. + \frac{(A-a)^2 + 3h^2}{16a^2} - \frac{(A-a)^3 + 3(A-a)y^2}{32a^3} + \cdots \right) \log \sqrt{\frac{8a}{(A-a)^2 + h^2}}$$
$$\left. + \left(-2 - \frac{A-a}{2a} + \frac{3(A-a)^2 - h^2}{16a^2} - \frac{(A-a)^3 - 6(A-a)y^2}{48a^3} + \cdots \right) \right\}$$

nicht überein, durch geeignete Entwickelungen kann er aber in diesen übergeführt werden.

Beide Darstellungen (3_1) und (3_2) für M lassen sich, wie schon bemerkt, durch die eine:

$$(3) \qquad M = -4\pi \sqrt{Aa} \left(\frac{2}{\zeta}(E - K) + \zeta K \right)$$

1) Maxwell, l. c. Art. 704, es folgt das auch aus der ersten Darstellung für ψ.

2) Maxwell, l. c. Art. 705.

$$\zeta = \frac{2\sqrt{A}\sqrt{a}}{\sqrt{(A+a)^2+h^2}}$$

zusammenfassen, nur hat man bei voneinander genügend entfernten Drahtkreisen:

$$E = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{2x-1}\left(\frac{1.3.5\ldots(2x-1)}{2.4.6\ldots 2x}\right)^2 \zeta^{2x},$$

$$K = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\sum_1^\infty \left(\frac{1.3.5\ldots(2x-1)}{2.4.6\ldots 2x}\right)^2 \zeta^{2x}$$

zu setzen, dagegen bei Kreisen, deren Peripherien einander hinlänglich nahe sind:

$$E = 1 + \frac{1}{2}\left(\log\frac{4}{\zeta'} - \frac{1}{1.2}\right)\zeta'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}\left(\log\frac{4}{\zeta'} - 1 - \frac{1}{3.4}\right)\zeta'^4$$
$$+ \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{5}{6}\left(\log\frac{4}{\zeta'} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{1}{5.6}\right)\zeta'^6 + \cdots.$$

$$K = \log\frac{4}{\zeta'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\log\frac{4}{\zeta'} - 1\right)\zeta'^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\log\frac{4}{\zeta'} - 1 - \frac{2}{3.4}\right)\zeta'^4$$
$$+ \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\log\frac{4}{\zeta'} - 1 - \frac{2}{3.4} - \frac{2}{5.6}\right)\zeta'^6 + \cdots.$$

ζ' ist der Complementmodul zu ζ, also:

$$\zeta' = \sqrt{1 - \frac{4Aa}{(A+a)^2+h^2}},$$

die Logarithmen sind natürliche.

3$_a$) Potential von Rollen aufeinander. Das Potential von Rollen aufeinander berechnet man am bequemsten nach den Schlussgleichungen (d) und (e) des ersten Abschnittes. Zwar hat Maxwell[1]) gezeigt, wie man dasselbe durch das Potential von Rollen auf sich selbst zu ersetzen vermag, allein erstens lässt sich seine Methode nur auf Rollen von gleicher radialer Dicke anwenden, und zweitens hat man in jedem Falle vier oder mindestens drei solche Potentiale zu berechnen, und das ist nach den von ihm gegebenen Formeln eine mühsame Arbeit. Kirchhoff[2]) hat schon im Jahre 1849 Potentiale von Rollen aufeinander

1) **Maxwell**, Phil. Trans. 1865. p. 509.
2) **Kirchhoff**, Gesammelte Abhandlungen, p. 130, 131.

numerisch ausgewerthet, explicite Formeln hat er aber nicht angegeben.

Bezeichnet man mit a_1, α_1, ϱ_1, n_1; a_2, α_2, ϱ_2, n_2 mittleren Radius, axiale Dicke und Anzahl der Windungen der ersten, bezüglich der zweiten Rolle, setzt voraus, dass die Rollen coaxial sind, und dass ihre Mittelwindungen voneinander um h abstehen, so hat man nach den citirten Gleichungen (d) und (e) für das Potential der Rollen aufeinander:

$$\begin{aligned}\mathrm{M} = n_1 n_2 \Big\{ & M + \frac{1}{24}\left(\varrho_1^{\,2}\frac{\partial^2 M}{\partial a_1^{\,2}} + \varrho_2^{\,2}\frac{\partial^2 M}{\partial a_2^{\,2}} + (\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2})\frac{\partial^2 M}{\partial h^2}\right) \\ & + \frac{1}{1920}\left(\varrho_1^{\,4}\frac{\partial^4 M}{\partial a_1^{\,4}} + \varrho_2^{\,4}\frac{\partial^4 M}{\partial a_2^{\,4}} + (\alpha_1^{\,4}+\alpha_2^{\,4})\frac{\partial^4 M}{\partial h^4}\right) \\ & + \frac{1}{576}(\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2})\left(\varrho_1^{\,2}\frac{\partial^4 M}{\partial a_1^{\,2}\partial h^2} + \varrho_2^{\,2}\frac{\partial^4 M}{\partial a_2^{\,2}\partial h^2}\right) + \cdots \Big\}.\end{aligned}$$

Hier ist M das Potential der Mittelwindungen der Rollen aufeinander, also Function von a_1, a_2, h.

Aus den Differentialgleichungen, denen M zu genügen hat, bekommt man aber:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2} = -\frac{\partial^2 M}{\partial h^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial M}{\partial a},$$

$$\frac{\partial^4 M}{\partial a^4} = +\frac{\partial^4 M}{\partial h^4} - \frac{2}{a}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial a}\right) + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 M}{\partial h^2},$$

$$\frac{\partial^4 M}{\partial a^2 \partial h^2} = -\frac{\partial^4 M}{\partial h^4} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial a}\right).$$

Daher wird:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = n_1 n_2 \Big\{ M + \frac{1}{24}\left(\frac{\varrho_1^{\,2}}{a_1}\frac{\partial M}{\partial a_1} + \frac{\varrho_2^{\,2}}{a_2}\frac{\partial M}{\partial a_2}\right) \\ \quad + \frac{1}{24}\left(\alpha_1^{\,2} - \varrho_1^{\,2} + \alpha_2^{\,2} - \varrho_2^{\,2} + \frac{1}{80}\left(\frac{\varrho_1^{\,4}}{a_1^{\,2}} + \frac{\varrho_2^{\,4}}{a_2^{\,2}}\right)\right)\frac{\partial^2 M}{\partial h^2} \\ \quad - \frac{1}{960}\left(\frac{\varrho_1^{\,4}}{a_1}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial a_1}\right) + \frac{\varrho_2^{\,4}}{a_2}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial a_2}\right)\right) \\ \quad + \frac{\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}}{576}\left(\frac{\varrho_1^{\,2}}{a_1}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial a_1}\right) + \frac{\varrho_2^{\,2}}{a_2}\frac{\partial^2}{\partial h^2}\left(\frac{\partial M}{\partial a_2}\right)\right) \\ + \frac{1}{192}\left(\frac{\varrho_1^{\,4}+\varrho_2^{\,4}+\alpha_1^{\,4}+\alpha_2^{\,4}}{10} - \frac{(\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2})(\varrho_1^{\,2}+\varrho_2^{\,2})}{3}\right)\frac{\partial^4 M}{\partial h^4} + \cdots \Big\} \end{cases}$$

Zur Berechnung der Differentialquotienten von M hat man, wenn:

$$\zeta = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{(a_1+a_2)^2+h^2}}, \qquad M_n = \frac{d^n M}{d\zeta^n}$$

gesetzt wird:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial a} = M_1 \dfrac{\partial \zeta}{\partial a} + \dfrac{1}{2a} M_1, \qquad \dfrac{\partial^2 M}{\partial h^2} = M_2 \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial h}\right)^2 + M_1 \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2}, \\ \dfrac{\partial^2 M}{\partial h^2 \partial a} = M_3 \dfrac{\partial \zeta}{\partial a}\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial h}\right)^2 + M_2 \left(2 \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial a \partial h}\dfrac{\partial \zeta}{\partial h} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial a}\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2}\right) \\ \qquad + M_1 \dfrac{\partial^3 \zeta}{\partial h^3} + \dfrac{1}{2a}\dfrac{\partial^2 M}{\partial h^2}, \\ \dfrac{\partial^4 M}{\partial h^4} = M_4 \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial h}\right)^4 + M_3 6 \left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial h}\right)^2 \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2} \\ + M_2 \left(3\left(\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2}\right)^2 + 4 \dfrac{\partial \zeta}{\partial h}\dfrac{\partial^3 \zeta}{\partial h^3}\right) + M_1 \dfrac{\partial^4 \zeta}{\partial h^4} \end{cases}$$

u. s. f.

Von den Differentialquotienten für M nach ζ braucht man nur den ersten zu berechnen, da alle folgenden durch die im zweiten Abschnitt unter (2_1) für ψ aufgestellte Differentialgleichung schon bestimmt sind.

Ich setze:

$$\zeta = \sin\lambda, \qquad \frac{h^2}{4a_1 a_2} = \mu \operatorname{ctg}^2\lambda, \qquad \mu = \frac{h^2}{(a_2-a_1)^2+h^2},$$

$$\nu_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 + h^2}{h^2}, \qquad \nu_2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + h^2}{h^2},$$

dann wird:

$$(\beta)\quad \begin{cases} M = -\dfrac{1}{\sin\lambda}\left((E-K)(1+\cos^2\lambda) + E\sin^2\lambda\right) 4\pi\sqrt{a_1 a_2}, \\ M_1 = \left(2\dfrac{E-K}{\sin^2\lambda} + \dfrac{E}{\cos^2\lambda}\right) 4\pi\sqrt{a_1 a_2}, \\ M_2 = \dfrac{2-\cos^2\lambda}{\sin\lambda\cos^2\lambda} M_1 + \dfrac{3}{\sin^2\lambda\cos^3\lambda} M, \\ M_3 = \dfrac{8 - 7\cos^2\lambda + 2\cos^4\lambda}{\sin^2\lambda\cos^4\lambda} M_1 + \dfrac{3(4-5)\cos^2\lambda}{\sin^3\lambda\cos^4\lambda} M, \\ M_4 = 6\dfrac{8 - 12\cos^2\lambda + 4\cos^4\lambda - \cos^6\lambda}{\sin^3\lambda\cos^6\lambda} M_1 + \dfrac{8 - 15\cos^2\lambda + 9\cos^4\lambda}{\sin^4\lambda\cos^6\lambda} M. \end{cases}$$

u. s. f.

Ferner hat man:

$$(\gamma)\quad \begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial h} = -\frac{\mu}{h}\sin\lambda\cos^2\lambda, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial h^2} = -\frac{\mu}{h^2}\sin\lambda\cos^2\lambda(1-3\mu\cos^2\lambda), \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial h^3} = 3\frac{\mu^2}{h^3}\sin\lambda\cos^4\lambda(3-5\mu\cos^2\lambda), \\ \frac{\partial^4 \zeta}{\partial h^4} = 3\frac{\mu^2}{h^4}\sin\lambda\cos^4\lambda(3-30\mu\cos^2\lambda+35\mu^2\cos^4\lambda), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial a} = \frac{\nu\mu}{2a}\cos\lambda\cos^2\lambda, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial a \partial h} = \frac{2\mu}{h\,2a}\sin\lambda\cos^2\lambda\left(1-\frac{3\mu\nu}{2}\cos^2\lambda\right), \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial a \partial h^2} = \frac{2\mu}{h^2 2a}\sin\lambda\cos^2\lambda\left(1-\frac{3\mu\nu}{2}\cos^2\lambda+\frac{15\mu^2\nu}{2}\cos^4\lambda\right). \end{cases}$$

Aus den drei Gleichungssystemen unter (α), (β), (γ) ergeben sich dann die Werthe der partiellen Differentialquotienten von M, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(2)\quad \begin{cases} 4\pi\sqrt{a_1 a_2}\,\frac{E-K}{\sin\lambda} = A, \quad 4\pi\sqrt{a_1 a_2}\,E\sin\lambda = B, \\ a = a_1, = a_2; \quad \nu = \nu_1, = \nu_2. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} M = -A[1+\cos^2\lambda] - B, \\ \frac{\partial M}{\partial a} = -\frac{A}{2a}[1-(2\mu\nu-1)\cos^2\lambda] - \frac{B}{2a}[1-\mu\nu], \\ \frac{\partial^2 M}{\partial h^2} = \frac{\mu}{h^2}\left(A\cos^2\lambda[\mu-2+\mu\cos^2\lambda]+B[2\mu-1-\mu\cos^2\lambda]\right), \\ \frac{\partial^3 M}{\partial a\,\partial h^2} = \frac{\mu}{2a h^2}\big(A\cos^2\lambda[1+\mu+(1-\mu\nu)(1-28\mu) \\ \quad -\mu(27+\nu-22\mu\nu)\cos^2\lambda+4\mu^2\nu\cos^4\lambda] \\ \quad +B[1+2\mu(1-\nu)-8\mu(1-\mu\nu) \\ \quad -\mu(21-\nu-23\mu\nu)\cos^2\lambda-4\mu^2\nu\cos^4\lambda]\big), \\ \frac{\partial^4 M}{\partial h^4} = 3\frac{\mu^2}{h^4}\big(A\cos^2\lambda[1-8\mu+8\mu^2+(1+4\mu-3\mu^2)\cos^2\lambda \\ \quad -(8\mu+3\mu^2)\cos^4\lambda+8\mu^2\cos^6\lambda] \\ \quad +B[2(1-8\mu+8\mu^2)-(1-2\mu)\cos^2\lambda \\ \quad +(8\mu-3\mu^2)\cos^4\lambda-8\mu^2\cos^6\lambda]\big), \end{cases}$$

u. s. f.

Die Gleichungen (1) bis (3) in Verbindung mit den Definitionsgleichungen für $\sin\lambda$, μ, ν_1, ν_2 enthalten alles, was zur Berechnung des Potentials zweier coaxialer Rollen nöthig ist. In der Praxis wird man wohl in den wenigsten Fällen soviel Glieder zu berücksichtigen brauchen, wie hier angegeben sind.

Die Grössen A und B lassen sich für kleine Modula $\sin\lambda$ bequem aus den Legendre'schen Tafeln[1]) für die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung berechnen. Wenn aber $\sin\lambda$ sich der Eins nähert, die Rollen also im Verhältniss zu ihrer Grösse einander nahe liegen, kann man diese für Zehntelgrade berechneten Tafeln wegen der mühsamen Interpolation nur schwer benutzen, man thut dann am besten, die betreffenden Grössen direct nach den am Ende des zweiten Abschnittes angeführten Formeln für E und K auszurechnen, wobei man selten in die Lage kommen wird, mehr als drei oder vier Glieder berücksichtigen zu müssen.

Am wichtigsten ist bisher für die Praxis der Fall, wo die beiden Rollen einander in ihren Dimensionen ganz gleich sind. Wir haben dann:

$$a_1=a_2=a,\ \varrho_1=\varrho_2=\varrho,\ \alpha_1=\alpha_2=\alpha,\ \mu=\nu=1,\ \frac{h^2}{4a^2}=\operatorname{cotg}^2\lambda,$$

also:

$$\mathbf{M}=n_1n_2\left\{M+\frac{1}{12}\frac{\varrho^2}{a}\frac{\partial M}{\partial a}+\frac{1}{12}\left(\alpha^2-\varrho^2+\frac{\varrho^2}{80a^2}\right)\frac{\partial^2M}{\partial h^2}-\frac{\varrho^2}{48a}\left(\frac{\varrho^2}{10}-\frac{\alpha^2}{3}\right)\frac{\partial^3M}{\partial h^2\partial a}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{48}\left(\frac{\varrho^4+\alpha^4}{20}-\frac{\alpha^2\varrho^2}{3}\right)\frac{\partial^4M}{\partial h^4}+\cdots\right\},$$

$$\frac{\partial M}{\partial a}=-\frac{1}{2a}A\sin^2\lambda,$$

$$\frac{\partial^2M}{\partial h^2}=-\frac{1}{h^2}(A\sin^2\lambda\cos^2\lambda-B\sin^2\lambda),$$

$$\frac{\partial^3M}{\partial h^2\partial a}=+\frac{1}{2ah^2}\big(A[2-6\cos^2\lambda+4\cos^4\lambda]\cos^2\lambda$$
$$+B[1+3\cos^2\lambda-4\cos^4\lambda]\big),$$

$$\frac{\partial^4M}{\partial h^4}=+\frac{3}{h^4}\big(A[1+2\cos^2\lambda-11\cos^4\lambda+8\cos^6\lambda]\cos^2\lambda$$
$$+B[2+\cos^2\lambda+5\cos^4\lambda-8\cos^6\lambda]\big).$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung für M ein und setzt zur Abkürzung:

$$\sin^2\lambda=\frac{1}{1+\frac{h^2}{4a^2}},\quad \cos^2\lambda=\frac{1}{1+\frac{4a^2}{h^2}};$$

1) Legendre, Exercices de Calcul Intégral. In Legendre's Bezeichnung ist $E=E'$, $K=F'$, $\lambda=\vartheta$.

$$2a = d, \quad 2\pi d n_1 n_2 \sin\lambda = C, \quad 1 + 2\frac{h^2}{d^2} + \frac{\varrho^2}{6d^2} = \varepsilon;$$

$$a^2 - \varrho^2 + \frac{\varrho^4}{20d^2} = a_1, \qquad -\frac{\varrho^2}{d^2}\left(\frac{\varrho^2}{10} - \frac{a^2}{3}\right) = a_2,$$

$$\frac{3}{4h^2}\left(\frac{a^4 + \varrho^4}{20} - \frac{a^2\varrho^2}{3}\right) = a_3, \qquad \text{so wird:}$$

$$(1_1)\begin{cases} M = C\Big\{[K-E]\left[\varepsilon + \frac{\cos^2\lambda}{12h^2}\left(a_1 - a_2 - a_3 + \sqrt{2a_2 - 3a_3}\cos^2\lambda + 8a_3\cos^4\lambda\right)\right] \\ -E\left[1 - \frac{\sin^2\lambda}{12h^2}\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + 2a_3 + \sqrt{2a_2 + 3a_3}\cos^2\lambda + 8a_3\cos^4\lambda\right)\right]\Big\}. \end{cases}$$

Ich habe diese Formel für M auf einem anderen Wege schon vor längerer Zeit abgeleitet, da sie sich jetzt durch Specialisirung der allgemeinen Formeln unter 1) bis 3) ergibt, so dürfte damit eine gewisse Controle für die Richtigkeit der immerhin langwierigen Rechnungen gewonnen sein.

Obgleich dieser Ausdruck für das Potential zweier gleicher coaxialer Rollen nicht sonderlich einfach aussieht, lässt er sich doch sehr bequem zu numerischen Rechnungen verwenden.

Für den eben behandelten speciellen Fall hat übrigens schon J. Fröhlich[1]) nach ganz derselben Methode das Potential berechnet, doch sind dabei nur die von den Quadraten der Querdimensionen der Rollen abhängigen Glieder berücksichtigt, und ausserdem hat Fröhlich den Ausdrücken für die Differentialquotienten von M nicht die für numerische Rechnungen bequemste Form verliehen. Vor allen Dingen aber scheint der Differentialquotient $\partial^2 M/\partial a^2$ nicht exact zu sein, ich habe wenigstens den Theil, der von E abhängt, mit der Bedingung:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial a^2} = -\frac{\partial^2 M}{\partial h^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial M}{\partial a}$$

nicht vereinigen können.

Als für die praktische Herstellung von Rollen, vielleicht nicht ohne Bedeutung, möchte ich zwei aus den Gleichungen für a_1, a_2, a_3 sich ergebende Consequenzen hervorheben:

Bei Rollen, deren Querschnittsdimensionen gegen ihre Durchmesser erheblich zurücktreten, berechnet sich das Po-

1) Fröhlich, Wied. Ann. 19. p. 125—127. 1883.

tential am sichersten, wenn die axiale Dicke der radialen gleich gemacht wird.

Bei Rollen, deren Querschnittsdimensionen so gross sind, dass man ihre vierten Potenzen noch zu berücksichtigen hat, berechnet sich das Potential am sichersten, wenn die axiale Dicke zwischen Vier- und Fünfzehntel von der radialen gewählt wird.

3b) Potential einer Rolle auf sich selbst. In der Formel für das Potential M zweier Rollen aufeinander bedeutet *M* das Potential ihrer Mittelwindungen aufeinander, da nun das Potential eines wirklich unendlich dünnen Kreisleiters auf sich selbst logarithmisch unendlich gross ist, so kann man die entwickelte Formel für M nicht unmittelbar zur Berechnung des Potentials einer Rolle auf sich selbst verwenden. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass das Potential einer Rolle auf sich selbst in eine Reihe von Potentialen von Rollen aufeinander sich auflösen lässt.

Wenn zwei coaxiale Rollen gleiche radiale Dicke haben, so ist nach Maxwell[1]) ihr Selbstpotential:

$$L = n_1^2 L_1 + 2 n_1 n_2 M + n_2^2 L_2,$$

wenn n_1, n_2 ihre bezüglichen Windungszahlen, L_1 das Selbstpotential der einen, L_2 dass der anderen Rolle, M das Potential beider Rollen aufeinander bedeutet.

Denkt man sich nun eine Rolle von der axialen Dicke α, deren Selbstpotential L zu bestimmen ist, durch eine zur Axe senkrechte Ebene in zwei ganz gleiche Theile zerlegt und bezeichnet das Selbstpotential für jede ihrer Hälften mit $L_{\frac{1}{2}}$ und das der beiden Hälften aufeinander mit $M(\frac{1}{2}\alpha)$, so ist:

$$L = \frac{n^2}{2}\left(L_{\frac{1}{2}} + M\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Wir zertheilen die Hälften der Rolle wieder in je zwei Hälften und haben:

$$L_{\frac{1}{2}} = \frac{n^2}{8}\left(L_{\frac{1}{4}} + M\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right), \text{ also:}$$

$$L = \frac{n^2}{2}\left(\frac{1}{2^2} L_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2^2} M\left(\frac{\alpha}{4}\right) + M\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

1) Maxwell, Phil. Trans. 1865. p. 509. Dort bedeutet „breadth" radiale Dicke, „depth" axiale Dicke.

Man kann dann die Viertel der Rolle gleichfalls in je zwei gleiche Theile zerlegen und so ins Unendliche fortfahren. Das Endresultat ist:

$$L = \frac{n^2}{2} \sum_0^\infty \frac{1}{2^{2\varkappa}} M\left(\frac{\alpha}{2^{\varkappa+1}}\right). \tag{4}$$

Darin bedeutet $M(\alpha/2^{\varkappa+1})$ das Potential zweier Rollen aufeinander, die beide dieselbe radiale Dicke und dieselbe Weite wie die fragliche Rolle besitzen, bei denen die Mittelwindungen voneinander um den $1/2^{\varkappa+1}$ten Theil der axialen Dicke der Rolle abstehen, und deren axiale Dicken gleich dem $1/2^{\varkappa+1}$ten Theil von der axialen Dicke der Rolle sind.

Die auf der rechten Seite der Gleichung stehende Reihe ist convergent. Für ein unendlich grosses $\varkappa$ wird nämlich $M(\alpha/2^{\varkappa+1})$ unendlich gross wie $\log(\alpha/2^{\varkappa+1})$, also wie $\varkappa+1$, daher wird unsere Reihe convergiren, wenn die Reihe:

$$\sum_0^\infty (\varkappa+1)/2^{2\varkappa}$$

convergirt, letztere convergirt aber, wie man sich leicht durch Aufsuchung ihrer Summe überzeugt, wirklich. Da die Potentiale M nach der Formel (1_1) zu berechnen sind, so wird man in dieser Weise für L immer einen bestimmten Werth abzuleiten im Stande sein. Inzwischen ist die Convergenz dieser Reihenentwickelung für L bei den bisher verwendeten Rollen zu schwach.

Man wird also zur Aufsuchung des Selbstpotentiales einer Rolle eine directe Integration des Potentiales zweier Kreisströme über den Querschnitt der Rolle nicht umgehen können. Eine solche Integration hat Maxwell, unter Zugrundelegung des sich hierfür weitaus am besten eignenden von ihm selbst aufgestellten Potentiales zweier naher Kreisströme ausgeführt.[1]) Der Ausdruck, zu dem er für das Selbstpotential einer Rolle gelangt, ist in der Schreibweise H. Weber's, wenn:

1) Maxwell, Phil. Trans. p. 508. 1865.

$$(5_1)\left\{\begin{array}{l} L' = n^2 4\pi a\left\{\log\frac{8a}{\varrho} + \frac{1}{12} - \frac{\pi}{3}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right. \\ \left. + \frac{1}{12}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2) + \frac{1}{12}x^2\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right)\operatorname{arctg} x\right\}, \end{array}\right.$$

$$L'' = n^2\frac{\pi\varrho^3}{24a}\left\{\left(\log\frac{8a}{\varrho} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)(1+3x^2) + 3{,}45\,(1+x^2)\right.$$
$$+ 27{,}475 - 1{,}6\,\pi x^3 + 3{,}2\,x^3\operatorname{arctg} x - \frac{1}{10}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)$$
$$\left. - \frac{13}{6}x^4\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right\}$$

gesetzt wird:

$$L = L' + L''.$$

Hier ist x für α/ϱ gesetzt, und die vernachlässigten Glieder haben ϱ^3/a^3 zum Factor. Der Ausdruck L' ist schon mehrfach nachgerechnet worden (von Rayleigh, H. Weber, Niven). Zur Controle des zweiten Gliedes L'' haben Rayleigh[1]) und Niven unabhängig voneinander L für die speciellen Fälle $\alpha = 0$ und $\varrho = 0$ gerechnet und gefunden, dass jenes von Maxwell angegebene Glied sich mit den von ihnen erhaltenen Formeln nicht in Einklang bringen liess. Da die Richtigkeit ihrer speciellen Resultate keinem Zweifel unterworfen ist, vermuthete Rayleigh, dass jenes Glied mit Fehlern behaftet sein müsste. Wohl infolge dessen unternahm Niven eine Neuberechnung desselben, aus dem sehr verwickelten Endresultat, das er als Herausgeber der zweiten englischen Auflage des Maxwell'schen Treatise in dem zweiten Bande auf p. 321 veröffentlicht hat, lassen sich aber die für die genannten Specialfälle von ihm und Rayleigh gefundenen und leicht zu verificirenden Formeln auch nicht ableiten.[2]) Ich habe daher auch meinerseits eine Berechnung des gedachten Gliedes vorgenommen. Das Resultat ist, dass die drei Terme:

$$3{,}45\,(1+x^2);\ 27{,}475;\ -\frac{13}{6}x^4\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

ersetzt werden müssen durch:

1) Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **32.** p. 118. 1881.

2) Rayleigh: Das ist der Grund, weshalb der diesbezügliche Zusatz des Hrn. Niven in die deutsche Uebersetzung des Maxwell'schen Werkes nicht mit aufgenommen worden ist.

$$3{,}45\,x^2;\ \frac{221}{60};\ +\frac{1}{2}x^4\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Dieses zweite Glied lautet daher:

$$(5_2)\quad\left\{\begin{aligned} L'' = n^2\frac{\pi\varrho^2}{24a}\Big[&\left(\log\frac{8a}{\varrho}-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)(1+3x^2)+3{,}45x^3\\ &+\frac{221}{60}-1{,}6\,\pi x^3+3{,}2\,x^3\operatorname{arctg}x-\frac{1}{10}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)\\ &+\frac{1}{2}x^4\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\Big].\end{aligned}\right.$$

Setzt man hierin $\alpha = 0$, so wird $x = \alpha/\varrho = 0$, somit dieses Correctionsglied:

$$\frac{n^2\pi\varrho^2}{24a}\left(\log\frac{8a}{\varrho}+\frac{43}{12}\right).$$

Setzt man $\varrho = 0$, so wird $x = \alpha/\varrho = \infty$, und man bekommt unter Beachtung der Formel:

$$\operatorname{arctg}x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x},$$

für das Correctionsglied:

$$\frac{n^2\pi a^2}{8a}\left(\log\frac{8a}{a}+\frac{1}{4}\right).$$

Das sind aber dieselben Ausdrücke, die Rayleigh und Niven unabhängig voneinander für diese Fälle gefunden haben. Da ausserdem die Berechnung mehrmals und zu ganz verschiedenen Zeiten durchgeführt wurde, kann wohl der jetzige Ausdruck für das Correctionsglied von L als richtig angesehen werden. Will man noch weitere Glieder rechnen, so darf man nicht ausser Acht lassen, dass schon bei der Berechnung der beiden angegebenen Glieder Terme von der Ordnung ϱ^3/a^3 vernachlässigt worden sind. Uebrigens wird man, solange es sich um das Selbstpotential einer Rolle handelt, kaum je das Bedürfniss nach weiterer Annäherung zu constatiren haben; will man aber mit Hülfe des Ausdruckes für L nach Maxwell's Methode das Potential von Rollen aufeinander ausrechnen, dann kann es wohl kommen, dass die beiden angeführten Glieder nicht ausreichen.

4_a) Die Rolle der British Association. Die Rolle, die die British Association zur Bestimmung des Ohm's hat herstellen lassen, ist eine Doppelrolle; sie besteht aus zwei

in ihren Dimensionen einander gleichen coaxialen Rollen. Für jede dieser Rollen ist in Theilen des Meters nach den Feststellungen Lord Rayleigh's.[1])

$$a = 0{,}158\,194; \quad \alpha = 0{,}01841; \quad \varrho = 0{,}01608; \quad n = \frac{313}{2}.$$

Ferner:

$$h = h_1 + \alpha = 0{,}02010 + 0{,}01841 = 0{,}03851.$$

$h_1 = 0{,}02010$ bedeutet den Abstand der einander nächsten Windungsebenen.

Nach Maxwell[2]) ist nun das Selbstpotential $\bar{L}$ einer solchen Doppelrolle:

$$\bar{L} = 2(L_\alpha + M),$$

wenn L_α das Selbstpotential jeder ihrer Componenten, M das Potential dieser Componenten aufeinander bedeutet. L_α wird durch die Beziehung:

$$L_\alpha = L'_\alpha + L''_\alpha$$

mit Hülfe der Formeln (5_1) und (5_2) berechnet. M kann man entweder nach Maxwell's Methode[3]) durch drei Selbstpotentiale nach der Formel:

$$2M = \frac{n^2}{\alpha^2}[(h-\alpha)^2 L_{(h-\alpha)} - 2hL_h + (h+\alpha)^2 L_{(h+\alpha)}],$$

oder nach der im dritten Abschnitt aufgestellten Gleichung (1_1) eruiren.

Benutzt man bei der Berechnung der einzelnen Selbstpotentiale nur die Glieder L', so findet Maxwell:

$$\bar{L}' = 437\,440\text{ m},$$

und für die Correctionsglieder L'' im ganzen -7345, so dass:

$$\bar{L} = 430\,095\text{ m}$$

resultiren würde, welche Zahl infolge der Dicke des Drahtes und der Existenz der isolirenden Hülle desselben noch um 70 m zu erhöhen ist. Directe experimentelle Bestimmungen ergeben aber, wenn das Ohm der B. A. als richtig angenommen wird, $\bar{L}$ nach Maxwell gleich 456 748 m, nach Rayleigh gleich 455 000, sodass dieses Selbstpotential, wenn man den neueren Untersuchungen gemäss das Ohm der

1) Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **32.** p. 119. 1881.
2) Maxwell, Phil. Trans. 1865. p. 509.
3) Maxwell, l. c. p. 509.

B. A. als um $1\,\%$ zu klein ansieht, mindestens gleich 450 000 sein würde. Infolge dieser grossen Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung hat Rayleigh[1]) die Rechnungen Maxwell's nochmals durchgeführt, er findet, wenn:

$$\bar{L}' = 2(L' + M')$$

gesetzt wird, aus den Maxwell'schen Formeln:

$$2L' = 301\,920, \quad 2M' = 145\,820,$$

also: $$\bar{L}' = 447\,740$$

und vermuthet hiernach, dass Maxwell bei seinen numerischen Rechnungen die beiden Grössen α und ϱ miteinander verwechselt hat. Die Glieder L″ und M″ hat Rayleigh nicht direct nach dem von Maxwell angegebenen Correctionsgliede, sondern indem er die Querschnitte der Rollen unter Belassung ihres Flächeninhaltes als kreisförmig annahm, ausgerechnet und so:

$$2L'' = 239, \quad 2M'' = 3469$$

gefunden. Das wurde zusammen die mit der beobachteten sehr gut übereinstimmende Zahl:

$$L = 451\,448$$

geben.

Theils zur Hebung der letzten aus Rayleigh's vereinfachenden Annahmen bei der Berechnung der Correctionsglieder L″ und M″ dem theoretischen Werthe der Selbstinduction der so wichtigen B. A. Rolle noch anhaftenden Unsicherheit, theils zur Controle der einzelnen aufgestellten Gleichungen habe ich die Rechnungen nochmals wiederholt. Ich finde nach (5_1), (5_2):

$$2L' = 301\,949, \quad 2L'' = 258,$$

ferner nach Maxwell's Methode:

$$2M' = 145\,733, \quad 2M'' = 3540, \quad \text{also } 2M = 149\,273$$

und nach der Gleichung (1_1) des dritten Abschnittes:

$$2M = 149\,850.$$

Die Vergleichung all dieser Zahlen lehrt, dass:

1) die numerischen Rechnungen hinlänglich exact sind.

2) das von Maxwell angegebene Correctionsglied L″ mit den hier vorgenommenen Verbesserungen nunmehr rückhaltlos Anwendung finden darf.

1) Rayleigh, l. c. p. 118.

3) die verbesserte Maxwell'sche Formel bei der Berechnung des Potentiales zweier Rollen aufeinander fast dieselben Resultate ergibt, wie die hier aufgestellte Formel (1_1) im dritten Abschnitt.

4) hinsichtlich der Selbstinduction der British-Association-Rolle kein Zweifel mehr obwaltet, sondern Theorie und Erfahrung sie zu:

451 000 m

ergeben.

4_b) Die Rolle Heinrich Weber's. Auch diese Rolle ist eine Doppelrolle, aus zwei ganz gleichen coaxialen Rollen gebildet. Ihre Dimensionen in Einheiten des Meter sind[1]: $a = 0{,}26361$, $\alpha = 0{,}04325$, $\varrho = 0{,}01573$, $h = 0{,}11230$, $n = 87$.

Damit berechnet Weber für das Selbstpotential seiner Rolle:

$$\bar{L} = 2(L' + M' + L'' + M'');$$

$$2(L' + M') = 284\,350, \quad 2(L'' + M'') = 3160,$$

sodass: $\bar{L} = 287\,510$ m

werden würde. Die directe experimentelle Bestimmung ergab aber für dieses Selbstpotential[2]) nur 225900, hier würde also zwischen Theorie und Erfahrung eine ganz bedeutende Differenz bestehen. Da es mir auffiel, dass der theoretische Werth grösser als der experimentell gefundene sein sollte, während er infolge der Vernachlässigungen eigentlich kleiner sein müste, so habe ich auch hier die Rechnungen revidirt. Ich finde mit den angeführten Zahlen:

$$2(L' + M') = 201\,505, \quad 2(L'' + M'') = 4340,$$

also: $\bar{L} = 205\,845,$

eine ganz erheblich kleinere Zahl als Weber. Die Grösse $2(L'' + M'') = 4340$ braucht nicht mit der von Weber gefundenen übereinzustimmen, weil Weber sie mit der nicht verbesserten Maxwell'schen Formel berechnet hat, die $2(L' + M')$ müsste es aber thun, weshalb es trotzdem nicht der Fall ist, kann ich nicht sagen, ich habe meine Zahl mehrfach zu verschiedenen Zeiten und, um mich gegen Fehler

1) H. Weber, Der Rotationsinductor, seine Theorie und Anwendung. Leipzig, Teubner 1882. p. 52.

2) H. Weber, l. c. p. 64.

zu schützen, mit kleinen Abänderungen der Constanten der Rolle gerechnet. Ferner habe ich das Potential der Componenten der Rolle aufeinander, d. h $(M' + M'')$, sowohl nach der Maxwell'schen, als nach der hier aufgestellten Gleichung (1_1) bestimmt. Jene ergibt:

$$M' + M'' = 25751 \text{ m},$$

diese: $$M' + M'' = 25877 \text{ m},$$

also Zahlen, die sehr gut miteinander übereinstimmen, wenn man berücksichtigt, dass der Grad der Nährung bei den beiden Formeln nicht der nämliche ist. Hiernach wird also der theoretische Werth der Selbstinduction der Rolle Weber's zu 205 845 m anzusetzen sein, damit reducirt sich die Differenz dieses theoretischen Werthes gegen den experimentellen auf weniger als den dritten Theil der ihr von Weber zugeschriebenen Grösse.

Immerhin ist die übrigbleibende Differenz von 20000 m noch ausserordentlich gross. Durch die Dicke des Drahtes und der isolirenden Hülle, wie Weber will, lässt sie sich nicht erklären, denn eine Ueberschlagrechnung lehrt, dass die Nichtberücksichtigung dieser Dicken das Selbstpotential der Rolle höchstens um 100 m verfälschen kann. Es scheint aber, als ob die Bestimmung der Constanten der Rolle nicht ganz widerspruchsfrei ausgefallen ist. Die Doppelrolle war so hergestellt worden, dass in die äussere Cylinderfläche eines Ringes zwei ganz gleiche parallele Nuten eingedreht wurden und jede Nute mit 87 Drahtwindungen in sechs übereinandergelagerten Schichten versehen wurde. Die Windungen jeder oberen Schicht waren zum Theil in die Rillen der Windungen der unteren eingesenkt. Nun fand Weber durch directe Ausmessung im Mittel für die beiden Componenten der Rolle:

Umfang der Grundfläche	u_0	= 1,607 02 m
„ „ ersten Schicht	u_1	= 1,624 80 „
„ „ zweiten „	u_2	= 1,640 73 „
„ „ dritten „	u_3	= 1,657 33 „
„ „ vierten „	u_4	= 1,673 58 „
„ „ fünften „	u_5	= 1,689 53 „
„ „ sechsten „	u_6	= 1,705 86 „

Daraus folgt:

Radius der	Grundfläche	$r_0 = 0{,}255\,765$ m
„ „	ersten Schicht	$r_1 = 0{,}258\,595$ „
„ „	zweiten „	$r_2 = 0{,}261\,130$ „
„ „	dritten „	$r_3 = 0{,}263\,773$ „
„ „	vierten „	$r_4 = 0{,}266\,359$ „
„ „	fünften „	$r_5 = 0{,}268\,897$ „
„ „	sechsten „	$r_6 = 0{,}271\,496$ „

$r_6 - r$ ist die hier mit ϱ bezeichnete radiale Dicke der Rolle und ergibt sich zu 0,015 731. Ferner bedeutet $r_1 - r_0$ die Dicke der ersten Schicht, also die Dicke des Drahtes sammt Isolirhülle. Die Differenzen zwischen zwei anderen aufeinanderfolgenden r ist gleich der Differenz zwischen der Dicke d des Drahtes, sammt Isolirhülle und der Einsenkung x der Windungen der zugehörigen Schicht in die Rillen der darunterliegenden. Da weiter das Sechsfache der Dicke d des Drahtes weniger dem Fünffachen der mittleren Einsenkung x gleich der radialen Dicke der bezüglichen Rollen sein muss, so haben wir zur Berechnung von d und x aus den Werthen der r die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d + 5(d - x) &= 0{,}015\,731, \\ d &= 0{,}002\,830, \\ d - x &= 0{,}002\,535, \\ d - x &= 0{,}002\,643, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d - x &= 0{,}002\,586, \\ d - x &= 0{,}002\,538, \\ d - x &= 0{,}002\,599, \end{aligned}$$

woraus durch Ausgleichung folgt:

$$d = 0{,}002\,829, \quad x = 0{,}000\,248.$$

Weber hat diese Grössen auf einem anderen Wege bestimmt. Er gibt an, dass der Boden jeder der Nuten genau durch 15 nebeneinander liegende Drahtwindungen ausgefüllt wurde, durch directe Ausmessung fand er aber die axiale Breite a dieses Bodens zu 0,04325 m, also wird:

$$d = \frac{0{,}04325}{15} = 0{,}002\,883.$$

Dieser Werth für d weicht von dem von mir aus den Umfängen der Schichten berechneten um 0,000 054 m ab, und wenn man ihn mit diesem in Einklang bringen will, muss

man α fast um 1 mm verkleinern. Das x berechnet Weber aus der Gleichung:

$$x = \frac{6 \,.\, 0{,}002\,883 - 0{,}015\,731}{5}$$

zu 0,000 313. Die aus den Umfängen der einzelnen Schichten berechneten Werthe für d und x dürften mehr Vertrauen, als die nach Weber's Methode bestimmten, verdienen, es ist aber bei der eminenten Sorgfalt, mit der die einzelnen linearen Messungen von Weber durchgeführt worden sind, schwer anzunehmen, dass bei der Ausmessung von α ein Versehen von 1 mm vorgefallen sei. Lässt man aber selbst ein solches Versehen gelten, so würde sich der berechnete Werth des Selbstpotentiales der Rolle nur um 1500 m vergrössern, es bliebe gegen den beobachteten Werth noch eine Differenz von 18500 m, für die ich, wenn sie nicht auf den störenden Einfluss des die Componenten der Doppelrolle verbindenden Drahtes geschoben werden kann, keine Erklärung finde. Jedenfalls wäre eine eingehende Experimentaluntersuchung über das Verhältniss zwischen Theorie und Erfahrung hinsichtlich des Potentiales von Rollen sehr erwünscht.

Berlin, im Dec. 1883.

VII. *Ueber ein lehrreiches Experiment, welches sich mit den unsymmetrischen Thermosäulen ausführen lässt*[1]*;*

von Dr. A. v. Waltenhofen.

(Hierzu Taf. II Fig. 18 u. 19.)

(Aus der Zeitschrift des Electrotechnischen Vereins in Wien mitgetheilt vom Hrn. Verf.).

Wenn man durch eine beliebige Thermosäule, etwa einige Minuten lang, den stationären Strom einer anderen Stromquelle gehen lässt, so wird dieselbe dadurch befähigt, nach

1) Solche (Noë'sche) Thermosäulen waren in Wien unter Katalog.-Nr. 346 von Hrn. Řebiček in Prag ausgestellt.

Abschaltung von dieser Stromquelle ihrerseits einen Strom abzugeben, welchen wir den Entladungsstrom oder, insofern bei seiner Entstehung der von Peltier beobachtete thermodynamische Vorgang im Spiele ist, den Peltier'schen Strom nennen wollen, während der zur Hervorrufung desselben angewendete Strom der anderen Stromquelle als Ladungsstrom bezeichnet werden mag.

Zur Anstellung dieses Versuches bedient man sich zweckmässig einer Wippe, welche gestattet, die Thermosäule durch eine einfache Handbewegung abwechselnd mit der anderen Stromquelle oder mit einem zur Beobachtung des Peltier'schen Stromes dienenden Galvanometer zu verbinden. Als Stromquelle zur Ladung der Thermosäule dienen am besten constante hydroelectrische Elemente.

Macht man nun eine Reihe von solchen Ladungs- und Entladungsversuchen an einer Noë'schen Thermosäule, indem man zu immer stärkeren Ladungsströmen übergeht[1]), so beobachtet man leicht, dass die Peltier'schen Ströme, welche man der Reihe nach erhält, zwei ganz verschiedene Gesetze befolgen, je nachdem man die Ladungsströme in der einen oder in der entgegengesetzten Richtung durch die Thermosäule gesendet hatte. In dem einen Falle erhält man nämlich bei wachsenden Ladungsströmen auch wachsende Entladungsströme, welche stets dieselbe, und zwar die den Ladungsströmen entgegengesetzte Richtung beibehalten. Im anderen Falle hingegen wachsen die den Ladungsströmen entgegengesetzten Entladungsströme bis zu einem gewissen Maximum, nehmen sodann bei fortgesetzter Steigerung der Ladungsströme wieder ab, werden endlich für eine bestimmte Stärke des Ladungsstromes Null und kommen bei Anwendung noch stärkerer Ladungsströme wieder zum Vorschein, aber nun-

1) Man wird dies z. B. in der Art bewerkstelligen, dass man zuerst ein und dann nach und nach mehrere Elemente als Ladungsbatterie verwendet, um auf diese Art, und nöthigenfalls unter Beihülfe eines eingeschalteten Rheostaten eine passende Abstufung der Ladungsströme zu erzielen, die man entweder aus den bekannten electromotorischen Kräften und Widerständen annähernd berechnen oder auch an einem eingeschalteten Galvanometer direct messen kann.

mehr in umgekehrter Richtung, d. h. den Ladungsströmen gleichgerichtet, und numerisch wachsend. Ersteres beobachtet man, wenn man die Ladungsströme in solcher Richtung durch die Thermosäule gehen lässt, dass sie in den Löthstellen, wo die Heizstifte eingefügt sind (wir wollen sie, indem wir stets an einer solchen Löthstelle zu zählen anfangen, als die ungeraden gelten lassen) vom positiven Metalle zum negativen (d. i. aus den Stäbchen in die Drähte) übergehen, welche Stromrichtung wir als die negative bezeichnen wollen. Der zweite Vorgang hingegen kann nur durch positive Ladungsströme, d. h. durch solche hervorgerufen werden, welche in den ungeraden Löthstellen vom negativen zum positiven Metalle übergehen.

Die Fig. 18 erläutert, was wir unter positiver und negativer Stromrichtung verstehen, indem erstere durch den Pfeil 1, letztere durch den Pfeil 2 angedeutet ist. Die Fig. 19 hingegen veranschaulicht die oben angeführten Gesetze der Entladungsströme für eine Noë'sche Thermosäule. Trägt man nämlich die Intensitäten der Ladungs- und Entladungsströme, beziehungsweise als Abscissen und Ordinaten auf, so erhält man für positive Ladungsströme eine gegen die Abscissenaxe concave Curve OB, hingegen für negative Ladungsströme eine convexe Curve OA als Intensitätscurve der Entladungsströme. Erstere schneidet die Abscissenaxe in einem Punkte C, wenn man einen hinreichend starken positiven Ladungsstrom OC anwendet.

Bei meinen an einer zwanzigelementigen Noë'schen Sternsäule angestellten Versuchen[1]) wurden Ladungsströme von 1,6 — 7,7 Ampère angewendet, und zwar das eine mal im positiven, das andere mal im negativen Sinne die Thermosäule durchlaufend. Im ersteren Falle erhielt ich bis zu etwa 6 Ampère negative, und von etwa 7 Ampère aufwärts positive Entladungsströme. Der Uebergang der Entladungsströme aus dem negativen Sinne durch Null in den positiven Sinn fand also bei einem Ladungsstrome (OC Fig. 19) zwischen 6 und 7 Ampère statt. Die negativen Entladungsströme

1) v. Waltenhofen, Wien. Ber. 75. p. 245. 1877.

zeigten ein numerisches Maximum, welches einer electromotorischen Kraft von 0,039 Volt entspruch und nach Anwendung eines Ladungsstromes von 3 Ampère beobachtet wurde. Im zweiten Falle hingegen, nämlich bei negativen Ladungsströmen, blieben die Entladungsströme stets positiv. Der beim Ladungsstrome 7,7 Ampère beobachtete Entladungsstrom entsprach einer electromotorischen Kraft von 1,39 Volt.

Die durch die Curvenäste OA und OB veranschaulichten Beziehungen zwischen den Entladungsströmen σ und den Ladungsströmen werden, wenn man die Intensitäten der letzteren ohne Rücksicht auf das Vorzeichen (d. h. auf ihre Richtung) mit s bezeichnet, durch Gleichungen von der Form $\sigma = +\alpha s + \beta s^2$ und $\sigma = -\alpha s + \beta s^2$ ausgedrückt, wobei α und β Coëfficienten sind, deren Bedeutung später erläutert werden soll.[1])

Uebrigens lassen sich die beschriebenen Erscheinungen nur an Thermosäulen von gewisser Construction, nicht aber an beliebigen Thermosäulen beobachten, denn sie sind wesentlich durch die Bedingung verursacht, dass die aufeinander folgenden Löthstellen nicht von gleicher Beschaffenheit sind (wie z. B. bei den Wismuth-Antimonsäulen gewöhnlicher Construction), sondern in der Art verschieden, dass sie dem durchgeleiteten Ladungsstrome ungleiche (d. i. abwechselnd grössere und kleinere) Widerstände darbieten. Dies ist eben z. B. bei den Noë'schen Thermosäulen der Fall. Ein Blick auf dieselben zeigt sofort, dass bei solchen Säulen die ungeraden und die geraden Löthstellen unmöglich gleiche Uebergangswiderstände haben können, und es liegt nahe, anzunehmen, dass der Uebergangswiderstand an jener Stelle eines Elementes, wo der Argentandraht neben dem Heizstifte

1) Nach meinen Versuchen bewirkt die Umkehrung des Ladungsstromes keine Veränderung von α, wohl aber von β, so dass den beiden Curvenästen gleiche α, aber verschiedene β entsprechen. Wäre diese Verschiedenheit nicht beobachtet worden, so liessen sich die obigen Gleichungen in eine einzige zusammenfassen, nämlich, wenn man jetzt s mit Rücksicht auf das Vorzeichen einsetzt: $\sigma = -\alpha s + \beta s^2$. Ueber die Ursache der Verschiedenheit von β gibt meine citirte Abhandlung Aufschluss.

eingefügt ist (wie bei a in Fig. 18), grösser ist, als dort (wie bei b in Fig. 18), wo der Argentandraht eines Elementes mit der breiten Endfläche eines benachbarten Elementes metallisch verbunden ist.

Diese Bemerkung, welche sich mir aufdrängte, hat mich veranlasst, den Einfluss einer Widerstandsdifferenz der Löthstellen auf das Gesetz der Entladungsströme zu untersuchen, welches man bisher nur in der von G. v. Quintus Icilius für die gewöhnliche Wismuth-Antimonsäule nachgewiesenen Form $\sigma = \pm \alpha s$ gekannt hat; in der graphischen Darstellung der Geraden DE in Fig. 19 entsprechend.

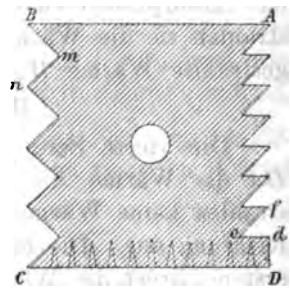
Meine in der oben citirten Abhandlung „über den Peltier'schen Versuch" durchgeführte Rechnung hat gelehrt, dass dieses Entladungsgesetz nur einen speciellen Fall eines allgemeineren $\sigma = \pm \alpha s + \beta s^2$ bildet, in welchem β eine der Differenz $\varrho_1 - \varrho_2$ der Widerstände einer geraden und einer ungeraden Löthstelle proportionale Grösse ist, die eben bei der gewöhnlichen Wismuth-Antimonsäule wegen $\varrho_1 = \varrho_2$ verschwindet und desshalb den Beobachtungen v. Quintus Icilius' entgangen war. Bei den Noë'schen Säulen ist sie wegen $\varrho_1 > \varrho_2$ von Null verschieden und bedingt bei positiven Ladungsströmen die von mir auf dem Wege der Rechnung entdeckte und durch Versuche bestätigte merkwürdige Erscheinung der Umkehrung des Peltier'schen Stromes.

VIII. *Ueber die Emission der Wärme von unebenen Oberflächen; von C. Christiansen.*

Dass das Emissionsvermögen der Metalle durch Ritzen der Oberfläche wesentlich erhöht wird, ist eine wohl bekannte Sache, über welche schon von Leslie, Melloni, Knoblauch und Magnus experimentelle Untersuchungen vorliegen. Die Ursache hiervon ist aber doch nicht ganz sicher, und namentlich sind die Resultate, zu welchen Magnus gelangt ist, theilweise im Gegensatz zu den von Melloni und Knoblauch gegebenen Erklärungen, welche auch nicht ganz

untereinander übereinstimmen. Die von den letztgenannten Physikern gegebenen Erklärungen finde ich auch nicht recht genügend, und jedenfalls ist die Annahme, dass die Metalle durch Ritzen bald härter, bald aufgelockert werden, nicht wohl zu controliren. Ich will im Folgenden einen Umstand hervor heben, dessen Einfluss auf die Emission der Wärme von unebenen Flächen, wie es mir scheint, bisher nicht genug beachtet worden ist. Fällt nämlich strahlende Wärme auf eine unebene Fläche, so verlassen mehrere Strahlen erst nach der zweiten oder dritten Reflexion die Oberfläche, es findet also eine vergrösserte Absorption statt, und daraus folgt nach dem bekannten Gesetze von dem Zusammenhang zwischen Wärmeemission und -absorption, dass das Emissionsvermögen einer solchen Fläche grösser als das einer ebenen Fläche ist.

Um dies auf eine anschauliche Weise zu zeigen, habe ich einen Messingwürfel giessen lassen, dessen obere und untere Flächen eben waren, nur wurde in die obere Fläche ein Loch zum Einsetzen eines Thermometers gebohrt. Die Figur zeigt die Form eines horizontalen Querschnittes.



Die Seite AB ist eben, die Seite BC besteht aus acht Flächen von gleicher Grösse, die unter rechten Winkeln zusammenstossen. Die Seite BC ist eben, aber es sind in ihr 121 conische Löcher von 0,4 cm Durchmesser und 0,4 cm Tiefe gebohrt. Da die Seitenlinie des Würfels 5,85 cm ist, bedecken die Löcher genau ein Viertel der Seitenfläche. Die Seite BC besteht aus einer ebenen Fläche Dd, deren Breite ein Achtel der Seitenlinie ist und aus vierzehn Flächen besteht, von denen sieben senkrecht zur geometrischen Seite des Würfels sind, und sieben andere sie unter einen Winkel von 45° schneiden. Der Würfel ist versilbert und geglättet; doch war es nicht möglich, die Flächen völlig eben und spiegelnd zu erhalten. Die Löcher waren matt versilbert.

Ich nehme hier keine Rücksicht auf die Polarisation

der ausgestrahlten Wärme, und nehme an, dass die Ausstrahlung dem Cosinusgesetze folgt, was hier wohl erlaubt sein kann. Weiter wird ein Achtel der Fläche AB als Einheit genommen, und nur die Ausstrahlung in senkrechter Richtung zu den durch die Kanten A, B, C, D gelegten Flächen betrachtet. Nennen wir die Ausstrahlung einer „absolut schwarzen" Flächeneinheit A, das Absorptionsvermögen des Silbers a, so kann die von AB ausgestrahlte Wärme W_1 gleich $8Aa$ gesetzt werden.

Dann strahlt ein Theil Bm der Fläche BC die Wärme Aa aus; auf sie fällt aber von mn eine ebenso grosse Wärmemenge Aa, davon wird nun $Aa(1-a)$ von Bm zurückgeworfen, und die gesammte Ausstrahlung von Bm beträgt folglich $Aa + Aa(1-a) = A(2a - a^2)$. Es strahlt somit BC die Wärme: $W_2 = 8A(2a - a^2)$ aus.

Von CD ist der grösste Theil eben, nämlich sechs unserer Einheiten, deren Ausstrahlung folglich $6Aa$ beträgt. Wird das Absorptionsvermögen der Löcher gleich α gesetzt, so strahlen sie die Wärme $2A\alpha$ aus. Die ganze von CD ausgestrahlte Wärme W_3 ist gegeben durch:

$$W_3 = 6Aa + 2A\alpha.$$

Die vierte Seite DA endlich strahlt von dem Theile Dd die Wärme Aa aus. Die mit de parallelen Flächen strahlen keine Wärme direct in der hier allein betrachteten Richtung aus. Die mit ef parallelen Flächen strahlen aber erstens direct die Wärme $7Aa$ aus, zweitens empfangen sie von den gegenüberliegenden Flächen die Wärme $7Aa$, wovon ein Theil $7Aa(1-a)$ zurückgeworfen wird. Endlich strahlt noch ef Wärme nach de aus, die wieder zu ef reflectirt wird und dann eine neue Reflexion erleidet, wodurch ihre Menge auf $Aa(1-a)^2$ herabgebracht wird. Die von DA ausgestrahlte Wärme W_4 wird folglich durch W_4 bestimmt, wo:

$$W_4 = Aa + 7Aa + 7Aa(1-a) + 7Aa(1-a)^2,$$

$$W_4 = 22Aa(1 - \tfrac{21}{22}a + \tfrac{7}{22}a^2).$$

Es ist also:

$$W_1 = 8Aa, \quad W_2 = 8Aa(2-a),$$

$$W_3 = 6Aa + 2A\alpha, \quad W_4 = 22Aa(1 - \tfrac{21}{22}a + \tfrac{7}{22}a^2)$$

Vernachlässigen wir die zweite und höhere Potenzen von a, als einer wenigstens beim Silber sehr kleinen Grösse, so kann man setzen:

$$W_1 : W_2 : W_3 : W_4 = 8 : 16 : 6 + \frac{2a}{a} : 22$$

$$= 1 : 2 : \tfrac{3}{4} + \frac{a}{4a} : 2{,}75 .$$

Um dasselbe Verhältniss durch den Versuch zu finden, liess ich ein eine Elle hohes und weites und zwei Ellen langes parallelepipedisches Zelt von Holz und Tuch anfertigen. In diesen Raume wurde die gewöhnliche Melloni'sche Thermosäule mit Messingconus (offen) hingestellt. Durch eine Oeffnung konnte der Würfel in den geschlossenen Raum hineingebracht und vor die Säule an zwei Drähten aufgehängt werden. Dann wurde der Ausschlag des Multiplicators gemessen und der Würfel herausgenommen, um die Erwärmung der Luft und der Wände zu vermeiden. Die Resultate sind Mittel aus zwei oder vier Beobachtungen. Die Zimmertemperatur wird im Folgenden mit t, die Temperatur des Würfels mit T bezeichnet. Er wurde, um der Bildung von Schwefelsilber zu entgehen, über einer Spirituslampe erwärmt.

Erste Versuchsreihe. Temperatur des Zimmers $t = 16^0$. Temperatur des Würfels $T = 170^0$. Abstand zwischen Würfel und Conus 6 Zoll.

	W_1	W_2	W_3	W_4
Ausschlag	2,25°	4,6°	19,6°	6,0°
Verhältniss	1	2,05	8,7	2,66.

Es stimmen also die Versuche recht gut mit der Berechnung, und die Bedeutung der Oberflächenformen tritt somit sehr deutlich hervor. Man hat ausserdem:

$$\tfrac{3}{4} + \frac{\alpha}{4a} = 8{,}7 , \text{ worin } \alpha = 32a .$$

Das Emissionsvermögen der Löcher ist somit mehr als dreissigmal grösser als das einer ebenen Fläche, wobei noch bemerkt werden muss, dass die Löcher matt versilbert waren. Sie wirkten somit wie schwarze Flecken.

Bei einer anderen Versuchsreihe wurde die ebene Fläche AB mit mattem Kienrussfirniss geschwärzt; von DA wurden

ebenfalls Dd und die mit de parallelen Flächen geschwärzt; in diesem Falle sollte die Ausstrahlung von DA gleich der von AB sein, obschon die direct ausstrahlenden Flächen, wie ef, blank waren. Es werde die Ausstrahlung einer geschwärzten Fläche mit A bezeichnet; nehmen wir an, dass die hier dargestellten Flächen als völlig schwarz betrachtet werden können, so erhalten wir von AB eine Ausstrahlung W_1' gleich $8A$. Die Ausstrahlung von DA bestimmen wir wie folgt. Von Dd strahlt eine Wärmemenge A aus, ef strahlt direct die Menge Aa aus, ausserdem empfängt sie von de die Menge A und wirft davon die Menge $A(1-a)$ zurück, es strahlt somit DA im ganzen die Wärme W_4' aus, wo: $W_4' = A + 7Aa + 7A(1-a)$
oder: $W_4' = 8A$, und somit ist $W_4' = W_1'$,
was zu zeigen war. Um dies zu prüfen, wurden die folgenden Versuche angestellt.

Zweite Versuchsreihe. Temperatur des Zimmers $t = 20^0$. Temperatur des Würfels $T = 120^0$. Abstand zwischen Würfel und Conus 7 Zoll.

	W_1'	W_2	W_3	W_4'
Ausschlag	35,5°	3,3°	12,2°	34,0°

Dritte Versuchsreihe. Temperatur des Zimmers $t = 20^0$. Temperatur des Würfels $T = 120^0$. Abstand zwischen Würfel und Conus 12 Zoll.

	W_1'	W_2	W_3	W_4'
Ausschlag	20,5°	11°	6,1°	19,1°

Man sieht, dass W_4' immer ein wenig kleiner als W_1' ist; es ist aber zu bemerken, dass die Berechnung unter der Voraussetzung gemacht ist, das alle Strahlen parallel und senkrecht zu einer durch die Kanten D und A gelegenen Fläche heraustreten, was wegen des kleinen Abstandes zwischen Würfel und Thermosäule nicht erfüllt ist.

Ich habe noch einige Messungen zur Berechnung des Absorptionsvermögens a des Silbers angestellt, dadurch fand ich:

$\frac{W_2}{W_1'} = 0{,}29$, $\frac{W_4}{W_2} = 0{,}35$, wodurch $\frac{W_4}{W_1'} = 0{,}101$ wird.

Es ist aber:

$$W_4 = 22\,Aa\,(1 - \tfrac{21}{22}a + \tfrac{7}{22}a^2),\quad W_1' = 8\,A$$

und also: $\frac{11}{4}a\,(1 - \frac{21}{22}a + \frac{7}{22}a^2) = 0{,}101$, oder $a = 0{,}039$.

Ebenso ist:

$$W_3 = 6\,Aa + 2\,A\alpha \text{ und } \frac{W_3}{W_1'} = \frac{6a + 2\alpha}{8} = 0{,}29.$$

Setzen wir hier: $a = 0{,}039$, so wird: $\alpha = 1{,}04$.

Da α das Emissionsvermögen der Löcher ist, sieht man, dass sie als kleine vollkommen schwarze Flecken wirken, wie früher bemerkt.

Berechnen wir in derselben Weise die drei ersten Versuchsreihen, so ergibt sich eine genügende Uebereinstimmung, nur in der zweiten Reihe ist der Auschlag W_1' und W_4' zu gross, als dass er proportional der Erwärmung gesetzt werden dürfe.

Es zeigen somit diese Versuche so deutlich wie möglich, dass die Form der Oberfläche von der allergrössten Bedeutung ist, und man kann wohl annehmen, dass sie auch bei der Austrahlung geritzter Flächen von grossem Einfluss ist, obgleich Knoblauch meint, dass er durch galvanische Verkupferung zweier Flächen, einer glatten und einer geritzten, denselben das gleiche Ausstrahlungsvermögen zuertheilt hat. Werden die Unebenheiten sehr klein, so tritt zwar keine eigentliche Reflexion ein, sondern eine Diffraction, aber dadurch wird doch im wesentlichen dasselbe Resultat erzielt werden.

Infolge von der hier gegebenen Erklärung kann die Ausstrahlung nach verschiedenen Richtungen sehr verschieden sein und muss allgemein abnehmen mit wachsendem Ausfallswinkel, wie man leicht einsieht, wenn man die Emission von verschiedenen Seitenflächen des Würfels untersucht.

Es soll hierdurch keinesweges gesagt sein, dass das Ritzen der Oberfläche nicht auch in anderer Weise auf die Emission der Wärme wirken kann. Wenn z. B. Leslie findet, dass Ritzen in gekreuzten Richtungen die Emission vermindert, so ist dies eine natürliche Folge von der hier gegebenen Erklärung; es finden sich aber andere Beobachtungen, die nicht so leicht zu deuten sind.

Kopenhagen, im December 1883.

IX. *Untersuchungen über das Chlorophyll und einige seiner Derivate; von A. Tschirch.*

(Hierzu Taf. III Fig. 1—7.)

Seit zwei Jahren mit dem Studium des Chlorophylls beschäftigt[1]), bin ich augenblicklich dabei, die gewonnenen Resultate nach kritischer Durcharbeitung der gesammten ausserordentlich umfangreichen Literatur in zusammenhängender Darstellung vorzuführen. Da die Untersuchung in erster Linie eine chemisch-spectralanalytische war, und im Laufe derselben eine Anzahl auch für den Physiker interessanter Resultate gewonnen wurden, so erlaube ich mir, im Folgenden die interessanteren Daten derselben in kurzen Sätzen zusammenzufassen. Zudem dürfte das aus äusseren Gründen gewählte Publikationsorgan — die Thiel'schen Landwirthschaftlichen Jahrbücher — nur wenigen Physikern zugänglich sein.

1. Die Reindarstellung des Chlorophyllfarbstoffes.

Nur derjenige Körper ist vorläufig als Reinchlorophyll zu betrachten, dessen Spectrum mit dem der lebenden Blätter in den wesentlichsten Punkten übereinstimmt. Ich habe daher zunächst das Spectrum lebender, nach der Methode von Valentin[2]) mit Wasser injicirter und dünner uninjicirter Blätter einem genauen Studium unterzogen. Da das Spectrum in einer physikalischen Zeitschrift bisher gar nicht und auch anderwärts — von G. Kraus[3]), Reinke[4]) — nicht ganz richtig abgebildet wurde, so stelle ich dasselbe auf beiliegender Tafel III Fig. 5 dar.[5])

1) Tschirch, Sitzungsber. d. botan. Ver. d. Prov. Brandenb. **24.** 1882; Abhandl. d. bot. Ver. d. Prov. Brandenb. 1882. p. 124; Berichte d. deutsch. botan. Gesellsch. **1.** p. 137, 171, 462; Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. **16.** p. 2731. 1883; Archiv d. Pharmacie 1884. Sitzungsber. der Ges. naturforsch. Freunde 1883, p. 193.

2) Auch Reinke, Ber. d. deutsch. bot. Ges. **1.** p. 395, verwendet dieselbe.

3) Kraus, Zur Kenntniss d. Chlorophyllfarbstoffe, Stuttg. 1872. Taf. 1.

4) Reinke, l. c. p. 399.

5) Das Absorptionsspectrum der Blätter ist wiederholt zuerst, von Stokes, Pogg. Ann. Ergzbd. **4.** p. 177. 1854, untersucht worden. Die

Wesentlich ist die relative Breite von Band III und die Schmalheit von IV, welches, wie auch Reinke angibt nur „rudimentär" entwickelt ist. Die Intensitätsscala der Bänder in der weniger brechbaren Spectrumshälfte ist, vom dunkelsten beginnend, I, II, III, IV; Band II und III sind etwa gleichdunkel.

Durch diese charakteristischen Eigenschaften ist das Blattspectrum von dem des alkoholischen Chlorophyllauszuges, dessen Chlorophyll durch den sauren Zellsaft bereits eine partielle Oxydation zu Chlorophyllan (Hoppe-Seyler) erlitten hat, verschieden. Bei den Chlorophyllauszügen, die demnach nicht unzersetztes Chlorophyll enthalten, und die auch noch einer fortdauernden weiteren Zersetzung unterliegen, liegen die Bänder zwar ungefähr an denselben Stellen, die Intensitätsscala ist aber eine andere, die Bänder folgen, vom dunkelsten beginnend: I, II, IV, III[1]) — von den Bändern im Blau abstrahire ich einstweilen —, und zeigt schon die relative Dunkelheit von IV und das Abblassen von III, dass wir es mit einer beginnenden Zersetzung in Chlorophyllan zu thun haben. Diese Zersetzung schreitet langsam weiter, je älter die Lösung wird, und ist es namentlich diesem Umstande zuzuschreiben, dass wir von der Chlorophyllösung so äusserst verschiedene Spectren dargestellt finden.

Ein alkoholischer oder ätherischer Blattauszug eignet sich daher so schlecht wie möglich zu genauen physikalischen Messungen. Er eignet sich aber auch aus einem anderen Grunde nicht dazu. Er besteht nämlich gar nicht aus einem Körper, sondern aus zwei gemischten Farbstoffen: dem Chlorophyll (in engerem Sinne) und dem Xanthophyll. Diese

meisten erklären es für identisch mit dem Spectrum der Lösung (Sachs, Stokes, Askenasy, Schönn, Gerland, Rauwenhoff, Hagenbach, Kraus), einige (Lommel, Vogel) sahen nur Band I, nicht die übrigen, Müller auch dieses nicht. Ich habe zuerst auf die Intensitätsunterschiede der Bänder II bis IV zwischen Blatt und Lösung aufmerksam gemacht, Ber. d. bot. Ges. **1.** p. 17. 1883; Reinke ist unabhängig von mir zu den gleichen Resultaten gelangt, Ber. d. bot. Ges. **1.** p. 399. 1883.

1) Vgl. Hagenbach, Pogg. Ann. **141.** Taf. II. 1870; Pringsheim, Sitzungsber. d. Berl. Acad. Taf. 1. 1874 u.-a.

beiden Körper zu trennen und rein darzustellen, war meine nächste Aufgabe.

Die Methode von G. Kraus[1]) ermöglicht keine quantitative Trennung, ebensowenig kommt man durch Verseifung mit Kalilauge[2]) oder Behandeln mit concentrirter Salzsäure[3]) zum Ziel, da beide zwar die gelben Farbstoffe vom Reinchlorophyll abtrennen, dieses letztere aber durch die genannten Reagentien tiefgehend und irreparabel zersetzt wird. Wohl aber gelangt man zum Ziel, wenn man das Chlorophyll durch ganz verdünnte Säuren oder den Sauerstoff der Luft zu Chlorophyllan oxydirt, dieses alsdann auskrystallisiren lässt und die so gewonnenen, wiederholt umkrystallisirten braunen Nadeln und Blättchen in alkoholischer Lösung mit Zinkstaub im Wasserbade reducirt.

Durch diesen Process erhält man einen prachtvoll smaragdgrünen Körper, der beim Verdunsten des Lösungsmittels in fast schwarzen Tropfen zurückbleibt. Die stark roth fluorescirende Lösung besitzt ein Absorptionsspectrum, welches, abgesehen von der gleichsinnigen Verschiebung aller Streifen gegen blau[4]) und dem beim Blatte zu beobachtenden Streifen zwischen *b* und *F*, der, wie wir sehen werden, den das Chlorophyll im Korn begleitenden gelben Farbstoffen zukommt, vollständig mit dem der lebenden Blätter übereinstimmt (siehe Fig. 1 und 5). Bemerkenswerth ist die relative Breite vom III, die geringe Intensität vom IV und die continuirliche bandfreie Endabsorption.

Diesen Körper nenne ich Reinchlorophyll.

Durch Oxydation liefert er Chlorophyllan, durch Kalilauge wird er in Kalichlorophyll (chlorophyllinsaures Kali), durch concentrirte Salzsäure (nach vorheriger Bildung von Chloro-

1) Mittelst Benzin.

2) Vgl. die Versuche von Kromeyer, Archiv d. Pharmac. **155.** p. 164. Hansen, Sitzungsb. d. Würzb. phys.-med. Ges. 1883.

3) Berzelius, Lieb. Ann. **27.** p. 298. 1837/38. Harting, Pogg. Ann. **96.** p. 547. 1855; Pfaundler, Lieb. Ann. **115.** p. 43. Mulder, Journ. f. prakt. Chemie. **33.** p. 479. 1844.

4) Auf den Grund dieser Verschiebung komme ich im letzten Abschnitte zu sprechen.

phyllan) in Phyllocyanin und Phylloxanthin[1]) gespalten. Er krystallisirt nicht, sondern bildet tiefdunkelgrüne Tropfen. Dieselben lösen sich nicht in Wasser, schwer in geschmolzenem Paraffin, leicht in Alkohol, fetten und ätherischen Oelen, sehr leicht in Aether und Benzin. Die Lösungen sind viel lichtbeständiger als Blattauszüge, werden aber mit der Zeit auch (zu Chlorophyllan) oxydirt. Kohle und Thonerdehydrat fällen den Farbstoff.

Nur diese Lösungen dürfen künftig, wenn es sich um genaue Messungen handelt, den Untersuchungen des Chlorophylls zu Grunde gelegt werden, nicht die Chlorophylltinctur, die in ihrer Zusammensetzung je nach der Wahl des Materiales, der Art des Lösungsmittels und der Länge der Aufbewahrung wechselt, und die schon kurz nach der Herstellung die beginnende Zersetzung zeigt.

2. Die gelben Farbstoffe.

Die das Chlorophyll begleitenden gelben Farbstoffe, α-Xanthophyll, besitzen drei Bänder im Blau (oder vielmehr zwei Bänder und Endabsorption) Band 1 des Xanthophylls sieht man auch im Blattspectrum — natürlich gleichfalls etwas gegen Roth verschoben —, Band 2 konnte ich infolge der übergreifenden Endabsorption des Reinchlorophylls und der relativen Dunkelheit des Blau, selbst bei concentrirtem Sonnenlicht, nicht deutlich sehen.[2]) Hagenbach hat auch dies Band bei lebenden Blättern gefunden.[3])

Band V und VI des Spectrums lebender Blätter gehören daher nicht dem Reinchlorophyll, sondern dem dieses begleitenden Xanthophyll an. Das Blattspectrum ist daher ein durch Uebereinanderlagerung entstandenes Mischspectrum zweier Farbstoffe.

Da im blauen Theile des Blattspectrums und den Blattauszügen die Endabsorption des Chlorophylls über den Xanthophyllbändern liegt, so ist es erklärlich, warum

1) Bezüglich der Details verweise ich auf meine früheren Publicationen in den Ber. d. deutschen botan. Gesellschaft. 1. p. 137 u. flgde. 1883.

2) Auch Kraus und Reinke sahen dasselbe nicht.

3) Hagenbach, Pogg. Ann. 146. p. 510. 1872.

Vierordt[1]) und Wolkoff[2]) im Blau die quantitativ stärkste Absorption beobachteten. Für die Assimilationscurve[3]) ist dies zweite Maximum — ausser dem ersten im Roth — scheinbar von keinem Belang.

Die Streifen in der weniger brechbaren Spectrumshälfte, die man bei sehr dicken Schichten auch bei den gelben Farbstoffen der Blätter und Blüthen beobachtet, rühren von geringen Chlorophyllbeimengungen her.

Die gelben Farbstoffe stehen in Beziehungen zum Chlorophyll. Behandelt man nämlich eine alkoholische Reinchlorophylllösung mit Barythydratlösung im Wasserbade, so fällt ein dunkelgrüner Niederschlag — die überstehende Lösung wird nahezu farblos —, der, mit Wasser gewaschen, an Alkohol (neben etwas Barytchlorophyll) einen intensiv gelbgefärbten Körper abgibt. Derselbe ist von Chlorophyll abgespalten worden.[4]) Der Rückstand löst sich leicht in Aether und besitzt ein Spectrum, das dem des Alkalichlorophylls näher steht, als dem des Reinchlorophylls.

3. Das Chlorophyllan.

Das von Hoppe-Seyler[5]) entdeckte Chlorophyllan ist, wie ich gezeigt habe[6]), ein Oxydationsproduct des Chlorophylls. Es entsteht durch Einwirkung schwacher Säuren auf den Chlorophyllfarbstoff. Da in den Blättern selbst stets saure Zellsäfte enthalten sind, so bildet es sich bereits beim

1) Vierordt, Die Anwendung des Spectralapparates. Tübing. 1873. Vgl. auch Reinke, l. c. p. 417.

2) Wolkoff, Die Lichtabsorption in den Chlorophylllösungen. Heidelberg 1876.

3) Nach den Untersuchungen von Engelmann und Reinke liegt das Maximum der Assimilationscurve, entgegen den früheren Untersuchungen, im Streifen I des Chlorophylls — nicht im Gelb. Engelmann fand ein zweites Maximum im Blau, welches jedoch Reinke nicht beobachten konnte.

4) Erst dieser Versuch zeigt einwurfsfrei, dass von Chlorophyll gelbe Farbstoffe abgespalten werden können. Alle Versuche mit Kyanophylllösung (Kraus) angestellt, geben keine massgebenden Resultate, da diese stets neben Chlorophyll noch Xanthophyll enthält.

5) Hoppe-Seyler, Zeitschr. f. physiol. Chem. **3.** p. 339.

6) Tschirch, Ber. d. deutschen botan. Ges. **1.** p. 145. 1883.

Extrahiren der Blätter mit Alkohol. Es ist identisch mit dem modificirten Chlorophyll (Stokes)[1]) dem Säurechlorophyll der Autoren[2]) — halbsaures und halbmodificirtes Chlorophyll entsteht durch partielle Chlorophyllanbildung —, dem Acidoxanthin (C. Kraus)[3]), dem krystallisirten Chlorophyll Gautier's[4]) und Rogalski's[5]), dem reinen Chlorophyll Jodin's[6]), dem gelben Chlorophyll Sorby's[7]), dem Hypochlorin Pringsheim's[8]), dem Chlorophyllkrystallen Borodin's[9])(?), sowie ferner mit dem Filhol'schen Niederschlage (durch Zusatz organischer Säuren zu Chlorophylltinctur entstehend).[10]) Es entsteht bei der winterlichen Verfärbung einiger immergrüner Coniferen[11]), und wenn man Blätter mit saurem Zellsaft verdunkelt.[12]) Jeder Blattauszug zersetzt sich mit der Zeit unter Chlorophyllanbildung. Die Zersetzung geht um so schneller vor sich, je saurer der Zellsaft der verwendeten Blätter, je sauerstoff-, resp. ozonreicher das angewandte Lösungsmittel, und je länger die Lösung dem Lichte ausgesetzt ist.

Die Lösung des Chlorophyllans ist gelb und besitzt ein charakteristisches Spectrum (Fig. 3), welches schon Hoppe-Seyler kurz beschrieben.

Verschiebung der Streifen, Abblassen eines (III), und Verdunkeln zweier derselben (II und IV_a) und das Auftreten eines neuen (IV_b) bilden die characteristischen Unterschiede, welche dasselbe vom Reinchlorophyllspectrum unterscheiden.

1) Stokes, Pogg. Ann. Ergb. **5.** p. 218. 1854.

2) G. Kraus, Sachsse u. a., das „acid" und „half acid" der Engländer.

3) C. Kraus, Wollny's Forschungen auf d. Gebiete d. Agriculturphysik **1.** p. 77. 1873; Flora 1875. p. 156.

4) Gautier, Comp. rend. **89.** p. 862. 1879.

5) Rogalski, Comp. rend. **90.** p. 881. 1880.

6) Jodin, Comp. rend. **59.** (2) p. 859. 1864.

7) Sorby, Quat. Journ. of science **24.** p. 64. 1871.

8) Pringsheim, Berl. Monatsber. 1879.

9) Borodin, Botan. Zeit. p. 608. 1882.

10) Filhol, Comp. rend. **79.** p. 612. 1874.

11) Deren Entstehungsbedingungen namentlich Kraus, Haberlandt und Askenasy erforscht haben.

12) Vgl. Frank in Sitzungsber. d. botan. Ver. d. Prov. Brandenb. **24.**

Das Spectrum des von der Lösung ausgestrahlten Fluorescenzlichtes, nach Hagenbach's Methode bestimmt[1]), besteht aus homogenem Roth der Wellenlängen $\lambda = 640$ bis $\lambda = 680$. Es besteht aus zwei ungleich breiten hellen Bändern, mit einem Lichtminimum um $\lambda = 650$. Das Spectrum ist schmäler als das der Reinchlorophylllösung. Bei dieser erstreckt sich dasselbe von $\lambda = 620$ bis $\lambda = 680$. Das Lichtminimum liegt hier zwischen $\lambda = 650$ und $\lambda = 640$ (Fig. 6).[2])

Das nach dem blauen Ende zu liegende Lichtband des Fluorescenzspectrums ist also bei der Oxydation des Chlorophylls zu Chlorophyllan schmäler geworden.[3])

Das Chlorophyllan krystallisirt in Nadelbüscheln oder Aggregaten rechtwinkliger Tafeln, welche (in directem Sonnenlicht) sehr schöne Polarisationserscheinungen zeigen. Die Farbe der Krystalle ist braun. Sie lösen sich leicht in Alkohol, sehr leicht in Aether und Benzin.

Die Lösung des Chlorophyllans eignet sich, da sie sehr scharfe und dunkle Absorptionsbänder besitzt, ausserordentlich zu Studien über die Verschiebung der Bänder — weit besser z. B. als Reinchlorophylllösung.

4. Phyllocyaninsäure.

Erwärmt man das Chlorophyllan mit conc. Salzsäure, so spaltet sich dasselbe in einen mit blauer Farbe in der Salzsäure löslichen Körper — das Phyllocyanin Fremy's[4]) — und einen in dieser unlöslichen, aber in Alkohol und Aether löslichen gelbbraunen Körper, das Phylloxanthin.[5])

Die gleiche Spaltung findet auch bei Behandeln des

---

1) Hagenbach, Pogg. Ann. **141.** p. 256. 1870.

2) Vgl. auch Hagenbach, l. c. p. 258 und Taf. II. Die Angaben im Text sind nach der Angström'schen Scala in Millionstel Millimeter Wellenlängen gemacht. Verwendet wurde ein kleiner Spectralapparat.

3) Vgl. hiermit die Beobachtungen Hagenbach's über das Fluorescenzlicht modificirten Chlorophylls. Pogg. Ann. **146.** p. 517. 1872.

4) Fremy, Compt. rend. **50.** (1) p. 411. 1860.

5) Das Phylloxanthin ist (mit Xanthophyll gemengt) das Xanthophyll des Berzelius (l. c. p. 301).

Chlorophylls mit Salzsäure statt.[1]) Hier entsteht in erster Linie aber auch Chlorophyllan. Auf diesen Punkten beruht der alte Fremy'sche Versuch.

Setzt man zu der blauen, etwas roth fluorescirenden Phyllocyaninlösung[2]) viel Wasser, oder dampft man dieselbe ein, so erhält man einen gelbbraunen Körper, der sich leicht in Alkohol, Aether und verdünnten Alkalien löst: die Phyllocyaninsäure.

Dieser Körper besitzt, wie Fig. 4 auf Tafel III zeigt, ein Spectrum, welches genau mit dem des Chlorophyllans übereinstimmt. Demnach ist der Körper bestimmt von diesem verschieden, denn:

{ Chlorophyllan löst sich nicht in Kalilauge,
Phyllocyaninsäure löst sich darin leicht;

{ Chlorophyllan gibt mit Zinkstaub reducirt einen grünen,
Phyllocyaninsäure einen blauen Körper.

Die Spectren der beiden Reductionsproducte sind verschieden. Der Umstand, dass zwei notorisch verschiedene Körper das gleiche Spectrum besitzen, zeigt, dass sich, wie bereits Hoppe-Seyler hervorhob, Aenderungen in der Molecularstructur vollziehen können, ohne dass sich dieselben spectralanalytisch nachweisen lassen, was nicht auffallen kann, „da Lichtemissionen und Absorptionen nicht vom ganzen Molecül, sondern nur von den Atomgruppen bewirkt" werden.[3]) So kann denn „die Bewegung derselben unter gleichen Verhältnissen dieselbe bleiben, wenn an andere Atome oder Atomgruppen Anfügung oder Abspaltung von Atomgruppen geschieht" (l. c. p. 340).

Die Phyllocyaninsäure ist das „reine Chlorophyll" von

1) Den ganzen Vorgang, der die richtige Interpretirung des Fremy'schen Fundamentalversuches ermöglicht, habe ich ausführlich beschrieben. (Ber. d. deutsch. botan. Ges. **1.** p. 147. 1883.)

2) Die Fluorescenz des Phyllocyanins bleibt auch erhalten, wenn man die Lösung wiederholt mit Aether ausschüttelt. Mir ist von den zahlreichen Körpern der Chlorophyllgruppe, welche den Streifen im Roth besitzen, kein einziger begegnet, der nicht fluorescirte. Beim Phyllocyanin ist die Fluorescenz relativ schwach.

3) Hoppe-Seyler, Zeitschr. f. physiol. Chemie. **8.** p. 340; vgl. auch den Aufsatz desselben Forschers Pogg. Ann. **147.** p. 101. 1872.

Berzelius[1]), Harting[2]), Mulder[3]) und Pfaundler[4]) und vielleicht identisch mit der Chlorophyllansäure Hoppe-Seyler's.[5])

5. Alkalichlorophyll.

Behandlung mit Alkalien ruft, wie Chautard zeigte[6]), charakteristische Veränderungen am Chlorophyllspectrum hervor. Der Streifen im Roth, den ich, weil er sonst relativ beständig ist und bei der bis ins Unendliche gehenden Mannichfaltigkeit in den spectralanalytischen Eigenschaften der — wie sich jetzt herausgestellt hat — sehr zahlreichen Körper der Chlorophyllgruppe meist unverändert erhalten bleibt, das „stabile Band" genannt habe[7]) — erscheint hier gespalten und stark nach Blau verschoben. Die anderen Bänder sind gleichfalls gegen Blau verschoben und erscheinen nur matt (Fig. 2). Die Bänder II—IV (resp. IV_b), die bandes surnumérales Chautard's[8]), nenne ich, da sie eine geradezu frappirende Mannichfaltigkeit in Bezug auf Lage und Intensität bei den verschiedenen Körpern der Chlorophyllgruppe zeigen: „labile Bänder".

Da es mir bisher nicht gelang, einen Gehalt an Kalium aus dem gebildeten grünen Körper zu beseitigen, so halte ich ihn für das Kalisalz einer Säure, die ich Chlorophyllinsäure nenne. Spectroskopisch gleicht er den grünen Körpern Sachsse's[9]), die dieser Phyllocyanine nannte, vollkommen und ist wohl mit diesen identisch.

Die Lösung des Kalichlorophylls ist dunkelsmaragdgrün und fluorescirt stark roth. Das Spectrum des Fluorescenzlichtes zeigt gleichfalls nur homogenes Roth, das Band ist

1) Berzelius, Lieb. Ann. **27.** p. 298.
2) Harting, Pogg. Ann. **96.** p. 547. 1855.
3) Mulder, Journ. f. prakt. Chem. **33.** p. 479. 1844.
4) Pfaundler, Lieb. Ann. **115.** p. 53.
5) Hoppe-Seyler, Zeitschr. f. physiol. Chem. **5.** p. 75.
6) Chautard, Compt. rend. **76.** (1) p. 570.
7) Chautard nennt ihn „bande specifique".
8) Chautard, Compt. rend. **76.** (2) p. 1273. 1873.
9) Sachsse erhält denselben durch Behandlung der Kraus'schen Kyanophyllösung mit Natrium. Phytochem. Untersuchungen. **1.** Leipzig. 1880. p. 4.

aber, wie das Absorptionsband I, stark gegen Blau verschoben.[1]) Es besteht aus zwei sehr ungleich lichtstarken Streifen. Streifen 1, der dunklere, liegt von $\lambda = 670$ bis $\lambda = 655$, dann folgt ein Lichtminimum von $\lambda = 655$ bis $\lambda = 650$, dann ein breiter heller Streif von $\lambda = 650$ bis $\lambda = 623$. Der Rand gegen Gelb ist verwaschen (Fig. 6).

Parallel mit den spectroskopischen Veränderungen, die Chlorophyll bei Behandlung mit Kalilauge erleidet, gehen chemische: der Farbstoff ist unlöslich in Aether, aber sehr leicht löslich in (alkalischem) Wasser geworden. Die bei den verschiedenen Reactionen aus dem Kalichlorophyll entstehenden Körper besitzen durchaus anderes spectroskopisches Verhalten, wie die durch die gleichen Reagentien aus Reinchlorophyll gebildeten Körper.

Das Chlorophyll wird also durch Alkalien durchgreifend verändert, was ich nur deshalb ausdrücklich hier betone, weil immer noch Versuche gemacht werden, durch Verseifung der Chlorophyllauszüge zum reinen Farbstoff zu gelangen.

Durch Erwärmen einer chlorophyllinsauren Kalilösung mit überschüssiger Kalilauge auf 210° im Paraffinbade wird die dunkelsmaragdgrüne Lösung dunkelpurpurroth. Behandelt man die Lösung mit Aether und Salzäure, so tritt in den ersteren eine prachtvoll rubinrothe Säure über, die ich Phyllopurpurinsäure genannt habe. Die Lösung derselben in Alkohol zeigt ein Spectrum, welches ich auf Fig. 7 abgebildet habe.

6. Die bei dem Chlorophyll der lebenden Blätter zu beobachtende gleichsinnige Verschiebung aller Streifen gegen Roth.

Die zuerst von Hagenbach[2]) und Gerland beobachtete gleichsinnige Verschiebung der Bänder gegen Roth beim lebenden Blatte gegenüber den Chlorophyllösungen, die später wiederholt bestätigt wurde, hat mannichfache Deutungen erfahren.

---

1) Ein neuer Beleg für die Beziehungen, die zwischen Absorption und Fluorescenz bestehen.

2) Hagenbach, Pogg. Ann. **141.** p. 272. 1870. Auch die Xanthophyllbänder erscheinen gegen Roth verschoben.

Da festes, aus den Lösungen niedergeschlagenes Chlorophyll, wie Hagenbach[1]), Lommel[2]) und G. Kraus[3]) zeigten, ein Verschiebung der Streifen gegen Roth beobachten lässt[4]), so vermuthete man, dass die Verschiebung davon herrühre, dass das Chlorophyll in fester Form in den Blättern vorhanden sei, d. h. dass der die plasmatische Grundsubstanz der Chlorophyllkörner durchtränkende Farbstoff als solcher und nicht in Form einer Lösung die Maschenräume des Kornes erfülle[5]), eine Vorstellung, die um so berechtigter erschien, als eine gemeinsame wichtige Eigenschaft — mangelnde Fluorescenz — sowohl dem festen, aus der Lösung niedergeschlagenen Chlorophyll, als auch dem Chlorophyll der lebenden Blätter zuzukommen schien. Nun hat aber Hagenbach neuerdings auch am lebenden Blatte wenn auch geringe, so doch deutliche Fluorescenz wahrgenommen[6]), und auch die zweite Grundlage der Vorstellung erweist sich bei näherem Zusehen als illusorisch. Es findet zwar bei festem Chlorophyll[7]) eine deutliche Verschiebung der Streifen gegen Roth statt[8]), dieselbe geht jedoch niemals soweit, wie wir sie beim Blatte beobachten. Weder die Reinchlorophylltropfen,

---

1) Hagenbach, l. c.

2) Lommel, Pogg. Ann. **143.** p. 657. 1871 u. Erlangen phys. med. Societät. Juli 1871.

3) G. Kraus, Zur Kenntniss der Chlorophyllfarbstoffe. p. 57.

4) Entgegen dieser auch von mir (Ber. d. deutsch. botan. Ges. **1.** p. 19. 1883) bestätigten Beobachtung können Vogel (Berl. Ber. **11.** p. 1367. 1878) und Timirjazeff (ibid. **6.** p. 328. 1873) eine spectroskopische Verschiedenheit der Chlorophyllextracte von den Lösungen nicht constatiren.

5) So muss man nach dem Stande unserer anatomischen Kenntnisse den Sachverhalt deuten. Die Behauptung Lommel's und Hagenbach's, der Chlorophyllfarbstoff sei im Blatte in Form von Körnern vorhanden, beruht auf einem schon von Mohl gehobenen anatomischen Irrthum.

6) Hagenbach, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 304. 1874.

7) Unter „festem Chlorophyll" verstehe ich die grünen Tropfen meines Reinchlorophylls.

8) Vgl. meine Mittheilung in d. Ber. d. deutsch. botan. Gesellsch. **1.** p. 467. 1883 u. Taf. XIV.

noch in Paraffin erstarrtes Chlorophyll[1]) zeigte mir die Streifen in einer Lage, die mit der am Blatte beobachteten vollständig übereinstimmte. Zur Messung von Verschiebungen dieser Art eigneten sich die Bänder II und III besser als I, trotzdem dasselbe bekanntlich weit dunkler ist. Aus alledem geht hervor, dass, selbst wenn wir annehmen, dass auch das feste Reinchlorophyll eine geringe Fluorescenz, wie das lebende Blatt, besitzt, der Aggregatzustand des die Körner tränkenden Chlorophylls allein sicher nicht ausreicht, die auffallende Erscheinung der Bandverschiebung zu erklären.

Nun konnte man auch daran denken, dass die von Gerland[2]) nachgewiesene Thatsache, dass Trübungen eine Verschiebung der Bänder nach Roth hervorrufen, auch hier die Ursache der veränderten Bandlage sei. Allein ich habe mich auch hier durch vergleichende Versuche überzeugt — ich verwendete als Trübungsmittel in der Lösung selbst gefälltes Bariumsulfat —, dass die Verschiebung niemals soweit geht wie im lebenden Blatte.

Schliesslich hat man auch die Erscheinung auf den verschiebenden Einfluss dem Chlorophyll im Korn beigemengter, einseitig absorbirender Körper, geglaubt zurückführen zu können. Denn da, wie Melde zeigte[3]), ein einseitig absorbirender Körper unter Umständen im Stande sein kann, Absorptionsstreifen eines anderen ihm beigemengten nach der Lichtseite seines Absorptionsspectrums zu verschieben, „so wird auch umgekehrt die Annahme erlaubt sein, dass, wo eine solche Verschiebung der Absorptionsstreifen eintritt, eine Mischung zweier sich so verhaltender Körper vorliege.“[4])

---

1) Dasselbe verwendete Reinke zuerst, Ber. d. deutsch. botan. Ges. **1.** p. 406. 1883. Bei demselben sah Reinke den Streifen im Roth an der gleichen Stelle liegen wie beim Blatte.

2) Gerland, Pogg. Ann. **143.** p. 604. 1871, siehe auch Melde, ibid. **124.** p. 91. 1865.

3) Melde, Pogg. Ann. **124.** p. 91. 1865. Später wurde die Sache namentlich in Bezug auf die Frage, ob gegenseitige chemische Umsetzungen der gemischten Substanzen stattfinden, weiter verfolgt, so von Burger, Berl. Ber. **9.** p. 1876. 1878. u. a.

4) Gerland, l. c. p. 606.

Gerland meint, dass der das violette Ende des Spectrums absorbirende, das Chlorophyll begleitende Körper, der die Verschiebung hervorrufe, das Protoplasma sei. Nun haben wir aber oben in dem gelben Farbstoffe, der bestimmt im Chlorophyllkorn mit dem Chlorophyllfarbstoff gemengt ist, einen Körper kennen gelernt, der zwar die brechbarere Spectrumshälfte nicht continuirlich absorbirt, der jedoch in derselben sehr breite Bänder besitzt, und es lag nahe zu vermuthen, dass das Xanthophyll die Verschiebung der Streifen nach Roth — der Lichtseite seines Spectrums — bedinge. Es haben mir jedoch mit Rücksicht auf diese Erwägung angestellte Versuche mit Gemischen von Xanthophyll und Reinchlorophyll (sowohl in fester Form als in Lösung verwendet) gezeigt, dass selbst, wenn die Farbe des Gemisches einen stark gelbgrünen Ton besass, doch eine Verschiebung der Chlorophyllbänder in der ausgesprochenen Weise, wie sie das Blatt zeigt, niemals zu beobachten ist.

Es bleibt also nur übrig, auf dem Kundt'schen Gesetz fussend, dass eine um so grössere Verschiebung der Streifen nach Roth eintrete, je grösser das Dispersionsvermögen der Lösungsmittel ist[1]), anzunehmen, dass der Chlorophyllfarbstoff nicht als solcher, sondern, ausser mit Xanthophyll, auch noch mit einem Körper von hohem Dispersionsvermögen, und da die Körper von hohem Dispersionsvermögen auch meist eine grössere Dichte besitzen, auch von hohem specifischem Gewicht — gemengt sei, eine Vorstellung die ich schon in einer früheren Arbeit vertreten habe.[2])

---

1) Kundt, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 622. 1874. Das Kundt'sche Gesetz lautet l. c. p. 617: „Mischt man zu einer absorbirenden Substanz andere nicht absorbirende Medien, so rückt ein Absorptionsstreifen, welcher sich im Bereiche λ_1 bis λ_2 des Spectrums befindet, um so mehr nach dem rothen Ende des Spectrums, je grösser die Constante B ist, welche in dem Bereich λ_1 bis λ_2 die Dispersion des zugesetzten, nicht absorbirenden Mediums darstellt." — Gegen die Gültigkeit dieses Gesetzes sind in neuerer Zeit Bedenken erhoben worden, so von Vogel, Berl. Ber. **11.** p. 913 und 1363. 1878 und von Lepel, Berl. Ber. **11.** p. 1146. 1878.

2) Tschirch, Ber. d. deutsch. botan. Ges. **1.** p. 137. 1883.

Zu welcher Gruppe von Körpern diese Substanz gehört, lässt sich zunächst nicht entscheiden. Die anatomische Untersuchung gibt bei der Kleinheit der Objecte und der Unzuverlässigkeit unserer mikrochemischen Reactionsmethoden keine Antwort auf diese Frage. Vielleicht ist aber auch die ganze Erscheinung auf die so merkwürdige Anordnung des Farbstoffgemenges im Korn — dasselbe kleidet die Maschenräume des Plasmaschwammes, aus dem die Chlorophyllkörper bestehen, wie ein Wandbeleg aus — zurückzuführen oder wird nicht durch eine, sondern durch mehrere zusammenwirkende Ursachen bedingt.

Bei der Darstellung der Spectren auf der beigegebenen Tafel habe ich die combinirte Kraus-Pringsheim'sche Methode angewendet. Bei so difficilen Unterschieden in Breite und Abschattirung der Bänder, wie sie die Körper der Chlorophyllgruppe zeigen, erweist sich die gewöhnliche Darstellungsweise, durch Entwerfung der Absorptionsspectrallinie, die zwar einfacher und compendiöser ist, als nicht genügend genau.

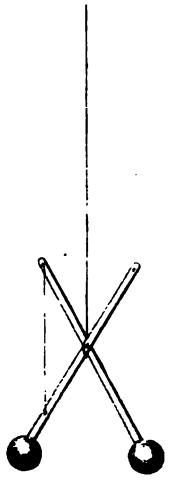
Berlin, im December 1883.

X. *Ein Vorlesungsversuch zum Beweise des Satzes, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit wächst, wenn kreisende Massen der Axe genähert werden; von W. Holtz.*

Zum Beweise des namentlich für die Kant-Laplace'sche Kosmogonie so bedeutsamen Satzes, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit kreisender Massen wächst, wenn sie durch innere Kräfte der Axe genähert werden, möchte ich das folgende kleine Experiment als besonders einfach empfehlen.

Zwei an ihrem unteren Ende durch grössere Kugeln beschwerte Stangen (siehe die Figur auf p. 384), welche

in ihrer Mitte in einem Charniergelenk nach Art einer Scheere beweglich sind, werden in selbigem Gelenke an einer längeren Schnur aufgehängt, welche am besten an der Decke des Zimmers befestigt ist. Für den Versuch wird die Scheere zuvor geöffnet und in dieser Stellung mit Hülfe eines leicht brennbaren Fadens fixirt, welcher lothrecht zwischen beide Stäbe ausgespannt und in Oeffnungen derselben befestigt ist. Um die Mitte des Fadens aber schlingt man noch einen zweiten Faden, dessen Enden ein wenig zur Seite gerichtet sind. Hierauf braucht man die letzteren nur anzuzünden und das Ganze in langsame Drehung zu versetzen. Sobald die Flamme den lothrechten Faden erreicht, wird dieser zerreissen, und mit dem Zusammenschlagen der Kugeln tritt die fragliche Beschleunigung ein. Wenn sonst kein passender Apparat zur Hand ist, kann übrigens auch eine Feuerzange aushelfen, zumal wenn sie durch Gewichte belastet wird.



Die Form des Versuches lässt sich noch mannichfach variiren, aber ich glaube, dass die gegebene bei gleicher Uebersichtlichkeit die denkbar einfachste ist.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1884. ANNALEN № 3.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XXI.

I. *Zur Theorie der Kraftübertragung durch dynamoelectrische Maschinen;* *von R. Clausius.*

§ 1. Gleichungen, welche für die einzelnen Maschinen gelten.

In einem vor kurzem veröffentlichten Aufsatze[1]) habe ich zwei Gleichungen abgeleitet, welche dazu dienen, für eine im Gange befindliche dynamoelectrische Maschine die Arbeit der ponderomotorischen Kraft und die electromotorische Kraft zu bestimmen, und welche folgendermaassen lauten:

$$\text{(I)} \qquad T = -\left[\frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)v + \left(\frac{l}{a+i}\right)^2\left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)v^2\right]i^2,$$

$$\text{(II)} \qquad E = \left[\frac{1}{a+i}\left(p + \frac{q}{b+i}\right)v - \varrho v - \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)v^2\right]i.$$

Hierin bedeutet T die Arbeit der ponderomotorischen Kraft während der Zeiteinheit und E die electromotorische Kraft, i und v stellen die Stromintensität und die Tourenzahl dar, und a, b, p, q, l, ϱ, σ und λ sind Constante, von denen die mit griechischen Buchstaben bezeichneten, insbesondere die beiden letzten, als klein gegen die übrigen zu betrachten sind. Bringt man die beiden in der ersten runden Klammer befindlichen Glieder auf gemeinsamen Nenner, und führt dann das Zeichen e ein mit der Bedeutung:

$$\text{(1)} \qquad e = b + \frac{q}{p},$$

so nehmen die Gleichungen folgende noch etwas einfachere Form an:

1) Clausius, Wied. Ann. 20. p. 353. 1883.

$$(\mathrm{I_a}) \quad T = -\left[\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} pv + \left(\frac{l}{a+i}\right)^2 \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right) v^2\right] i^2$$

$$(\mathrm{II_a}) \quad E = \left[\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} pv - \varrho v - \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right) v^2\right] i.$$

Von diesen Gleichungen kann man auch bei der Behandlung der Kraftübertragung Gebrauch machen, nämlich bei der Behandlung des Falles, wo zwei dynamoelectrische Maschinen leitend untereinander verbunden sind, und die eine durch irgend einen mechanischen Motor getrieben wird, während die andere durch den in der gemeinsamen Leitung entstehenden electrischen Strom in Bewegung geräth und somit mechanische Arbeit leisten kann. Um die Anwendung der Gleichungen auf diesen Fall möglichst bequem zu machen, ist es zweckmässig, noch eine kleine auf die Vorzeichen bezügliche Vereinfachung vorzunehmen.

Die zweite Maschine, welche durch den electrischen Strom in Bewegung geräth, dreht sich im entgegengesetzten Sinne, wie die, welche den Strom erzeugt, und man müsste daher, wenn man dieses in den Gleichungen mit ausdrücken wollte, der Grösse v für die zweite Maschine einen negativen Werth beilegen. Da ferner bei der Bewegung der ersten Maschine die ponderomotorische Kraft überwunden wird, die zweite Maschine dagegen durch die ponderomotorische Kraft in Bewegung gesetzt wird, so müsste man, wenn man dieses mit ausdrücken wollte, die Arbeit T bei der ersten Maschine, so wie es in den obigen Gleichungen geschehen ist, durch eine negative Grösse, und bei der zweiten Maschine durch eine positive Grösse darstellen. Endlich haben auch die inducirten electromotorischen Kräfte bei beiden Maschinen entgegengesetzte Richtungen, und man müsste daher auch sie zur vollständigen Bestimmung durch positive und negative Grössen darstellen.

In der Praxis würde es aber unbequem sein, bei der einen Maschine immer von negativer Drehungsgeschwindigkeit zu sprechen, und man pflegt statt dessen die Drehungsgeschwindigkeiten bei beiden Maschinen einfach durch die Tourenzahlen, also durch absolute Grössen auszudrücken,

und dabei den Umstand, dass die Drehungen nach entgegengesetzten Richtungen stattfinden, als selbstverständlich anzusehen. Ebenso sieht man es als selbstverständlich an, dass bei der einen Maschine Arbeit verbraucht und bei der anderen Arbeit gewonnen wird, und dass die in ihnen inducirten electromotorischen Kräfte entgegengesetzte Richtungen haben, und begnügt sich daher bei der Bestimmung der Arbeitsgrössen und electromotorischen Kräfte mit der Darstellung ihrer absoluten Werthe. Diesem Brauche wollen wir uns anschliessen und demgemäss mit v_1 und v_2 die beiden Tourenzahlen ohne Rücksicht auf die Richtungen der Drehungen, mit T_1 und T_2 die absoluten Werthe der Arbeitsgrössen und mit E_1 und E_2 die absoluten Werthe der electromotorischen Kräfte bezeichnen.

Dann lauten die auf die erste Maschine bezüglichen Gleichungen:

$$\text{(III)} \quad T_1 = \left[\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p v_1 + \left(\frac{l}{a+i}\right)^2 \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right) v_1^2\right] i_1^2,$$

$$\text{(IV)} \quad E_1 = \left[\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p v_1 - \varrho v_1 - \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right) v_1^2\right] i.$$

Um die entsprechenden Gleichungen für die zweite Maschine zu bilden, ist noch eine Bemerkung über die Vorzeichen der Glieder, welche v^2 als Factor haben, und des Gliedes ϱv vorauszuschicken. Lassen wir vorläufig das Glied ϱv ausser acht, so gilt für die übrigen Glieder Folgendes. Sollten T und E auch ihren Vorzeichen nach bestimmt werden, so müssten wir, um von den auf die erste Maschine bezüglichen Gleichungen zu den auf die zweite Maschine bezüglichen zu gelangen, v_1 durch $-v_2$ ersetzen. Dabei würden die Glieder ersten Grades ihr Vorzeichen ändern, die Glieder zweiten Grades aber ihr Vorzeichen unverändert beibehalten. Sollen dagegen T und E nur ihren absoluten Werthen nach dargestellt werden, so haben wir in denjenigen Fällen, wo das vorige Verfahren negative Werthe von T und E geben würde, an der rechten Seite alle Vorzeichen umzukehren, was zur Folge hat, dass in den auf die zweite Maschine bezüglichen Gleichungen die Glieder ersten Grades

das gleiche, die Glieder zweiten Grades aber das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie in den auf die erste Maschine bezüglichen Gleichungen. Was endlich noch das bisher ausser acht gelassene Glied ϱv anbetrifft, so wirkt die durch das Product $\varrho v i$ dargestellte electromotorische Kraft immer in dem Sinne, welcher der Richtung des Stromes i entgegengesetzt ist, sie muss also bei der ersten Maschine, bei welcher die ganze inducirte electromotorische Kraft die Richtung des Stromes i hat, den absoluten Werth derselben verkleinern, was dem in (IV) vor ϱv stehenden Minuszeichen entspricht; bei der zweiten Maschine dagegen, wo die ganze electromotorische Kraft dem Strome i entgegengerichtet ist, muss die durch jenes Product dargestellte electromotorische Kraft ihren absoluten Werth vergrössern, und das Glied ϱv muss daher das Pluszeichen haben. Die Gleichungen nehmen daher für die zweite Maschine folgende Form an:

$$\text{(V)} \qquad T_2 = \left[\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p v_2 - \left(\frac{l}{a+i}\right)^2 \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right) v_2^2\right] i^2,$$

$$\text{(VI)} \qquad E_2 = \left[\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p v_2 + \varrho v_2 + \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right) v_2^2\right] i.$$

Bei der Bildung dieser Gleichungen ist vorausgesetzt, dass die zweite Maschine der ersten gleich sei. Sollte die zweite Maschine von der ersten verschieden sein, so würden die in den Gleichungen vorkommenden, von der Natur der Maschine abhängigen Constanten bei ihr andere Werthe haben, als bei der ersten Maschine, und dieser Unterschied müsste in der Bezeichnung auf irgend eine Weise, z. B. durch Hinzufügung von Indices zu den Buchstaben, bemerklich gemacht werden.

Die vier Gleichungen (III), (IV), (V) und (VI) können nun dazu dienen, verschiedene auf die gemeinsame Wirkung der beiden Maschinen bezügliche Rechnungen auszuführen.

§ 2. Bestimmung der Stromintensität.

Wenn die beiden Maschinen in der Weise, wie es bei der Kraftübertragung geschieht, durch Leiter, welche keine weiteren electromotorischen Kräfte enthalten, untereinander

verbunden sind, so wird die in der ganzen Leitung wirksame electromotorische Kraft durch die Differenz $E_1 - E_2$ dargestellt. Demnach können wir, wenn R den gesammten Leitungswiderstand bedeutet, schreiben:

$$Ri = E_1 - E_2. \tag{2}$$

Setzen wir hierin für E_1 und E_2 ihre in (IV) und (VI) gegebenen Werthe ein, so kommt:

$$\left\{ \begin{aligned} Ri = \Big[&\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p(v_1 - v_2) - \varrho(v_1 + v_2) \\ &- \Big(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\Big)(v_1^2 + v_2^2)\Big] i, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

welche Gleichung zur Bestimmung von i anzuwenden ist.

Als erste unmittelbar ersichtliche Lösung erhält man:

$$i = 0. \tag{4}$$

Nachdem dieses festgestellt ist, kann man die Gleichung durch i dividiren und erhält dann, nachdem man noch die Glieder, welche keinen Nenner haben, auf die linke Seite geschafft hat, folgende Gleichung:

$$\left\{ \begin{aligned} &R + \varrho(v_1 + v_2) + \sigma(v_1^2 + v_2^2) \\ &= \frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p(v_1 - v_2) - \frac{\lambda}{b+i}(v_1^2 + v_2^2). \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Diese Gleichung denken wir uns durch die an der linken Seite stehende Grösse dividirt und führen dann folgende abgekürzte Zeichen ein:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= \frac{v_1 - v_2}{R + \varrho(v_1 + v_2) + \sigma(v_1^2 + v_2^2)}, \\ U &= \frac{v_1^2 + v_2^2}{R + \varrho(v_1 + v_2) + \sigma(v_1^2 + v_2^2)}. \end{aligned} \right. \tag{6}$$

Dann lautet die Gleichung:

$$1 = \frac{e+i}{(a+i)(b+i)} pu - \frac{\lambda}{b+i} U. \tag{7}$$

Wenn man diese Gleichung noch mit $(a+i)(b+i)$ multiplicirt und dann die Glieder nach Potenzen von i ordnet, so gelangt man zu der quadratischen Gleichung:

$$i^2 - (pu - \lambda U - a - b)i - epu + \lambda aU + ab = 0, \tag{8}$$

durch deren Auflösung man erhält:

$$(9)\quad i = \tfrac{1}{2}(pu - \lambda U - a - b) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(pu - \lambda U - a - b)^2 + 4epu - 4\lambda aU - 4ab}.$$

Von den beiden vor dem Wurzelzeichen stehenden Vorzeichen hat man, gemäss der schon in meinem vorigen Aufsatze bei der entsprechenden Gleichung gemachten Bemerkung das obere zu wählen, und auch bei Anwendung dieses Vorzeichens hat man noch die Einschränkung zu machen, dass man den Ausdruck nur für solche Werthe von u, welche gross genug sind, um ihn positiv zu machen, gelten lässt. Bei kleinen, unter einer gewissen Grenze liegenden Werthen von u, welche diesen Ausdruck negativ machen, hat man statt seiner den unter (4) gegebenen Werth Null für i als gültig zu betrachten. Wollte man die Sache ganz streng behandeln, so würde man in diesem Intervalle nicht genau den Werth Null, sondern einen von dem remanenten Magnetismus im festen Electromagnet der ersten Maschine abhängigen, sehr kleinen Werth für i erhalten. Da dieses Intervall aber nur diejenigen Geschwindigkeiten der ersten Maschine umfasst, welche während des Angehens derselben und bevor noch die zweite Maschine in Bewegung geräth, vorkommen, so haben die innerhalb desselben stattfindenden sehr kleinen Werthe von i wenig Bedeutung, und wir brauchen unsere Aufmerksamkeit nur auf die durch die Gleichung (9) bestimmten, für grössere Drehungsgeschwindigkeiten geltenden Werthe zu richten.

Man kann dieser letzteren Gleichung noch eine etwas einfachere Form geben. Setzt man nämlich zur Abkürzung:

$$(10)\quad u' = u - \frac{\lambda}{p}U = \frac{v_1 - v_2 - \frac{\lambda}{p}(v_1^2 + v_2^2)}{R + \varrho(v_1 + v_2) + \sigma(v_1^2 + v_2^2)},$$

$$(11)\quad c = (e - a)p = q - pa + pb,$$

so geht die Gleichung über in:

$$(12)\quad i = \tfrac{1}{2}(pu' - a - b) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(pu' + a - b)^2 + 4cu}.$$

§ 3. Vergleichung der Arbeitsgrössen.

Nachdem für die Stromintensität i ein bestimmter Ausdruck gewonnen ist, sind auch die unter (III) und (V) gegegebenen Ausdrücke von T_1 und T_2 vollständig bestimmt, sodass sie zur Berechnung dieser beiden Arbeitsgrössen dienen können.

Um die Formeln zur Vergleichung bequemer zu machen, wollen wir zunächst für das mit den kleinen Factoren σ und λ behaftete Glied ein einfaches Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$\gamma = \left(\frac{l}{a+i}\right)^2 \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right). \tag{13}$$

Dann lauten die beiden Gleichungen:

$$T_1 = \left(\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} pv_1 + \gamma v_1^2\right) i^2, \tag{14}$$

$$T_2 = \left(\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} pv_2 - \gamma v_2^2\right) i^2. \tag{15}$$

Ferner ergibt sich aus (5):

$$\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p = \frac{R + \varrho(v_1+v_2) + \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)(v_1^2+v_2^2)}{v_1 - v_2}.$$

Hierin wollen wir wieder ein abgekürztes Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$\delta = \varrho(v_1+v_2) + \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)(v_1^2+v_2^2), \tag{16}$$

wodurch die Gleichung übergeht in:

$$\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p = \frac{R+\delta}{v_1 - v_2}. \tag{17}$$

Durch Anwendung dieser Gleichung können wir den beiden obigen für T_1 und T_2 geltenden Gleichungen folgende Form geben:

$$T_1 = \left[(R+\delta)\frac{v_1}{v_1 - v_2} + \gamma v_1^2\right] i^2, \tag{18}$$

$$T_2 = \left[(R+\delta)\frac{v_2}{v_1 - v_2} - \gamma v_2^2\right] i^2. \tag{19}$$

Subtrahirt man diese Gleichungen voneinander, so erhält man:

$$T_1 - T_2 = [R + \delta + \gamma(v_1^2 + v_2^2)]\, i^2. \tag{20}$$

Dividirt man die beiden Gleichungen in einander, so erhält man zunächst:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{1 - \gamma \frac{v_2 (v_1 - v_2)}{R + \delta}}{1 + \gamma \frac{v_1 (v_1 - v_2)}{R + \delta}},$$

und wenn man hierin den die Grösse γ enthaltenden Bruch nach γ entwickelt und dabei die Glieder von höherem als erstem Grade vernachlässigt, weil γ die Factoren σ und λ enthält, von denen auch in früheren Rechnungen schon die höheren Potenzen vernachlässigt wurden, so ergibt sich:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{v_2}{v_1}\left(1 - \gamma \frac{v_1^2 - v_2^2}{R + \delta}\right). \tag{21}$$

Diese Gleichungen zeigen in übersichtlicher Weise, wie die Grössen T_1 und T_2 von den Drehungsgeschwindigkeiten und der durch dieselben mitbedingten Stromintensität abhängen, und in welchen Beziehungen sie zu einander stehen. Man kann die Gleichungen daher zu Schlüssen darüber benutzen, wie man den Gang der Maschinen einzurichten hat, um unter gegebenen Umständen die günstigste Wirkung zu erhalten.

Man führt in letzterer Beziehung zuweilen einen Schluss an, welchen M. H. Jacobi im Jahre 1840 über die Wirksamkeit einer durch einen galvanischen Strom getriebenen electromagnetischen Maschine älterer Construction gezogen und in folgenden Worten ausgesprochen hat[1]): „Der Zinkverbrauch, welcher stattfindet, wenn die Maschine in Ruhe ist und gar nicht arbeitet, ist das Doppelte von dem, welcher stattfindet, wenn sie das Maximum ihrer Arbeit hervorbringt.“ Diesen Schluss hat man in veränderter Form auch auf die Kraftübertragung durch dynamoelectrische Maschinen angewandt, bei der die Drehungsgeschwindigkeiten der beiden

1) Jacobi, Berichte d. Brit. Ass. 1840. u. Pogg. Ann. **51.** p. 358. 1840.

Maschinen als die zur Bestimmung der Stromstärke und der Arbeitsgrössen dienenden Veränderlichen gewählt werden können, und hat daraus den Satz abgeleitet, dass das Maximum des Nutzeffectes erzielt werde, wenn das Verhältniss der beiden Drehungsgeschwindigkeiten wie 2:1 sei.

Hierbei muss jedoch einerseits bemerkt werden, dass Jacobi seinen Schluss aus ziemlich ungenauen Voraussetzungen gezogen hat, von denen gleich die erste lautet: „Die Stärke des in weichem Eisen durch galvanische Ströme erregten Magnetismus ist proportional der Kraft dieser Ströme", und dass man daher seinem Schlusse keine grosse Genauigkeit beimessen darf. Andererseits muss beachtet werden, dass sein Schluss sich auf einen genau definirten Vorgang bezieht, bei dem eine galvanische Batterie, deren Arbeit feststehenden Gesetzen unterworfen ist, als Kraftquelle diente, während bei der Kraftübertragung durch dynamoelectrische Maschinen andere Kraftquellen zu verwenden sind, deren Arbeit in verschiedenen Weisen zu unserer Verfügung stehen kann. Man muss daher, wenn man Untersuchungen über das Maximum der übertragenen Arbeit anstellen will, vorher die Bedingungen, auf welche dieses Maximum sich beziehen soll, genau festsetzen.

§ 4. Bestimmung der Arbeit T_2, wenn die Geschwindigkeit v_1 als gegeben betrachtet wird.

In Bezug auf den zuletzt erwähnten Umstand, dass die Kraftquelle, welche wir zum Treiben der ersten Maschine anzuwenden haben, uns in verschiedenen Weisen zur Verfügung stehen kann, wollen wir zunächst die Voraussetzung machen, dass die Kraftquelle von der Art sei, dass sie uns eine beliebig grosse Arbeit liefern könne, sodass die Grösse der an der ersten Maschine zu verbrauchenden Arbeit T_1 unbeschränkt sei, wie es z. B. der Fall wäre, wenn uns eine sehr grosse Wasserkraft zur Verfügung stände, welche das für unsere Maschine vorhandene Bedürfniss selbst bei grösstmöglichem Arbeitsverbrauche noch überträfe. Es fragt sich nun, wie man unter diesen Umständen an der zweiten Maschine eine möglichst grosse Arbeit T_2 erhalten kann.

Wenn T_2 gross werden soll, so müssen nach (15) v_2 und i gross sein, und ein grosser Werth von i setzt wiederum nach (12) einen grossen Werth der Differenz $v_1 - v_2$ voraus. Die beiden Bedingungen, dass v_2 und $v_1 - v_2$ gross seien, lassen sich aber nur erfüllen, wenn v_1 gross ist, und das erste Erforderniss zur Erreichung eines grossen Werthes von T_2 ist somit, dass v_1, die Drehungsgeschwindigkeit der ersten Maschine, möglichst gross gemacht werde. In dieser Beziehung sind uns aber durch die mechanischen Schwierigkeiten, welche der Hervorbringung sehr grosser Drehungsgeschwindigkeiten entgegenstehen, gewisse Grenzen gesetzt, und wir wollen daher die grösste erreichbare Drehungsgeschwindigkeit als eine gegebene Grösse betrachten und annehmen, dass v_1 diese Drehungsgeschwindigkeit sei.

Alsdann bleibt von den beiden Drehungsgeschwindigkeiten nur v_2 unbestimmt, und als Function dieser Grösse können wir somit die Arbeit T_2 ansehen. Zur Bestimmung dieser Function wenden wir die schon abgeleitete Gleichung (19) an, nämlich:

$$T_2 = \left[(R + \delta)\frac{v_2}{v_1 - v_2} - \gamma v_2^2\right] i^2,$$

in welcher wir für i den in (12) gegebenen Ausdruck einsetzen können. Die in diesem letzteren vorkommenden Grössen u und u' sind gemäss (6) und (10) Functionen von v_1 und v_2, und somit ist auch der auf diese Weise erhaltene ganze Ausdruck von T_2 eine Function von v_1 und v_2. Da wir ferner v_1 als gegeben und nur v_2 als veränderlich annehmen, so können wir auch sagen, dass auf diese Weise T_2 als Function der einzigen Veränderlichen v_2 dargestellt ist.

Um nun denjenigen Werth von v_2 zu finden, für welchen T_2 ein Maximum ist, hat man das bekannte Verfahren anzuwenden, dass man T_2 nach v_2 differentiirt, den Differentialcoëfficienten gleich Null setzt und die dadurch entstehende Gleichung nach v_2 auflöst.

Die Ausführung dieser Rechnung ist aber wegen des vielfachen und verschiedenartigen Vorkommens von v_2 nicht ohne Weitläufigkeit, selbst wenn man, was unzweifelhaft gestattet ist, die mit den kleinen Factoren σ und λ behafteten

Glieder durch Einführung von Näherungswerthen vereinfacht. Wir wollen uns daher hier damit begnügen, die Rechnung für einen speciellen Fall und unter gewissen Vernachlässigungen wirklich auszuführen, um wenigstens eine ungefähre Vorstellung von der Grösse des betreffenden Werthes von v_2 zu gewinnen. Wir wollen nämlich annehmen, die Constante c, welche gleich $(e-a)p$ ist, und daher je nach den Werthen von e und a möglicherweise positiv oder negativ und somit im besonderen Falle auch Null sein kann, habe den letztgenannten speciellen Werth Null. Dann nimmt der Ausdruck von i folgende einfache Form an:

$$i = pu' - b.$$

Ferner wollen wir in der Rechnung alle Glieder, welche mit den Factoren ϱ, σ und λ behaftet sind, vernachlässigen; dann haben wir u' gleich $(v_1 - v_2)/R$ und die Grössen γ und δ gleich Null zu setzen. Dadurch geht die für T_2 geltende Gleichung über in:

$$T_2 = R\frac{v_2}{v_1 - v_2}\left(p\frac{v_1 - v_2}{R} - b\right)^2. \tag{22}$$

Durch Differentiation dieser Gleichung nach v_2 erhält man:

$$\frac{\partial T_2}{\partial v_2} = \frac{1}{(v_1 - v_2)^2}\left(p\frac{v_1 - v_2}{R} - b\right)(2pv_2^2 - 3pv_1v_2 + pv_1^2 - Rbv_1). \tag{23}$$

Soll nun dieser Differentialcoëfficient gleich Null sein, so muss einer der drei Factoren, aus welchen der an der rechten Seite befindliche Ausdruck besteht, gleich Null sein. Der erste Factor kann selbstverständlich nicht gleich Null werden. Der zweite Factor:

$$p\frac{v_1 - v_2}{R} - b$$

stellt die Stromintensität i dar und darf für unseren Fall auch nicht gleich Null gesetzt werden. Wir haben somit den dritten Factor gleich Null zu setzen und erhalten dadurch zur Bestimmung von v_2 die Gleichung:

$$2pv_2^2 - 3pv_1v_2 + pv_1^2 - Rbv_1 = 0. \tag{24}$$

Hieraus ergibt sich:

$$v_2 = \tfrac{3}{4}v_1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{16}v_1^2 + \frac{Rbv_1}{2p}}.$$

Das obere vor dem Wurzelzeichen stehende Vorzeichen gibt für v_2 einen Werth, welcher grösser als v_1 und daher in unserem Falle unzulässig ist; demnach haben wir das untere Vorzeichen anzuwenden und erhalten dadurch, nach einer noch vorgenommenen kleinen Umformung, folgende Gleichung:

$$v_2 = v_1 \left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} \sqrt{1 + 8 \frac{Rb}{p v_1}} \right). \tag{25}$$

Diese Gleichung zeigt, dass der dem Maximum von T_2 entsprechende Werth von v_2 nicht, wie der oben erwähnte Satz aussagt, gleich $v_1/2$ ist, sich aber mit wachsendem v_1 diesem Werthe nähert.

§ 5. Bestimmung der Arbeit T_2, wenn die Arbeit T_1 als gegeben betrachtet wird.

Die zweite Voraussetzung, welche wir in Bezug auf die zum Treiben der ersten Maschine dienende Kraftquelle machen wollen, möge sein, dass dieselbe nur eine Arbeit T_1 von bestimmter Grösse liefern könne. Es fragt sich, wie unter diesen Umständen die an der zweiten Maschine zu gewinnende Arbeit T_2 von der Art, wie der Gang der Maschinen stattfindet, abhängt.

Dabei ist zunächst zu bemerken, dass, wenn T_1 gegeben ist, dann von den beiden Drehungsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 nur noch eine als unabhängig zu betrachten ist. Da nämlich zwischen den fünf Grössen v_1, v_2, T_1, T_2 und i drei Gleichungen (III), (V) und (3) gegeben sind, so kann man aus je zweien dieser Grössen die übrigen drei bestimmen. Wir wollen nun v_1 als diejenige Grösse wählen, welche neben T_1 dazu dienen soll, die drei anderen Grössen i, v_2 und T_2 zu bestimmen.

Um i als Function von T_1 und v_1 zu bestimmen, wenden wir die Gleichung (III) an, nämlich:

$$T_1 = \left[\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p r_1 + \left(\frac{l}{a+i} \right)^2 \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i} \right) v_1^2 \right] i^2,$$

welche wir in folgende Form bringen können:

$$\frac{(e+i)\,i^2}{(a+i)(b+i)} = \frac{T_1}{p v_1} - \left(\frac{li}{a+i} \right)^2 \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i} \right) \frac{v_1}{p}. \tag{26}$$

Die Auflösung dieser Gleichung nach i wird durch das zweite an der rechten Seite stehende Glied erschwert, welches i im Nenner in höherer Potenz enthält, als das an der linken Seite stehende Glied. Indessen ist zu beachten, dass jenes an der rechten Seite stehende Glied mit den Factoren σ und λ behaftet ist, welche so klein sind, dass wir Grössen, welche in Bezug auf sie von höherer als erster Ordnung sind, vernachlässigen können. Dieser Umstand kann bei der Behandlung der Gleichung benutzt werden. Wir bestimmen nämlich zuerst denjenigen Werth von i, welcher sich aus der Gleichung ergibt, wenn wir in ihr jenes die Factoren σ und λ enthaltende Glied vernachlässigen. Bezeichnen wir diesen Werth zum Unterschiede mit i', so lautet die zu seiner Bestimmung dienende Gleichung:

$$\frac{(e+i')\,i'^2}{(a+i')(b+i')} = \frac{T_1}{pv_1}. \tag{27}$$

Der hieraus hervorgehende Werth i' kann sich von i nur um eine Grösse von der Ordnung der Factoren σ und λ unterscheiden, und wenn wir nun zu (26) zurückkehren und in dem mit diesen Factoren behafteten Gliede an die Stelle von i den Werth i' setzen, so ändert sich dadurch der an der rechten Seite stehende Ausdruck nur um eine Grösse, die in Bezug auf σ und λ von zweiter Ordnung ist und daher vernachlässigt werden kann. Wir bilden also statt (26) die Gleichung:

$$\frac{(e+i)\,i^2}{(a+i)(b+i)} = \frac{T_1}{pv_1} - \left(\frac{li'}{a+i'}\right)^2\left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i'}\right)\frac{v_1}{p}. \tag{28}$$

Hierin wollen wir ein vereinfachendes Zeichen z einführen mit der Bedeutung:

$$z = \frac{T_1}{pv_1} - \left(\frac{li'}{a+i'}\right)^2\left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i'}\right)\frac{v_1}{p}, \tag{29}$$

wodurch die Gleichung übergeht in:

$$\frac{(e+i)\,i^2}{(a+i)(b+i)} = z. \tag{30}$$

Die beiden Gleichungen (27) und (30) sind von gleicher Form, sodass sich aus der Auflösung der einen, sofort auch

die der anderen ergibt. Indem wir die Gleichung (30) zur Behandlung auswählen, bringen wir dieselbe durch Multiplication mit $(a+i)(b+i)$ auf die Form einer gewöhnlichen cubischen Gleichung, nämlich:

$$i^3 - (z-e)i^2 - (a+b)zi - abz = 0, \tag{31}$$

und wenden auf diese das bekannte für cubische Gleichungen geltende Auflösungsverfahren an. Von den drei dadurch erhaltenen Wurzeln ist des Vorzeichens wegen nur eine anwendbar, und diese bestimmt sich folgendermaassen. Es sei φ der zwischen 0 und π liegende Winkel, welcher der Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{(z-e)^3 + \frac{9}{2}(a+b)(z-e)z + \frac{27}{2}abz}{\sqrt{[(z-e)^2 + 3(a+b)z]^3}} \tag{32}$$

genügt, dann wird i durch folgenden Ausdruck dargestellt:

$$i = \tfrac{1}{3}(z-e) + \tfrac{2}{3}\sqrt{(z-e)^2 + 3(a+b)z}\,.\cos\frac{\varphi}{3}. \tag{33}$$

Was den in dem vorstehenden Ausdrucke als Factor des letzten Gliedes vorkommenden Cosinus anbetrifft, so ergibt sich aus Gleichung (32), dass, während z von 0 bis ∞ wächst, der Winkel φ von π bis 0 abnimmt, woraus folgt, dass $\varphi/3$ von $\pi/3$ bis 0 abnimmt und demgemäss $\cos(\varphi/3)$ von $\frac{1}{2}$ bis 1 zunimmt. Dabei ist noch zu bemerken, dass die erste Zunahme ziemlich schnell stattfindet, sodass bei den Werthen von z, welche in der Praxis vorzukommen pflegen, $\cos(\varphi/3)$ nicht sehr verschieden von 1 ist.

Man kann nun die Gleichungen (32) und (33) in doppelter Weise anwenden. Wenn man in ihnen z durch T_1/pv_1 ersetzt, so bilden sie die Auflösung der Gleichung (27) und geben jenen angenäherten Werth von i, welcher oben mit i' bezeichnet wurde. Durch Einsetzung desselben in (29) erhält man die Grösse z, und wenn man diese kennt, so kann man durch abermalige Anwendung der Gleichungen (32) und (33) den genaueren Werth von i berechnen.

Nachdem auf diese Weise die Intensität i, die erste der drei oben genannten Grössen, bestimmt ist, machen die beiden anderen Grössen keine Schwierigkeit mehr.

Zur Bestimmung von v_2 kann die Gleichung (5) dienen. Diese ist eine Gleichung zweiten Grades und könnte als solche aufgelöst werden, indessen kann auch hier wieder der Umstand, dass das Quadrat von v_2 nur mit den kleinen Factoren σ und λ vorkommt, zu einer Erleichterung der Rechnung benutzt werden. Dazu möge die Gleichung in folgender Form geschrieben werden:

$$(34)\quad v_2 = \frac{\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p v_1 - R - \varrho v_1 - \left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)(v_1^2 + v_2^2)}{\frac{e+i}{(a+i)(b+i)} p + \varrho}.$$

Hierin kann man nun zuerst das letzte Glied des Zählers fortlassen und aus der so abgekürzten Gleichung einen angenäherten Werth von v_2 berechnen. Darauf kann man diesen Werth in jenes letzte Glied einsetzen und dann durch eine zweite Rechnung den genaueren Werth von v_2 bestimmen.

Ist auch diese Grösse v_2 bekannt, so ergibt sich nun die Bestimmung der letzten, und vorzugsweise in Frage stehenden Grösse, nämlich der von der zweiten Maschine geleisteten Arbeit T_2, ganz von selbst, indem dazu die Gleichung (20) angewandt werden kann, welche sich, nachdem für γ und δ ihre Werthe gesetzt sind, folgendermaassen schreiben lässt:

$$(35)\quad T_2 = T_1 - \Big[R + \varrho(v_1 + v_2) + \left(1 + \frac{l^2}{(a+i)^2}\right)\left(\sigma + \frac{\lambda}{b+i}\right)(v_1^2 + v_2^2)\Big] i^2.$$

Man sieht aus dieser Gleichung, in welcher das an der rechten Seite befindliche negative Glied den Factor i^2 hat, dass T_2 um so grösser ist, nämlich dem gegebenen Werthe T_1 um so näher kommt, je kleiner i ist. Da nun nach (33) i gleichzeitig mit z abnimmt, und da ferner der unter (29) gegebene Ausdruck von z als Hauptglied den Bruch T_1/pv_1 hat, und daher abnimmt, wenn v_1 zunimmt, so nimmt auch i ab, wenn v_1 zunimmt, und man gelangt daher für T_2 zu

dem Resultate, dass sein Werth um so grösser wird, je grösser man v_1 werden lässt, und in der That hat es sich auch in der Praxis herausgestellt, dass man, um T_2 im Verhältnisse zu T_1 möglichst gross zu machen, die Drehungsgeschwindigkeit der ersten Maschine bis zur äussersten erreichbaren Grenze steigern muss.

Die Geschwindigkeit v_2 der zweiten Maschine wird gemäss (34) um so grösser, je grösser v_1 und je kleiner i wird. Da nun dem Vorigen nach bei gegebenem Werthe von T_1 mit einer Zunahme von v_1 eine Abnahme von i verbunden ist, so folgt aus (34), dass v_2 beim Wachsen von v_1 in noch stärkerem Grade, als v_1 selbst, wächst.

Von einem bestimmten Verhältnisse zwischen v_2 und v_1, für welches T_2 ein Maximum wäre, kann, wie aus dem Vorstehenden leicht ersichtlich ist, in diesem Falle, wo T_1 als gegeben betrachtet wird, nicht die Rede sein.

Ebenso wie in diesem Paragraphen aus den Grössen T_1 und v_1 die drei anderen Grössen i, v_2 und T_2 und in den vorausgegangenen Paragraphen aus den Grössen v_1 und v_2 die Grössen i und T_2 bestimmt wurden, kann man auch noch eine Reihe von anderen Rechnungen mit unseren Gleichungen ausführen, indem man irgend zwei der fünf Grössen i, v_1, v_2, T_1 und T_2 auswählen und aus ihnen die drei anderen Grössen bestimmen kann. Wir wollen uns aber hier mit den oben beispielsweise ausgeführten Rechnungen, welche sich auf zwei für die Praxis wichtige Fälle beziehen, begnügen.

Ferner möge noch über die durch die Rechnungen abgeleiteten Resultate, welche zum Theil vielleicht eine weniger einfache Form haben, als für den praktischen Gebrauch zu wünschen wäre, bemerkt werden, dass es sich hier darum handelte, die Resultate aus den Hauptgleichungen in der Weise genau abzuleiten, dass nur höhere Potenzen der kleinen Grössen σ und λ vernachlässigt würden. Will man sich mit einem geringeren Grade von Genauigkeit begnügen, so kann man natürlich die Rechnungen und die Form ihrer Ergebnisse vereinfachen. Auch wird es, wenn die aus den Hauptgleichungen hervorgehenden Resultate einmal bekannt sind, nicht schwer sein, Näherungsformeln zu bilden, welche

die Resultate mit einer für gewisse praktische Zwecke ausreichenden Genauigkeit darstellen und für den Gebrauch bequemer sind. Auf solche äussere Umgestaltungen will ich aber hier nicht eingehen, weil sie ausserhalb des Zweckes dieser Abhandlung liegen.

Bonn, Januar 1884.

II. *Versuche über die Brechung von Strom- und Kraftlinien an der Grenze verschiedener Mittel; von Wilhelm von Bezold.*

(Aus den Sitzungsber. der math.-phys. Cl. d. k. bayer. Acad. d. Wiss. 1883. Heft III; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Schon im Jahre 1845 wies Kirchhoff[1]) durch theoretische Betrachtungen nach, dass galvanische Ströme beim Durchschneiden einer Grenzfläche verschiedener Leiter, sofern dies nicht senkrecht auf die Trennungsfläche erfolgt, eine Brechung erfahren müssen.

Für diese Brechung gilt das Gesetz:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{K_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{K_2},$$

wenn man unter α_1 den Einfalls- und unter α_2 den Brechungswinkel einer Stromlinie versteht, und wenn K_1 und K_2 die Leitungsfähigkeiten der beiden Substanzen bezeichnen.

Einen experimentellen Beweis dieses Satzes, an dessen Richtigkeit man bei der Einfachheit der theoretischen Grundlage und nachdem Kirchhoff selbst wenigstens für den Fall eines Metalles die Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch nachgewiesen hatte, ohnehin nicht zweifeln konnte, lieferte Quincke[2]) im Jahre 1856 durch Untersuchung der Potentiallinien auf einer aus Blei und Kupfer zusammengesetzten Kreisscheibe, wobei er jedoch die Brechung als solche nicht besonders hervorhob.

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. **64**. p. 497. 1845.

2) Quincke, Pogg. Ann. **97**. p. 382—396. 1856.

Ein speciell zum Beweise dieser Brechung angestellter Versuch wurde vor zwei Jahren von Tribe beschrieben.[1]) Derselbe ist jedoch sehr complicirt und lange nicht so einwurfsfrei, als der oben genannte, von Quincke angestellte, dessen Wiederholung aber immer eine mühsame und schwierige Sache ist, sodass es wohl nicht unerwünscht ist, eine einfachere Methode kennen zu lernen, die sich sogar zu Vorlesungszwecken benutzen lässt.

Eine solche bietet sich in einer Modification des alten von Arago herrührenden und von Seebeck weiter verfolgten Versuches über das Anhängen und über die Anordnung von Eisenfeile an Leitern, welche vom Strome durchflossen werden.

Führt man nämlich einen kräftigen Strom — ich benutzte den Strom einer Dynamomaschine von ungefähr 12 Ampère — durch Blechplatten von nicht zu grosser Breite, so erhält man beim Bestäuben mit ganz feinem Eisenpulver (limatura martis) sehr schöne Potentiallinien.

Die Breite der Platten darf nicht zu erheblich sein, da sonst die Stromesdichtigkeit, die hier nicht gleichgültig ist, an einzelnen Stellen eine zu geringe wird. Auch die Beschaffenheit des Eisenpulvers ist für das Gelingen des Versuches von Bedeutung; dasselbe soll ein wenig magnetisch sein, aber ja nicht zu stark, weil es sich sonst nicht gleichförmig aufstreuen lässt und unabhängig vom Strome Zusammenballungen zeigt. Desgleichen ist die Oberflächenbeschaffenheit der Platten nicht ohne Einfluss; weder ganz blank polirte, noch schmutzige Oberflächen sind geeignet, dagegen gelingen mir die Figuren sehr gut, wenn ich sie zuerst auf ganz blanker Fläche herstelle, alsdann die anfangs erhaltenen undeutlichen auf ein mit Kautschuklösung bestrichenes Papier abdrucke und hierauf nach flüchtiger Reinigung mit Weingeist die Platte abermals zu dem Versuche benutze. Es scheint, dass bei diesem Verfahren gerade noch eine Spur eines klebrigen Ueberzuges zurückbleibt, der das Gelingen des Versuches ausserordentlich begünstigt.

1) Tribe, Proc. Roy. Soc. **30.** p. 435. 1881.

Endlich muss man auch darauf acht haben, dass die Platten nur lose auf einer Unterlage aufliegen, also etwa auf losen Papierbäuschchen oder auf Stücken von Kautschukschläuchen, damit sie sich leicht in ganz leise Erzitterungen versetzen lassen.

Bestreut man die Platten, während der Strom hindurchgeht, in der bekannten Weise sehr fein mit Eisenpulver, und führt man alsdann mit einem leichten Holzklötzchen kurze Schläge gegen dieselben, am besten gegen die Klemmschrauben, welche den Strom zuführen, so ordnen sich die Eisentheilchen zu feinen Streifen an, die nach dem Oerstedt'schen Gesetze senkrecht auf den Stromlinien stehen und mithin Linien gleichen Potentiales sind.

Stellt man solche Platten her, die aus verschiedenen Metallen zusammengesetzt sind, so erleiden diese Linien an der Grenzlinie beider Metalle eine Brechung, die man alsdann mit einem Blicke übersehen kann.

Ich habe mir zu dem Zwecke Platten verfertigen lassen, die aus Kupfer und Zink, beziehungsweise aus Kupfer und Neusilber zusammengesetzt sind. Die Platten bilden Rechtecke von 12 cm Länge und 4 cm Breite. Dabei ging bei zweien die Trennungslinie beider Metalle schief durch die Mitte, sodass die Seitenkanten unter 45° geschnitten wurden, bei den übrigen Platten waren Kreise von 3 cm Durchmesser aus der Mitte herausgedreht und dafür solche von dem anderen Metalle durch Erwärmen des umschliessenden genau eingepasst.

In allen Fällen erfolgte die Brechung der Potentiallinien in der von der Theorie geforderten Weise, und ist besonders der Versuch mit der Neusilber-Kupferplatte mit schiefer Trennungslinie ausserordentlich schlagend.

Bei jenen Platten, in deren Mitte sich der Kreis aus dem schlechter leitenden Metalle befindet, also Zink oder Neusilber in Kupfer, kommen die Potentiallinien auf diesen Kreisen nicht sehr deutlich zu Stande, da eben der grösste Theil des Stromes durch das umschliessende Kupfer geht, und deshalb die Stromesdichtigkeit auf den eingeschlossenen

Platten eine zu geringe wird, um noch kräftig auf die Eisentheilchen wirken zu können.

Selbstverständlich müssen auch bei einem stationären Wärmestrome die Stromlinien eine ähnliche Brechung erleiden, und hoffe ich auch, dies nach Art des Senarmont'schen Versuches anschaulich machen zu können. Die hierauf bezüglichen Experimente sind jedoch noch nicht weit genug gediehen, um ihrer jetzt schon weiter Erwähnung zu thun.

Für galvanische Ströme ist der experimentelle Beweis der von der Theorie geforderten Brechung, wie bemerkt, bereits durch andere geliefert worden, und können die hier mitgetheilten Versuche höchstens wegen ihrer grösseren Einfachheit und Anschaulichkeit Interesse beanspruchen. Für Wärmeströme ergibt sich die Brechung als unmittelbare Folgerung einer in ihren Grundlagen durchaus festbegründeten Theorie, sodass ein experimenteller Beweis kaum nothwendig erscheint.

Ganz anders verhält sich dies mit der Brechung der electrischen Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Dielectrica.

Da jeder Vertheilung von galvanischen oder Wärmeströmen auch eine solche electrischer Kraftlinien entspricht, und da die Formeln, welche diese Vertheilungen darstellen, genau die nämlichen sind, sofern man nur anstatt der Constanten, welche das galvanische Leitungsvermögen oder die Wärmeleistungsfähigkeit ausdrücken, die Dielectricitätsconstanten einsetzt, so ergibt sich von selbst, dass auch die electrischen Kraftlinien an der Grenzfläche zweier Dielectrica eine Brechung erleiden müssen.

Der erste, der auf diese Folgerung aufmerksam gemacht hat, war meines Wissens Mascart, in dessen mit Joubert herausgegebenen Werke[1]) ich diesen Satz übrigens erst bemerkte, nachdem ich ihn ebenfalls selbständig aus Maxwell's Formeln abgeleitet hatte.[2])

Das Brechungsgesetz muss dasselbe sein, wie bei den

1) Mascart et Joubert, Leçons sur l'Électricité et le Magnetisme. 1. p. 115.

2) Aus der Formel $K_2 (\partial V_2/\partial \nu) - K_1 (\partial V_1/\partial \nu) + 4\pi\sigma = 0$. Maxwell, Treatise 1. p. 86.

romlinien, so zwar, dass beim Uebergange von Luft in ein deres Dielectricum die Brechung vom Einfallslothe weg ıttfinden muss.

Bei dem Dunkel, welches noch immer über dem Wesen r Dielectrica schwebt, schien mir ein experimenteller Beweis ɜses Satzes besondere Bedeutung zu besitzen.

Ich bediente mich zu diesem Zwecke eines Hülfsmittels, s ich schon vor Jahren angewendet habe, um mir über den ɜrlauf electrischer Kraftlinien durch den Versuch Aufschluss verschaffen:

Eine kleine Schellacknadel von 4 cm Länge trägt an iden Enden ein Kügelchen aus Hollundermark. Sie hängt einem Coconfaden und wird durch einen in der Mitte gesetzten senkrecht herabhängenden Flügel aus Schellack horizontaler Lage erhalten. Der Flügel taucht in ein ɜfäss mit Flüssigkeit und dient dadurch als Dämpfer.

Wird nun die eine Hollundermarkkugel positiv, die dere negativ geladen, so muss sich das System ebenso in ɜ Richtung der Horizontalcomponente der electrischen ɜsamtkraft stellen, wie eine Magnetnadel in jene der magtischen. Diese Richtung kann man durch Einvisiren näherungsweise bestimmen.

Um nun mit Hülfe dieses Instrumentchens die Brechung chzuweisen, verfuhr ich folgendermassen:

Auf die Bodenfläche eines Holzkistchens von 22,5 cm ınge, 7 cm Breite und 10 cm Höhe im Lichten wurde eine ıiegelglasplatte gelegt. Hierauf wurde eine Messingkugel n 2 cm Durchmesser, die sich am Ende einer verticalen essingstange befand, mit Hülfe eines Stativs von oben her das Kistchen hineingehalten. Hierbei war der Mittelpunkt r Kugel von der Glasfläche 5 cm entfernt und befand sich rade oberhalb des Mittelpunktes dieser Fläche.

Nachdem alles so vorbereitet war, wurde die Form mit ıraffin ausgegossen und auf diese Weise ein parallelipedischer Klotz erhalten, in dessen Innerem sich die ɜssingkugel befand.

Dieser Klotz wurde nun auf passende Stützen so aufgelegt, dass die von der Spiegelplatte abgenommene ebene

Fläche vertical stand, während die Messingstange in horizontaler Richtung hervorragte, und auch die langen Kanten des Parallelepipedons sich in horizontaler Lage befanden.

Der verticalen Fläche gegenüber und in gleicher Höhe mit der Kugel wurde das Schellacknädelchen aufgehängt und hierauf die Kugel vermittelst der hervorragenden Messingstange geladen.

Die Theorie verlangt, dass die Kraftlinien in der durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene Gerade seien, die nach einem hinter der Kugel gelegenen Punkte convergiren. Dies gilt jedoch nur strenge, wenn die brechende Ebene unendlich gross ist, bei der hier getroffenen Anordnung nur mit einer gewissen Annäherung. Dabei musste in dem eben angenommenen idealen Falle der Punkt, nach welchem die Kraftlinien in der Luft convergiren von der brechenden Fläche um $K.d$ abstehen, wenn d die Entfernung des Mittelpunktes der Messingkugel von dieser Fläche und K die Dielectricitätsconstante des Paraffins ist. Nimmt man diese rund zu 2,3 an, so müsste demnach das Schellacknädelchen stets nach einem Punkte hinweisen, der um 11,5 cm von der vorderen Fläche entfernt ist.

Diese Versuche entsprachen im allgemeinen diesen Voraussetzungen; wie weit sich die Genauigkeit derselben treiben lässt, und ob es etwa möglich sein wird, hieraus die Dielectricitätsconstanten einigermassen sicher zu bestimmen, dies muss sich erst bei weiterer Verfolgung derselben zeigen.

Jedenfalls darf die Brechung der electrischen Kraftlinien an der Grenzfläche von Luft und Paraffin wenigstens qualitativ als bewiesen betrachtet werden.

Mascart beschreibt in seinem älteren Werke[1]) einen Versuch, den man auch als hierher gehörig betrachten kann. Er nennt ihn réfraction de l'étincelle. Ich hatte ihn mit kleinen Modificationen ebenfalls bereits angestellt, bin jedoch dabei zu einem anderen Resultate gelangt als Mascart.

Es handelt sich bei diesem Versuche um das Ueber-

1) Mascart, Traité d'Électricité statique. p. 112.

springen eines Funkens zwischen zwei Kugeln, von denen sich die eine in der Luft, die andere in einem Gemische von Olivenöl und Terpentinöl befindet, und die so gestellt werden, dass die Verbindungslinie beider Kugelcentren die Oberfläche des Oeles nicht senkrecht schneidet.

Mascart gibt an, dass bei dieser Anordnung der Funke von der unteren Kugel fast senkrecht nach der Oberfläche hin strebe, dort eine Knickung erfahre und dann beinahe horizontal der oberen Kugel sich zuwende. Er fügt hinzu, dieser Vorgang erinnert an die Brechung des Lichtes. Würde es sich jedoch thatsächlich immer so verhalten, wie hier angegeben, so würde der Versuch in directem Widerspruche stehen mit der von der Theorie geforderten Brechung der Kraftlinien an der Grenze von Luft und Oel. Diese Brechung muss nämlich im Oel von dem Einfallslothe hinweg erfolgen, der Funke muss sich demnach in der Luft der Verticalen mehr nähern als im Oele, vorausgesetzt, dass der Funke den Kraftlinien folgt, eine Voraussetzung, die gewiss nur mit Beschränkung zulässig ist.

Thatsächlich bin ich auch zu einem anderen Resultate gekommen, glaube jedoch, dass der Widerspruch nur ein scheinbarer ist und einfach zu lösen.

Dabei bediente ich mich jedoch eines etwas anderen Apparates als Mascart, wodurch der Versuch etwas reiner werden dürfte.

Von einer weiten Flasche wurde der Boden abgesprengt, der Tubulus mit einem durchbohrten Korke verschlossen und durch die Bohrung eine Messingstange hindurchgesteckt, die an der einen Seite in eine Messingkugel endigte.

Der Apparat wurde mit dem Tubulus nach abwärts auf einen Dreifuss gestellt, sodass das Ganze aussah, wie ein eigenthümlich geformter Trichter, in den von unten eine Messingstange hineinragte, die an ihrem oberen Ende eine Kugel trug.

Nun wurde Olivenöl eingegossen, sodass die Kugel mit ihrem obersten Punkte etwa 1 — 2 cm unter der Oberfläche des Oeles (dem kein Terpentinöl beigemischt war) lag. Oberhalb der Fläche, aber etwas seitlich von der verticalen

Mittellinie, befand sich die andere Kugel. Die beiden Kugeln wurden mit den Zuleitern eines Ruhmkorff'schen Inductionsapparates verbunden, dessen Unterbrecher ich jedoch nicht selbständig arbeiten liess, sondern nur mit der Hand in Bewegung setzte, um einzelne Funken hervorbringen zu können.

Hierbei bemerkte ich, dass der erste Funke jedesmal eine Brechung in dem von dem Brechungsgesetze geforderten Sinne erfuhr, während ein zweiter oder weitere Funken, die ich gleich nachher überspringen liess, einen anderen Weg einschlugen, und zwar den von Mascart angegebenen. Es kann dies nicht so sehr überraschen, wenn man die gewaltigen Strömungen im Oele betrachtet, die sofort eingeleitet werden, sowie die intensiven Erwärmungen, welche einzelne Theile des Oeles erfahren. Diese Umstände scheinen den nachfolgenden Funken andere Wege zu bahnen.

Bei den späteren Funken bemerkte ich immer, dass sie nahezu senkrecht in der Flüssigkeit emporstiegen, sich dann horizontal über die Oberfläche hinzogen und dann mehr oder weniger geneigt in der oberen Kugel endigten.

Wegen dieser Veränderlichkeit habe ich dem Versuche sehr wenig Werth beigelegt und ihn nicht weiter verfolgt. Ich hätte seiner gar nicht gedacht, wenn nicht Mascart denselben ebenfalls beschrieben hätte, aber in einer Weise, wonach er mit dem aus der Theorie abgeleiteten Brechungsgesetze in directem Widerspruche stehen würde.

Zum Schlusse mag noch eines Punktes Erwähnung gethan werden, der sich unwillkürlich der Betrachtung aufdrängt, sowie man aus der Brechung der Kraftlinien weitere Schlüsse zu ziehen versucht. Man könnte nämlich leicht auf den Gedanken kommen, dass es nach Analogie der Lichtbrechung auch möglich sein müsse, Linsensysteme zu construiren, welche eine Concentration der electrischen Fernwirkung ermöglichten.

Bei genauerer Ueberlegung überzeugt man sich jedoch leicht davon, dass die Analogie mit der Lichtbrechung keine so vollkommene ist, als man auf den ersten Blick wohl glauben möchte.

Erstens ist das Brechungsgesetz ein anderes als beim Lichte, und zweitens sind die electrischen Kraftlinien nur in dem einzigen Falle Gerade, wenn man es mit einem einzigen Kraftcentrum, d. h. mit einem geladenen Punkte oder einer geladenen Kugel zu thun hat, und wenn die Brechung an einer (unendlich grossen) ebenen Fläche erfolgt. In allen anderen Fällen sind die Kraftlinien im allgemeinen krumme Linien.

Ueberdies können die electrischen Kraftlinien sich niemals in einem Punkte wirklich schneiden, der nicht selbst eine electrische Ladung besitzt.

Die einzige Analogie, welche zwischen dioptrischen Systemen und ähnlich gebauten, aus Dielectriken hergestellten, vorhanden ist, besteht darin, dass in solchen Systemen die electrische Scheidungskraft, d. h. die Kraft, welche auf die Einheit positiver Electricität, die man sich in dem Punkte concentrirt denkt, ausgeübt würde, an einzelnen Punkten ein Maximum oder Minimum wird. Bei Strömen hingegen ist es die Stromdichtigkeit, welche in solchen Systemen von Leitern an einzelnen Punkten ein Maximum oder Minimum werden kann.

Eine weitere Verfolgung dieses Gedankens möchte ich jedoch lieber einem Mathematiker von Fach überlassen.

Der Wunsch, über den Verlauf der Kraftlinien nach Brechung an sphärischen oder Cylinderflächen wenigstens im allgemeinen Vorstellungen zu erhalten, war eben für mich die Veranlassung, die Eingangs beschriebenen Versuche mit den Platten anzustellen, welche im Innern mit Kreisscheiben aus anderem Materiale versehen waren. Die so erhaltenen Stromlinien entsprechen den in Cylindern durch Brechung auftretenden Strom- oder Kraftlinien.

III. *Ueber das pyroelectrische Verhalten des Boracits; von K. Mack.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 1—7.)

(Auszug des Herrn Verfassers aus einer Abhandlung desselben Titels in der Zeitschrift für Krystall. u. Mineral. 8. p. 503.)

Der Boracit ist sowohl durch die electrischen, als auch durch die optischen Erscheinungen, die er darbietet, interessant. Beide Gebiete sind früher schon gesondert untersucht worden. Die nachfolgenden Mittheilungen enthalten die Resultate einer neuen Untersuchung der electrischen Erscheinungen, aus welcher das Vorhandensein einer bemerkenswerthen Analogie zwischen letzteren und den optischen Erscheinungen sich ergeben hat.

Die Anregung, diese Untersuchung in Angriff zu nehmen, wurde dem Verfasser von Hrn. A. Kundt gegeben, nachdem letzterer gefunden hatte, dass das gleiche Verfahren, welches zur Herstellung der Lichtenberg'schen Figuren dient, auch zur Untersuchung der electrischen Erscheinungen an den Krystallen verwerthet werden kann.

Auf eine Beschreibung des Apparates mittelst dessen Hr. Kundt die feine Zertheilung des Gemisches von Mennige und Schwefel bewirkte, und welchen auch ich benutzte, werde ich verzichten und verweise in dieser Hinsicht lediglich auf die Abhandlungen des Hrn. Kundt[1]) selbst.

Ehe zur Beschreibung der Versuche übergegangen wird, möge eine kurze Uebersicht über die bisherigen Arbeiten am Boracit vorausgeschickt werden.

a. Die electrischen Erscheinungen. — Die Pyroelectricität des Boracits wurde von Hauy entdeckt. Hauy fand, dass je zwei einander diametral gegenüberliegende Würfelecken die Enden einer polarelectrischen Axe sind. Die acht Würfelecken am Boracit pflegen durch die physikalisch verschiedenen Flächen zweier complementärer Tetra-

1) Kundt, Sitzungsber. der Berl. Acad 1883. p. 421. u. Wied. Ann. **20.** p. 592 bis 601. 1883. — Der vollständigen Abhandlung des Hrn. Mack ist eine Anzahl farbiger Figuren beigegeben.

eder abgestumpft zu sein; die Flächen des einen Tetraëders sind glatt und glänzend und in der Mehrzahl der Fälle etwas grösser als die rauher und weniger glänzend erscheinenden Flächen des anderen. Der Zusammenhang zwischen der Art der entstehenden Electricität und der physikalischen Beschaffenheit der Tetraëderflächen, auf welchen sie auftritt, wurde von Hauy noch nicht richtig erkannt. Dies gelang Köhler, welcher darthat, dass beim Erkalten an denjenigen Würfelecken, welche die glänzenden Tetraëderflächen tragen, positive Electricität auftritt, während die vier anderen negative Electricität zeigen.

Ausserordentlich eingehend hat sodann Hr. W. G. Hankel sich mit den pyroelectrischen Erscheinungen am Boracit beschäftigt. In einer Reihe von Abhandlungen hat er die gewonnenen Resultate zusammengestellt.[1]) Schon im Jahre 1840 constatirte er den merkwürdigen Electricitätswechsel am Boracit. Er beobachtete bei den meisten Krystallen eine Aenderung des Zeichens der auftretenden Electricitäten zweimal während hinlänglich lange anhaltender Zunahme der Temperatur und sodann auch zweimal bei der Abkühlung. Der Boracit unterscheidet sich hierdurch von der Mehrzahl der pyroelectrischen Krystalle. Das gewöhnliche Verhalten derselben besteht bekanntlich darin, dass jeder Pol bei Erhitzung und Abkühlung die entgegengesetzten Electricitäten liefert, während im Verlauf der Erhitzung einerseits, der Abkühlung andererseits die Zeichen der Electricitäten sich nicht ändern.

b. Die optischen Erscheinungen. — Der nach seiner äusseren Erscheinung unzweifelhaft zum regulären System zu zählende Boracit hat bekanntlich, wie schon Brewster gefunden hat, die Eigenschaft, das Licht doppelt zu brechen. Besonders deutlich ergibt sich diese Erscheinung, wenn Dünnschliffe aus dem Krystall unter dem Mikroskop mit Nicol'schen Prismen betrachtet werden. Zwei Erklärungsversuche für diese optische Anomalie am Boracit standen sich in

1) Ich hebe unter denselben die folgenden hervor: Pogg. Ann. **50.** p. 471. 1840; **61.** p. 282. 1844; Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss., math. phys. Cl. **4.** p. 151. 1859.

letzter Zeit hauptsächlich gegenüber. Der eine stammt von Hrn. Mallard, den anderen leitete Hr. C. Klein aus einer schon früher von anderen gemachten allgemeinen Annahme her. Mallard[1]) betrachtet den Boracit als ein Aggregat rhombischer, an sich doppeltbrechender Pyramiden, deren Spitzen im Krystallmittelpunkte zusammentreffen. Eine ähnliche Auffassung sprach Hr. Baumhauer[2]) aus auf Grund der von ihm am Boracit beobachteten Aetzerscheinungen. Hr. Klein[3]) dagegen betont die Zugehörigkeit des Minerals zum regulären System, indem er die Doppelbrechung auf Spannungen in der Krystallmasse, die beim Wachsthum sich ergaben, zurückführt.

In den aus dem Boracit hergestellten Dünnschliffen treten unter dem Mikroskop mit Nicol'schen Prismen getrennte Felder hervor, zwischen welchen man mehr oder weniger scharfe Grenzen wahrnimmt. Diese letzteren sind nach Hrn. Klein als Grenzen verschieden gespannter Theile, nach den Herren Mallard und Baumhauer als Zwillingsgrenzen zwischen den oben erwähnten rhombischen Individuen aufzufassen. Hervorzuheben ist, dass ein Unterschied im optischen Verhalten derjenigen Boracite einerseits, welche vorherrschend Würfel oder Rhombendodekaëder zeigen, und andererseits derjenigen besteht, welche vorherrschend tetraëdrisch oder scheinbar octaëdrisch gebildet sind. Die vorhin erwähnten optischen Grenzen verlaufen bei der ersten Gattung anders, als bei der zweiten. Da auf diesen Unterschied im Folgenden Bezug genommen werden wird, sind in der Figurentafel Abbildungen eines Krystalles der ersten und eines solchen der zweiten Art gezeichnet, auf welchen die optischen Grenzlinien, sowie sie auf der Krystalloberfläche zu Tag treten, punktirt angedeutet sind[4]) (s. Fig. 1 und 2).

1) Mallard, Ann. d. mines. **10.** p. 93. 1876.

2) Baumhauer, Zeitschr. f. Kryst. u. Mineral. **3.** p. 337. 1879. vgl. auch ein Referat von Baumhauer, ibid. **5.** p. 280. 1881.

3) Klein, Neues Jahrb. f. Mineral., Geol. u. Pal. **2.** p. 247. 1880. ibid. **1.** p. 255. 1881.

4) Vgl. die Abbildungen 15 und 16 des bei 2) erwähnten Baumhauer'schen Referats, sowie die den Klein'schen Abhandlungen beigegebenen Figuren.

Beobachtungen.

Das Beobachtungsmaterial hatte ich hauptsächlich der Güte des Hrn. Prof. Groth zu verdanken, der mir Boracitkrystalle jeder Art — würfelförmige, rhombendodekaëdrische und tetraëdrische — in grossen und wohlerhaltenen Exemplaren aus der Sammlung des mineralogischen Institutes zu Strassburg zur Untersuchung abgab.

Die Fundorte der untersuchten Krystalle sind Lüneburg und Stassfurt. Die Krystalle von Stassfurt sind viel seltener, als die von Lüneburg. Von ersteren gelangten fünf Stücke zur Untersuchung, zwei Würfel und drei Tetraëder, alle von vollkommen guter Ausbildung.

Fast alle Versuche an den Krystallen wurden während der Abkühlung vorgenommen. Jeder zu untersuchende Krystall wurde zunächst an seiner ganzen Oberfläche mittelst feinen und weichen Leders sorgfältig blank gerieben, sodann mit einer Pincette gefasst — unter Vermeidung einer Berührung mit den Fingern — und in ein Luftbad gebracht. Neben ihn wurde die Pincette in das Luftbad gelegt, sodann das letztere geheizt. Die Temperatur des Bades wurde an zwei durch den Deckel hindurchgeführten Thermometern abgelesen. Gewöhnlich wurden die Krystalle zunächst über diejenige Temperatur hinaus erhitzt, bei welcher sie untersucht werden sollten. War der erhitzende Gasbrenner ausgelöscht, so wurden dieselben im Bade langsamer Abkühlung überlassen, bis die Thermometer die gewünschte Temperatur anzeigten. Hierauf wurden sie mit der gleich hoch erhitzten Pincette herausgenommen, durch eine bereitstehende Alkoholflamme allseitig hindurchgezogen, auf eine Unterlage von schlecht leitendem Holz oder Fliesspapier gelegt und sodann bestäubt. Das Hindurchziehen durch die Alkoholflamme hat bekanntlich die Wirkung, dass alle auf der Oberfläche etwa schon vorhandene Electricität entfernt wird. Bei den meisten Versuchen wurde eine kurze Pause zwischen dem Beginn der Abkühlung und der Bestäubung gemacht, um dadurch eine leichte Anhäufung der Electricität und infolge dessen eine deutlichere Vertheilung des Pulvers zu erzielen. Bei der

Mehrzahl der Krystalle genügte eine Bestäubung von wenigen Secunden zur Herstellung scharfer Farbenvertheilung; nur die schwerer erregbaren mussten dem Sprühregen etwas länger ausgesetzt bleiben.

In den Abbildungen der Figurentafel ist die Vertheilung der Electricität auf den einzelnen Krystallformen, welche in den folgenden Abschnitten zur Beschreibung gelangen, nur schematisch angedeutet. Es werden bei der Temperaturänderung auf den Boraciten, wie hier schon besonders hervorgehoben werden mag, im allgemeinen nicht ganze Flächen, sondern nur einzelne Linien electrisch. Diese sind in die Figuren 3, 4, 5 und 7 eingezeichnet, und zwar bedeuten die einfach gestrichelten Linien (— — — —) solche, welche bei der Bestäubung gelb erschienen, längs welchen also positive Electricität vom Krystall entwickelt wurde; die strichpunktirten Linien (— · — · —) dagegen sind diejenigen, welche bei der Bestäubung Rothfärbung zeigten, längs welchen also negative Electricität auftrat.

Alle folgenden Angaben, wie auch die Figuren, sind auf das electrische Verhalten bei der Abkühlung bezogen.

A. Krystalle mit vorherrschendem Rhombendodekaëder (aus Lüneburg). — Das normale Verhalten derselben veranschaulicht Fig. 3. Sie stellt einen Krystall dar, an welchem ausser den Flächen des Dodekaëders die sechs Würfelflächen und die vier Flächen des glänzenden Tetraëders sich finden.

Nach der Bestäubung bedeckt die Färbung nur die gestrichelten und die strichpunktirten Linien. Erstere verbinden die Mittelpunkte der vier kleinen dreiseitigen Tetraëderflächen, letztere die vier nicht abgestumpften dreikantigen Dodekaëderecken. Die zwei auf den Würfelflächen sich ergebenden verschiedengefärbten Diagonalen sind in den Mitten der Flächen unterbrochen.

B. Krystalle mit vorherrschendem Würfel (aus Lüneburg und Stassfurt). — Das Verhalten dieser Gattung ist durch Fig. 5 dargestellt. Dieselbe zeigt einen Krystall, an welchem die Würfelkanten durch die Flächen des Rhom-

bendodekaëders abgestumpft sind, während vier von den Würfelecken Flächen des glänzenden Tetraëders tragen. Auch bei diesem Typus ist die Färbung nach der Bestäubung beschränkt auf die eingezeichneten gestrichelten und strichpunktirten Linien. Wie im vorigen Fall sind die Diagonalen der Würfelflächen in der Mitte unterbrochen. Die Krystalle von Lüneburg und Stassfurt, welche dieser Gattung angehören, zeigen übereinstimmendes Verhalten.

C. Krystalle von scheinbar octaëdrischer Ausbildung (aus Lüneburg). — Bei diesen, auf welche sich Fig. 4 bezieht, war die Untersuchung schwieriger, als bei den bisher geschilderten; die Krystalle der Abtheilung C. erreichen nämlich niemals eine solche Grösse, wie sie bei Krystallen der Abtheilungen A. und B. häufig vorkommt. Während Krystalle mit vorherrschendem Rhombendodekaëder oder Würfel, bei welchen die Entfernung zweier gegenüberliegenden Würfelflächen 7 mm und darüber betrug, zahlreich zur Untersuchung gelangten, war die genannte Distanz bei dem grössten scheinbar octaëdrischen Krystall, der untersucht wurde, nur 4,5 mm. Je kleiner aber ein Krystall, desto schwieriger ist natürlich die Vertheilung von Roth- und Gelbfärbung zu erkennen.

Der durch Fig. 4 dargestellte Krystall ist vorherrschend durch die Flächen zweier Tetraëder von ungleicher Ausdehnung begrenzt. In der Oberflächenbeschaffenheit dieser Tetraëder ist der Unterschied nur ein sehr geringer. Die Octaëderecken des Krystalles sind durch Flächen des Würfels, die Octaëderkanten durch Flächen des Rhombendodekaëders abgestumpft. Bei der Bestäubung ergab sich das in Fig. 4 gezeichnete Liniensystem roth; ausserdem erschienen die sechs Würfelflächen in ganzer Ausdehnung gelb.

D. Krystalle mit vorherrschendem Tetraëder (aus Stassfurt). — Einen Krystall dieser Gattung stellt Fig. 6 dar. Er zeigt ein einziges Tetraëder, dessen Kanten durch Flächen des Würfels abgestumpft sind. Der grösste Krystall von dieser Art, welcher untersucht wurde, hatte eine Höhe von nur 2,0 mm; es erwiesen sich indess auch

Krystalle von noch geringeren Dimensionen als zur Untersuchung tauglich; zwei kleinere, deren Höhe nur 1,3 mm betrug, zeigten noch sehr deutlich nach der Bestäubung den Unterschied zwischen Roth und Gelb.

Bei diesen Tetraëdern ergab die Untersuchung die vier Ecken derselben scharf roth, die vier grossen Tetraëderflächen dagegen fast ihrer ganzen Ausdehnung nach gelb. Ob etwa diese Gelbfärbung sich auf ein System einzelner gelber Linien zurückführen liesse, war bei der Kleinheit dieser Krystalle zu erkennen unmöglich.

Untersuchung kugelförmig geschliffener Boracite.

Zwei besonders grosse Krystalle, an deren einem das Rhombendodekaëder vorherrschte, während am anderen Würfel und Rhombendodekaëder gleichmässige Ausbildung besassen, waren genau untersucht worden und hatten das unter A. und B. beschriebene Verhalten gezeigt. Aus jedem derselben wurde sodann eine Kugel geschliffen, von welchen die grössere einen Durchmesser von 8,3 mm hatte. Behufs Vornahme der Bestäubung wurden dieselben auf conisch geformte Korkuntersätzchen gelegt, welche oben mit kleinen kraterförmigen Vertiefungen zur Unterstützung der Kugeln versehen waren,

Die Fig. 4 zeigt das Liniensystem, welches sich bei der Bestäubung auf diesen Kugeln ergab. Dasselbe enthält sechs Punkte, von welchen je vier, acht Punkte, von welchen je drei Linien ausgehen. In den Punkten der letzteren Art treffen gleich gefärbte, abwechselnd nur rothe und nur gelbe Linien zusammen, von den Punkten der ersten Art gehen in der einen Richtung und ihrer Rückverlängerung gelbe, in den zwei übrigen Richtungen rothe Linien aus.

Untersuchung des Electricitätswechsels.

Alle bisher beschriebenen Resultate waren erhalten worden, wenn die Krystalle der Abkühlung ausgesetzt wurden bei Temperaturen, welche zwischen 50 und 100° wechselten. Um den Electricitätswechsel zu constatiren, wurden Temperaturen bis zu 220° angewendet. Am schönsten zeigte sich diese Erscheinung bei einem kleinen, vorherrschend würfel-

förmigen Krystall von Lüneburg, an welchem die Entfernung zweier gegenüberliegenden Würfelflächen 4 mm betrug. Er wurde zunächst untersucht, während die Abkühlung von 120° aus erfolgte, und ergab in sehr deutlicher Weise eine Vertheilung des Pulvers, welche der unter B. beschriebenen entgegengesetzt ist. Kurze Zeit nach Beendigung der Bestäubung zeigte sich, dass das auf dem Krystall angeordnete Pulver anfing, abgestossen zu werden, was besonders deutlich an den Ecken des Würfels zu beobachten war. Als der Krystall fast gänzlich von Pulver entblösst war, erfolgte eine neue Bestäubung, welche ein dem vorigen entgegengesetztes, also mit dem unter B. geschilderten übereinstimmendes Verhalten ergab. Eine grosse Zahl weiterer Versuche führte zu dem Resultat, dass bei diesem Krystall ein Wechsel der Electricitäten bei 105° eintrat.

Schlussfolgerungen und Zusammenfassung der Resultate.

Die gemachten Angaben fordern zu den folgenden Betrachtungen auf.

Wenn einem Boracitkrystall, an welchem entweder das Rhombendodekaëder oder der Würfel vorherrscht, ein kleineres vollständiges Rhombendodekaëder so eingezeichnet gedacht wird, dass seine krystallographischen Hauptaxen mit denen des einen oder anderen der genannten Körper zusammenfallen, und man projicirt vom gemeinschaftlichen Mittelpunkt aus die Kanten des Hülfsdodekaëders auf die Krystalloberfläche, so ergibt sich auf dieser ein Liniensystem, welches dieselbe in einzelne Felder eintheilt. Dieses Liniensystem fällt zusammen mit der Bestäubungsfigur, die bei der Temperaturänderung auf den dodekaëdrischen, beziehungsweise würfelförmigen Boracitkrystallen erhalten wird (vgl. Fig. 3 und 5). In beiden Fällen ist die eine Hälfte des Liniensystemes gelb, die andere roth gefärbt. Gelb erscheinen bei der Abkühlung diejenigen Linien, welche die Mittelpunkte der glänzenden Tetraëderflächen auf der Krystalloberfläche verbinden, roth diejenigen, welche zu den eben genannten symmetrisch liegen mit Bezug auf eine beliebige Hauptsymmetrieebene des regulären Systemes.

Während diese Angaben sich auf die Erscheinungen an der Oberfläche eines dodekaëdrischen oder würfelförmigen Boracitkrystalles beziehen, lehren die Versuche an den Kugeln das pyroelectrische Verhalten im Innern desselben kennen. Auch auf den Kugeln fällt die Bestäubungsfigur zusammen mit einem Liniensystem, welches sich ergibt, wenn die Kanten eines der Kugel eingezeichneten Rhombendodekaëders auf ihre Oberfläche vom Kugelmittelpunkt aus projicirt werden. Das Rhombendodekaëder ist, wie in den beiden vorigen Fällen, so zu orientiren, dass seine krystallographischen Hauptaxen zusammenfallen mit den Axen des ursprünglichen Krystalles, aus welchem die Kugel entnommen wurde.

Denkt man sich nun die Kugel umschlossen von der Oberfläche eines vorherrschend rhombendodekaëdrischen Krystalles, diese letztere von derjenigen eines vorherrschend würfelförmigen, während die krystallographischen Hauptaxen aller drei Gebilde zusammenfallen, so sieht man, dass die auf denselben sich ergebenden Bestäubungsfiguren vom gemeinschaftlichen Mittelpunkt aus in denselben projicirenden Ebenen erscheinen (vgl. Fig. 3, 5 und 7). Im Folgenden sollen die in diesen Ebenen enthaltenen Ebenenstücke, welche vom Mittelpunkt bis zu den Bestäubungslinien auf der Oberfläche eines Krystalles der beiden Gattungen sich erstrecken, das Ebenensystem E_1 genannt werden. Dasselbe bildet zwölf vierseitige Pyramiden, deren Spitzen im Krystallmittelpunkt vereinigt sind.

Dieses Ebenensystem E_1 ist der Sitz der electrischen Erregbarkeit in den dodekaëdrischen und würfelförmigen Boracitkrystallen. In demselben kommt der Krystallmasse ein anderes physikalisches Verhalten zu, als in den anliegenden Theilen.

Für die scheinbar octaëdrischen Krystalle, an welchen stets die Würfelflächen zugleich auftreten, ist die Bestäubungsfigur im Normalfall folgendermassen zu beschreiben:

In den scheinbar octaëdrischen Boracitkrystall denke man sich einen Würfel so eingezeichnet, dass dessen krystallographische Hauptaxen mit denen des Krystalles zusammenfallen. Die Kanten dieses Würfels werden auf die Krystall-

oberfläche central projicirt. Das hierdurch erhaltene Liniensystem, welches sechs geschlossene Felder bildet, fällt zusammen mit dem einen Theil der Bestäubungsfigur. Der andere Theil wird gebildet durch die in ganzer Ausdehnung mit Staub bedeckten, die Mitten jener Felder einnehmenden Würfelflächen. Auf diesen Würfelflächen einerseits und in jenem Liniensystem andererseits werden gleichzeitig entgegengesetzte Electricitäten entwickelt.

An die bisherigen Angaben sind folgende Bemerkungen zu knüpfen.

Die Electricität ist auf den Boracitkrystallen im allgemeinen nicht über ganze Flächen, sondern längs einzelnen Linien vertheilt.

Der Boracit theilt nicht die der Mehrzahl der Krystalle zukommende Eigenschaft, in jedem Volumenelement, unabhängig von dessen Lage im Krystall, nach denselben Richtungen dasselbe physikalische Verhalten zu zeigen.

Die würfelförmigen und rhombendodekaëdrischen Boracite, sowie die nur ein Tetraëder zeigenden von Stassfurt entwickeln an den ungleich ausgebildeten Enden der trigonalen Axen Electricitäten von entgegengesetzten Zeichen, bei den scheinbar octaëdrischen Krystallen von Lüneburg haben die an den Enden der genannten Axen entwickelten Electricitäten gleiches Zeichen. Diese Verschiedenheit im Verhalten der ein vorherrschendes Tetraëder zeigenden und der scheinbar octaëdrischen Boracite lässt den Einfluss der Krystallgestallt auf das Vorzeichen der entwickelten Electricitäten erkennen.

Ferner ist hinzuweisen auf die höchst auffällige Uebereinstimmung, welche zwischen dem Verlauf der Bestäubungslinien und dem der früher erwähnten optischen Grenzlinien herrscht (vgl. Fig. 1, 2, 3 und 4). Die electrische Erregbarkeit beschränkt sich bei den würfelförmigen und rhombendodekaëdrischen Krystallen nicht auf die Oberfläche; sie setzt sich in dem Ebenensystem E_1 in das Innere der Krystalle fort, wie die Versuche an den Kugeln beweisen; auch die optischen Grenz-

linien fallen im Innern der Krystalle nach Mallard und Klein in diese Ebenen. Bei den scheinbar octaëdrischen Krystallen fallen diese Grenzlinien auf der Oberfläche, wie im Innern, in die die Würfelkanten projicirenden Ebenen; dass sich in diesen Ebenen auch die electrische Erregbarkeit in das Innere hinein fortsetzt, ist wohl wahrscheinlich, konnte aber wegen der Kleinheit und des seltenen Vorkommens der Krystalle dieser Gattung nicht nachgewiesen werden.

Die Bestäubungslinien auf den rhombendodekaëdrischen und den würfelförmigen Krystallen sind mittelst eines Hülfsdodekaëders, die auf den scheinbar octaëdrischen Krystallen mittelst eines Hülfswürfels beschrieben worden; statt dieser zwei verschiedenen Hilfskörper lässt sich ein einziger dritter, nämlich ein Tetraëder, einführen. Nennen wir, um dies nachzuweisen, in den die Würfelkanten central projicirenden Ebenen diejenigen Ebenenstücke, welche vom Mittelpunkt eines scheinbar octaëdrischen Krystalles bis zu den Bestäubungslinien auf seiner Oberfläche sich erstrecken, das Ebenensystem E_2. Stellt man sich nun gleichzeitig ein Rhombendodekaëder, einen Würfel und ein Tetraëder vor, deren krystallographische Hauptaxen zusammenfallen, so bemerkt man, dass die durch den Axenmittelpunkt und die Tetraëderkanten bestimmten unbegrenzten Ebenen sowohl das Ebenensystem E_1 als das Ebenensystem E_2 enthalten. Diese soeben definirten Ebenen mögen das Ebenensystem E heissen. Es bleibt dasselbe, welches der zwei möglichen complementären Tetraëder ausgewählt wird. Es fallen also bei den dodekaëdrischen, würfelförmigen und den scheinbar octaëdrischen Krystallen sowohl die Bestäubungslinien als die optischen Grenzlinien in ein und dasselbe Ebenensystem E. Die in letzterem enthaltenen Ebenensysteme E_1 und E_2 decken sich nicht; sie ergänzen sich gleichsam zum Ebenensystem E. Dieser letztere Umstand zeigt, wie eine den drei genannten Gattungen allgemein zukommende Eigenschaft durch die Krystallgestalt modificirt wird.

Im Vorstehenden sind beobachtete Thatsachen mitgetheilt worden. Es liegt nahe, über deren Ursachen Ueber-

legungen anzustellen, insbesondere die Analogie zwischen den optischen und den electrischen Erscheinungen fordert hierzu auf.

Die Untersuchungen des optischen Verhaltens des Boracits haben es wahrscheinlich gemacht, dass dasselbe durch Spannungszustände in der Krystallmasse bedingt ist. In den schmalen Streifen, welche die früher erwähnten optischen Felder trennen, und welche in die Ebenensysteme E_1 beziehungsweise E_2 fallen, müssten die Spannungen verschieden sein von den in den anliegenden Theilen herrschenden.

Contractionen und Dilatationen sind, wie die Hrn. J. und P. Curie experimentell nachgewiesen haben[1]), bei einer grossen Zahl von Krystallen, welche zugleich pyroelectrisch sind, von Electricitätsentwicklung begleitet. Die bei der Contraction einerseits, bei der Dilatation andererseits entwickelten Electricitäten haben entgegengesetztes Zeichen. Zu diesen Krystallen gehört nach den Beobachtungen der genannten Herren auch der Boracit. J. und P. Curie haben aus ihren Versuchen den Schluss gezogen, dass das Auftreten der Pyroelectricität nur bedingt ist durch die Spannungsänderungen, welche die Temperaturänderung begleiten. Auch Hr. W. C. Röntgen hat sich neuerdings mit Bezug auf den Quarz dieser Auffassung angeschlossen.[2])

Wenn nun die Richtigkeit dieser Hypothese vorausgesetzt werden darf, so führen die electrischen Erscheinungen am Boracit zu der Annahme, dass die diesem Mineral behufs Erklärung seiner optischen Eigenschaften zugeschriebenen inneren Spannungen von der Art sind, dass sie bei der Temperaturänderung in den Ebenensystemen E_1 beziehungsweise E_2 sich am stärksten ändern.

Physikal. Inst. d. Univ. Strassburg 1883.

1) J. u. P. Curie, Compt. rend. **91**. p. 294. 1880.
2) Röntgen, Wied. Ann. **19**. p. 513. 1883.

IV. *Die Fluorescenz des Kalkspathes; von E. Lommel.*

Obgleich der Kalkspath gewiss zu den am genauesten untersuchten Körpern gehört, so scheint doch die Fluorescenz desselben bis jetzt unbeachtet geblieben zu sein. Stokes[1]) in seiner berühmten Abhandlung „On the Change of Refrangibility of Light" bemerkt sogar ausdrücklich, dass „Kalkspath und Carrarischer Marmor unempfindlich" seien.

Und doch fluorescirt der Kalkspath bei hinreichend starker Erregung durch Sonnen- oder electrisches Licht mit schön ziegelrother Farbe.

Alle mir zur Hand gekommenen Kalkspathstücke zeigten diese gelbrothe Fluorescenz. Am bequemsten aber beobachtet man die Erscheinung an einem Kalkspathwürfel, durch welchen man das mittelst einer Linse zu einem schmalen Kegel zusammengefasste Lichtbündel hindurchschickt. Der von mir benutzte Würfel aus isländischem Doppelspath war senkrecht und parallel zur optischen Axe geschnitten.

Das gelbroth leuchtende Strahlenbündel tritt besonders auffallend hervor, wenn man das erregende Licht durch hellblaues Kobaltglas oder durch grünes Glas gehen lässt.

Die Erscheinung ändert sich nicht, mag das Strahlenbündel den Krystall parallel oder senkrecht zur Axe durchsetzen, mag es unpolarisirt oder nach irgend einer Richtung polarisirt sein. Das Fluorescenzlicht zeigt keine Polarisation, gleichviel ob das erregende Licht polarisirt ist oder nicht.

Da in dem vollkommen klaren Krystall das Fluorescenzlicht von jeder Beimischung diffusen Lichtes frei ist, so genügt es, um die Zusammensetzung des Fluorescenzlichtes zu ermitteln, den Spalt des Spectroskopes von seitwärts auf das den Würfel durchsetzende Strahlenbündel zu richten. Man erkennt, dass sein Spectrum von 35 bis 65 der gewöhnlichen Bunsen'schen Scala (etwa von C bis $D\frac{1}{2}E$) sich erstreckt, und etwa bei 44 am hellsten ist.

1) Stokes. Phil. Trans. **11.** p. 516. 1852. Pogg. Ann. Ergänzungsbd. **4.** p. 268. 1854.

Dass überhaupt der Kalkspath durch Bestrahlung zum Selbstleuchten angeregt wird, ist übrigens längst bekannt. Das gelbrothe Eigenlicht desselben wurde nämlich schon von E. Becquerel[1]) im Phosphoroskop, also nach der Belichtung, beobachtet und als „Phosphorescenz" des Kalkspathes beschrieben.

Das Licht, welches der Kalkspath im Phosphoroskop nach der Bestrahlung bis zur Dauer von etwa $\frac{1}{2}$ Secunde entwickelt, besitzt denselben Farbenton und das nämliche Spectrum wie das von mir während der Bestrahlung beobachtete und unterscheidet sich von diesem nur durch seine geringere Intensität.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass man es in beiden Fällen mit einem und demselben Leuchtprocess zu thun hat, der sich nicht nur während der Bestrahlung vollzieht, sondern auch nach der Bestrahlung noch kurze Zeit fortdauert.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man diesen Leuchtprocess „Fluorescenz" oder „Phosphorescenz" nennen soll.

Nach E. Becquerel wäre der von Stokes eingeführte und gegenwärtig allgemein eingebürgerte Ausdruck „Fluorescenz" ganz zu verbannen, und auch für diejenigen Erscheinungen, die man gewöhnlich damit bezeichnet, der Ausdruck „Phosphorescenz" zu gebrauchen.

Becquerel nennt in der That das durch Insolation hervorgerufene Selbstleuchten der Lösungen von Chininsulphat, Aesculin, Chlorophyll u. s. w. „Phosphorescenz von kurzer Dauer."

Obgleich ein Fortleuchten nach der Bestrahlung bisher nur an festen Körpern beobachtet wurde, wogegen Flüssigkeiten im Phosphoroskop selbst bei schnellster Drehung desselben vollkommen lichtlos bleiben, so ist doch anzunehmen, dass auch bei letzteren die Lichtentwickelung nach Abschluss des erregenden Lichtes noch fortdauere, aber zu kurze Zeit, um im Phosphoroskop sichtbar zu werden. Eine scharfe Grenze zwischen „Fluorescenz" und „Phosphorescenz durch Bestrahlung" kann aus diesem Verhalten nicht abgeleitet werden.

1) E. Becquerel, La Lumière. I. p. 354. 1867.

Principiell würde daher gegen die Benennung „Phosphorescenz von kurzer Dauer" nichts einzuwenden sein.

Es fragt sich jedoch, ob diese Bezeichnung auch zweckmässig und dem Namen „Fluorescenz" vorzuziehen wäre.

Mit dem Worte „Phosphorescenz" ist man gewohnt, alle schwachen Leuchtprocesse zu bezeichnen, welche im Dunkeln wahrnehmbar sind, was immer auch ihre Ursache sei. Der mit diesem Worte herkömmlich verbundene Begriff ist daher für die in Rede stehenden Erscheinungen viel zu weit.

Mit dem Ausdruck „Fluorescenz" dagegen ist nur der Begriff des durch Licht hervorgerufenen Selbstleuchtens verknüpft, und wenn man dabei gewöhnlich auch nur an das Selbstleuchten während der Bestrahlung denkt, so liegt in dem Worte doch nichts, weder etymologisch noch dem Sinne nach, was eine Fortdauer des Leuchtens nach der Bestrahlung ausschliessen würde.

Es würde daher sehr unzweckmässig sein, den durchaus geeigneten und allgemein eingebürgerten Namen „Fluorescenz" fallen zu lassen, und die schleppende Bezeichnung „durch Bestrahlung hervorgerufene Phosphorescenz von kurzer Dauer" (denn so etwa müsste man sich ausdrücken, um den Begriff zu erschöpfen) dafür einzutauschen.

Da das Eigenlicht auch jener Substanzen, welche nach der Insolation noch lange im Dunkeln fortleuchten (nämlich insbesondere der Sulphide der Erdalkalimetalle), nur während der Bestrahlung in seiner vollen Intensität und Zusammensetzung auftritt, und der im Dunkeln von ihnen ausgestrahlte Farbencomplex oft nur ein verkümmerter Ueberrest ist von jener vollständigen Lichtemission[1]), so würde es sich eher empfehlen, diese Erscheinung „Fluorescenz von langer Dauer" statt „Phosphorescenz" zu benennen.

Es ist jedoch nicht unsere Absicht, diese Benennung, so folgerichtig sie auch wäre, zur Einführung vorzuschlagen; denn sie verstösst gegen den herrschenden Sprachgebrauch und würde daher vielleicht zu Missverständnissen Anlass geben.

---

1) Lommel, Wied. Ann. **20.** p. 857. 1883.

Es erscheint uns vielmehr zweckmässig, an der ohnehin fast allgemein angenommenen Ausdrucksweise festzuhalten, indem wir als „Fluorescenz“ bezeichnen das durch Bestrahlung hervorgerufene Selbstleuchten, dessen Fortdauer nach der Bestrahlung nicht unmittelbar (ohne Phosphoroskop oder sonstige künstliche Vorkehrung) wahrgenommen wird, und als „Phosphorescenz durch Bestrahlung“ dasjenige durch Insolation erregte Selbstleuchten, welches im Dunkeln auch für die unmittelbare Wahrnehmung fortdauert. Da bei jenen Erscheinungen das Fortleuchten im Dunkeln, wenn es überhaupt nachgewiesen werden kann, nur Bruchtheile einer Secunde, bei diesen aber stundenlang andauert, so besteht zwischen beiden Classen von Erscheinungen eine hinreichend breite Kluft, um diese verschiedene Benennung innerlich nahe verwandter Vorgänge praktisch gerechtfertigt erscheinen zu lassen.

Aus den angeführten Gründen halten wir uns für berechtigt, das oben beschriebene, durch Lichtwirkung hervorgerufene Selbstleuchten des Kalkspathes, mag es während der Bestrahlung oder nach der Bestrahlung (im Phosphoroskop) wahrgenommen werden, in Uebereinstimmung mit dem herrschenden Sprachgebrauch als Fluorescenz zu bezeichnen.

Um zu ermitteln, durch welche Strahlengattung diese Fluorescenz am stärksten erregt wird, wurde auf einen Schirm, in welchen ein 5 mm breiter Spalt eingeschnitten war, ein lichtstarkes Spectrum entworfen. Der Spalt musste soweit genommen werden, um eine hinreichend starke Wirkung zu erhalten. Indem man den Schirm mit dem Spalte dem Spectrum entlang verschob, wurde die jeweils durch den Spalt gedrungene Strahlenpartie mittelst einer Linse in dem Kalkspathwürfel concentrirt.

Es ergab sich das unerwartete Resultat, dass die grünen Strahlen zwischen *E* und *b* am stärksten wirken.

Die rothen Strahlen erwiesen sich als unwirksam; die Wirkung beginnt etwa bei *D*, wird stärker im Gelbgrün, erreicht, wie gesagt, ein Maximum zwischen *E* und *b* und nimmt dann wieder ab bis *F*; im Blau des Spectrums war keine Wirkung zu bemerken; dieselbe beginnt erst wieder

etwa bei G und erstreckt sich, jedoch mit viel geringerer Intensität als im Grün, durch das Violett bis H; im Ultraviolett zeigt sich keine Wirkung.

Da nothwendig jedem Maximum der Fluorescenz ein Maximum der Absorption entspricht, so folgt hieraus, dass der Kalkspath zwischen E und b ein Maximum der Absorption besitzt.

Im durchgehenden Lichte vermochte ich allerdings einen entsprechenden Absorptionsstreifen nicht wahrzunehmen, selbst dann nicht, als dasselbe nach zehnmaliger innerer Reflexion einen Kalkspath von 40 mm Dicke elfmal durchlaufen hatte. Trotzdem betrachte ich die Existenz desselben als erwiesen. Es liegt nämlich hier der Fall vor, auf welchen ich schon wiederholt hingedeutet habe[1]), dass sich das Dasein eines schwachen Absorptionsstreifen, welcher direct nur schwierig oder vielleicht gar nicht wahrnehmbar ist, durch das zugehörige Fluorescenzmaximum verräth.

Schliesslich sei mir noch der Hinweis gestattet auf einen möglichen Zusammenhang dieser Absorption mit anderen Eigenschaften des Kalkspathes. Nach meinen theoretischen Anschauungen ist sowohl die Doppelbrechung, als auch die Dispersion des Kalkspathes bedingt durch zwei seinem Molecüle eigenthümliche Schwingungen, die ihrer Periode nach beide ins Ultraviolett fallen, und welchen daselbst zwei Absorptionsstreifen entsprechen müssten. In einer früheren Abhandlung[2]) habe ich die Wellenlängen dieser beiden Schwingungen aus den Brechungsverhältnissen des Kalkspathes bestimmt und für die Schwingung senkrecht zur Axe gefunden $\lambda_0 = 0{,}1301\ \mu$, und für diejenige parallel zur Axe $\lambda_0' = 0{,}0874\ \mu$. Bildet man die Vielfachen dieser Werthe, so findet man $4\lambda_0 = 0{,}5204\ \mu$ und $6\lambda_0' = 0{,}5244\ \mu$, also Zahlen, welche sehr nahe zusammenfallen und, als Wellenlängen betrachtet Strahlen entsprechen, welche zwischen $E(\lambda = 0{,}5269\ \mu)$ und $b(\lambda = 0{,}5183\ \mu)$ liegen. An keiner anderen Stelle des sichtbaren Spectrums findet ein solches Zusammentreffen der Multiplen

1) Lommel, Pogg. Ann. **160**. p. 79. 1877. Wied. Ann. **10**. p. 635. 1880.

2) Lommel, Wied. Ann. **13**. p. 353. 1881.

der Werthe λ_0 und λ_0' statt. Nun ergibt sich als eine weitere Consequenz meiner Theorie[1]), dass ein Körper nicht blos Strahlen, deren Wellenlänge derjenigen seiner Eigenschwingungen gleich ist, zu absorbiren vermag (directe Absorption), sondern in schwächerem Grade auch solche, deren Wellenlängen Multipla oder Submultipla davon sind (indirecte Absorption). Die Gegend des Spectrums zwischen *E* und *b* würde also gerade diejenige sein, wo der ordinäre und der extraordinäre Strahl im Kalkspath gleichzeitig indirecte Absorption erleiden.

Erlangen, im December 1883.

V. *Ueber die Spectra der Fluorsiliciums und des Siliciumwasserstoffes;* *von Karl Wesendonck.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 8—10.)

Bei der Beobachtung einer von Geissler Nachfolger bezogenen, Fluorsilicium enthaltenden Vacuumröhre fiel mir auf, dass der bei weitem grösste Theil des sich darbietenden Spectrums dasjenige des Kohlenoxydes war. Der minder brechbare Theil desselben bis fast zur fünften Hauptlinie hin besteht ganz aus einem Kohlenoxydspectrum, von dem man nicht nur die Hauptlinien, sondern auch einen grossen Theil der zwischen derselben liegenden Einzelheiten recht deutlich erkennen kann, dann zeigen sich die schönen ziemlich nahe bei einander stehenden blauen Linien oder vielmehr Streifen, welche für das Fluorsilicium charakteristisch zu sein scheinen. Das Auftreten eines Kohlenstoffspectrums in einer Vacuumröhre hat nun, wie man besonders aus den Versuchen mit Sauerstoff weiss, nichts weiter Auffallendes, indessen muss eine so glänzende Erscheinung desselben, die in keiner Weise das Ansehen eines blos von Verunreinigung herrührenden Spectrums hat, doch einigermassen befremden.

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 251. 1878.

Da es mir nicht möglich war, aus der vorhandenen Literatur einen näheren Aufschluss über die Frage zu gewinnen, ob das Kohlenoxydspectrum von dem des Siliciums, resp. dessen Verbindungen getrennt werden könne, und insbesondere ob dasselbe in der That nur Verunreinigungen zuzuschreiben sei, so unternahm ich selbst zur näheren Feststellung des Sachverhaltes einige Untersuchungen. Trotz der eminenten Bedeutung des Elementes Silicium ist das Spectrum desselben noch verhältnissmässig wenig Gegenstand der Forschung gewesen, man hat fast allein das sowohl beim Elemente selbst wie bei dessen Verbindungen im electrischen Funken sich zeigende Linienspectrum, welches dem Elemente selbst zugeschrieben wird, ins Auge gefasst. Auch Salet's[1]) Untersuchungen geben keinen näheren Aufschluss, obwohl er in den Haloidverbindungen des Siliciums in Geissler'schen Röhren unter niederen Drucken Spectra beobachtete. Es zeigte sich bei den Haloidverbindungen, insbesondere dem Bromid ein continuirliches Spectrum mit zwei Lichtmaxima, das eine im Gelbgrün, das andere im Indigo. Dabei darf jedoch keine Spur einer Feuererscheinung (trace de feu), wie sie sich zeigt, wenn eine Unterbrechung in der Leitungsbahn vorhanden ist, auftreten, da sonst sofort an Stelle des obigen Spectrums die Linien des Broms und des Siliciums erscheinen. Eine ganz ähnliche Erscheinung beobachtete ich selbst beim Siliciumtetrachlorid, das ich in einer Röhre[2]), wie sie mir früher zur Untersuchung der Dämpfe von Kohlenverbindungen gedient hatte, der Einwirkung der electrischen Entladung unterwarf. Es gelang mir indessen nicht, das betreffende Phänomen auf diese Weise weiter zu zerlegen, und die Spectren, aus denen sich dasselbe zusammensetzte, festzustellen. Auch liess eine eingehende Untersuchung wenig weiteren Aufschluss erwarten, da unsere Chlor- ebenso wie die entsprechende Bromverbindung bekanntlich durch Ueberleiten des entsprechenden Haloides über ein erhitztes Gemenge von Kohle und Kieselerde gewonnen werden, Ver-

1) Salet, Ann. de chim. et phys. (4) 28. p. 1. 1873.

2) Wesendonck, Ann. d. Phys. u. Chim. N. F. 12. p. 431 und 432. 1882.

unreinigungen mit Kohle demnach keineswegs ausgeschlossen sind.

Ich verwandte zu meinen Experimenten zunächst einen Apparat, bei dem Hähne und Schliffe nicht vermieden waren, was ich um so eher thun zu dürfen glaubte, als Faraday bemerkt, dass das Fluorsilicium das Oel seiner Compressionspumpen nicht angegriffen habe. Wie in der Folge sich zeigen wird, ist dies in der That gestattet, indem die Hähne und Schliffe keinen nachweisbaren Einfluss auf die zu beobachtenden Erscheinungen ausüben. Eine mit einem zum Einfüllen der Entwickelungssubstanzen dienenden, durch ein Schliffstück luftdicht verschliessbaren Tubulus versehene Retorte war an einen durch Glashahn verschliessbaren Trockenapparat angeschmolzen, der wiederum an einer ebenfalls mit Glashähnen versehenen Geissler'schen Röhre, welche direct an dem Schliffstück der Quecksilberpumpe angebracht war, sich angeschmolzen befand. Man konnte so zuerst die Pumpe mit der leeren Retorte vollständig austrocknen, dann nach Abschluss der Retorte von den übrigen Theilen des Apparates die Entwickelungssubstanzen, bekanntlich ein Gemenge von gleichen Theilen ganz reinen Glas- und Flussspathpulvers und concentrirte chemisch reine Schwefelsäure im Ueberschuss, um das Gas dadurch recht trocken zu erhalten, einführen, und hierauf nach Einsetzen des Schliffes in den Tubulus den ganzen Apparat mehrere mal mit Fluorsilicium füllen und wieder evacuiren, bis ein genügender Grad der Reinheit erreicht schien. Späterhin nahm ich die Entwickelung in der Weise vor, dass das Pulver in das eine, die Säure in das andere von zweien aneinander geschmolzenen durch weite Oeffnung miteinander communicirenden, kugelförmigen Glasgefässen (Fig. 8), gebracht wurden. Das Ausflussrohr der Gefässe war rechtwinklig umgebogen und trug den Stöpsel *a* eines Schliffstückes, dessen Hülse an dem Trockenapparate angebracht war. Auf diese Weise war es möglich, nach vollständigem Entleeren des gesammten Apparates durch Neigung[1]) des Kugelapparates,

1) In der Figur muss die punktirt angegebene Linie als senkrecht zur Papierebene verlaufend gedacht werden.

wie sie das Schliffstück gestattete, die Säure zu dem Pulver treten zu lassen, und so die Entwickelung in einem möglichst vollständig ausgepumpten, von Luft gefreiten Raume vorzunehmen. Es gelang mir indessen durch die angewandte Methode durchaus nicht, das Kohlenoxydspectrum zu entfernen, vielmehr behauptete dasselbe auch jetzt noch seine hervorragende Stellung bei der sich darbietenden Lichterscheinung, insbesondere trat dasselbe bei geringeren Dichten hervor, während die der Siliciumverbindung eigenthümlichen blauen Streifen besonders bei höheren Drucken deutlich und glänzend zu sehen waren. Bei zunehmender Verdünnung traten dieselben indessen mehr und mehr in den Hintergrund, und verschwanden bisweilen sogar vollständig, sodass die Erscheinung ganz den Anblick einer nur Kohlenoxyd enthaltenden Geissler'schen Röhre darbot. Auch ein sogenanntes minimales Spectrum, und zwar ein sehr glänzendes, zeigte sich bei ganz geringen Dichten, besonders bei Einschaltung einer Verstärkungsflasche, unter ganz ähnlichen Erscheinungen an den Electroden, wie sie früher bei Kohlenverbindungen enthaltenden Röhren beobachtet worden waren.[1]) Wir wollen kurz hier die mit variirender Dichte sich darbietenden Erscheinungen betrachten, wie sie sich unter den oben angegebenen Versuchsbedingungen gestalteten.

Bei grossen Dichten, wenn die Entladung nur einen dünnen Lichtcylinder bildet, wurde ein mehr oder minder continuirliches Kohlenoxydspectrum mit den hellen blauen Streifen beobachtet, in einem kurzen weiten Rohre war dasselbe selbst bei Drucken der Fall, welche bereits das Auftreten von Funken veranlasste. Mit fortschreitender Verdünnung verändert sich das Spectrum ganz wie ein solches des Kohlenoxydes, dem die blauen Streifen beigemischt sind. Bildet das negative Glimmlicht, dessen Spectrum übrigens keine Abweichung von dem des positiven Büschellichtes aufwies, einen schmalen Cylinder um eine Electrode, wobei die positive Lichterscheinung die Röhrenweite noch nicht vollständig ausfüllt, so ist die Erscheinung schon sehr hell, man sieht das Kohlenoxydspectrum recht glänzend, ebenso die dem

1) Wesendonck, Wied. Ann. 17. p. 452. 1882.

Siliciumfluorid charakteristischen acht Streifen im Blau, ausserdem bei schon ausgebildeten Spectren noch vier weiter nach dem violetten Ende hin gelegene Streifen, die der ganzen Partie das Aussehen einer grossen gerippten Säule geben. Die Helligkeit der Streifen nimmt nach dem brechbareren Ende hin zu, sodass der erste derselben oft kaum zu sehen ist, der siebente und achte aber sehr hell auftreten, während die vier folgenden wiederum bedeutend matter erscheinen. Bei kräftigen, grössere Quantitäten Electricität befördernden Entladungen, also vornehmlich bei Einschaltung einer Flasche, sieht man auch das Swan'sche Spectrum mehr oder weniger vollständig ausgebildet sich dem obigen hinzufügen. Oftmals erscheinen auch vor den blauen Streifen grüne, die ich indessen nicht beständig zu beobachten vermochte. Bei weiterer Verdünnung tritt mehr und mehr das Kohlenoxydspectrum hervor, während die blauen Streifen zu verblassen anfangen, oftmals erscheinen dabei, aber nur zeitweise, drei Linien im Violett, über die ich eben so wenig wie über die ebengenannten grünen Streifen näheren Aufschluss zu gewinnen vermochte, da es mir an Gelegenheit zur Vergleichung mit anderen Spectren gebrach. Ich muss daher für den Augenblick mich damit begnügen, das Auftreten der betreffenden Gebilde zu erwähnen. Bei fortgesetzter Verdünnung bilden sich dann zunächst feine, späterhin tellerförmige grössere Schichten, wobei das Kohlenoxydspectrum gewöhnlich sehr glänzend zu sehen ist. In diesem Stadium ist es sogar möglich, wie schon früher erwähnt, letzteres allein zu beobachten, und zwar sehr schön und vollständig ausgebildet, ohne auch nur die hellsten Siliciumstreifen zu zeigen, ganz als ob wir es mit einer Kohlen-, nicht mit einer Kieselverbindung zu thun hätten. Andere Male dagegen war das Kohlenspectrum in allen Stadien der Dichte weit weniger entwickelt, und blieben die blauen Streifen dabei stets sichtbar, und zwar so, dass die zwei stärksten an Helligkeit selbst die Hauptlinien des Kohlenspectrums übertrafen und erst mit dem Auftreten des Vacuumspectrums verschwanden. Leider vermochte ich über die Ursache solch verschiedenen Verhaltens nicht Näheres festzustellen, die Erscheinungen

traten scheinbar zufällig bald so, bald so auf. Eine zeitlang schien es, als ob grosse Trockenheit des Gases das Verschwinden der blauen Streifen sehr begünstige, spätere Beobachtungen liessen dies jedoch zweifelhaft erscheinen. Bei weiterer Verdünnung begann die Lichterscheinung zu verblassen, allmählich zu verschwinden und dem Vacuumspectrum Platz zu machen. Dieses stimmt merkwürdiger Weise grösstentheils mit dem Linienspectrum des Fluorsiliciums überein, welches bei höheren Dichten von kräftigen Funken, ohne dass ein eigentlicher Funken sich zeigt, auch schon bei geringeren Dichten, mehr oder weniger vollständig bei Einschaltung einer Flasche hervorgerufen wird, indessen fehlen in dem Vacuumspectrum stets die charakteristischen blauen Streifen, welche bei hohen Dichten durch den Funken ebenfalls hervorgerufen werden. Ebenso besteht aber eine wesentliche Uebereinstimmung zwischen den beiden obengenannten Spectren und demjenigen einer stark evacuirten Kohlenoxydröhre, sodass die Annahme berechtigt erscheint, die beiden Vacuumspectra wesentlich als dem Silicium zugehörig zu betrachten, natürlich abgesehen von den fast immer vorhandenen Quecksilber- und Wasserstofflinien. In meiner Arbeit über die Kohlenspectra habe ich bereits darauf hingewiesen, dass das den äussersten Verdünnungen eigenthümliche, von den eigentlichen Kohlenspectren verschiedene, sogenannte Vacuumspectrum nur dann auftritt, wenn an den mit Glas umgebenen Theilen der Electroden sich Funken oder ähnliche Erscheinungen zeigen, wir es also in diesem Falle mit einem Electrodenspectrum, aber nicht mit einem des eingeschlossenen Gases zu thun haben. Das Glühen der Glashüllen dürfte daher das Auftreten des dem Silicium angehörigen Vacuumspectrums verursachen. Eine vollständige Uebereinstimmung bis in alle Einzelheiten hinein nachzuweisen, ist mir bis jetzt nicht gelungen, nähere Angaben, sowie Messungen, hoffe ich in einer späteren Mittheilung veröffentlichen zu können.

Bei unseren bisherigen Versuchen konnte immerhin noch die Einwirkung des Gases auf die Schmiermittel der verschiedenen Hähne und Schliffe das Entstehen des so aus-

geprägten Kohlenoxydspectrums verschuldet haben, weshalb ich denn auch darauf bedacht war, einen Apparat zu construiren, der an den genannten Uebelständen nicht litt. Wie früher verwandte ich zwei aneinander geblasene Kugelgefässe die, mit Glasröhren zum Zwecke des Einfüllens der Entwickelungssubstanzen versehen, an eine dreifache Kundt'sche Glasfeder angeschmolzen waren, welche wiederum an die Spectralröhre angeblasen worden waren. Diese endlich war direct an den Bügel der hahnlosen Töpler'schen Quecksilberpumpe angeschmolzen, sodass also nirgendswo Schmiermittel angewandt werden mussten. Das ganze System wurde zunächst durch gründliches Evacuiren vollständig ausgetrocknet, dann die beiden Einfüllungsröhren geöffnet und in das eine Kugelgefäss eine kleine Quantität des betreffenden Gemisches, in das andere eine verhältnissmässig sehr grosse Menge Schwefelsäure gebracht und dann durch Ausziehen der Röhren wiederum verschlossen. Hierauf wurde aufs neue soweit als möglich ausgepumpt und durch tagelanges Stehenlassen und wiederholtes Evacuiren alle Luft thunlichst aus dem Apparate entfernt. Nachdem dies erreicht, liess man durch vorsichtiges Neigen der Glasfeder die Schwefelsäure zu dem Pulver hinübertreten, wodurch eine sehr allmähliche Gasentwickelung eingeleitet wurde. Man erhielt dasselbe auf diese Weise recht trocken, indessen blieb doch immer, wenn auch nur wenig hervortretend, die grüne Wasserstofflinie in dem Spectrum sichtbar, welches sich auch jetzt noch wie in den früheren Fällen verhielt. Das Kohlenoxydspectrum, weit davon entfernt, verschwunden oder auch nur erheblich geschwächt zu sein, behauptete vielmehr vollständig seine hervorragende Stellung. Dass die Ursache solchen Verhaltens nicht etwa in der Einwirkung des Gases auf die Electrode zu suchen sei, bewies mir die Erscheinung, welche eine electrodenlose, vermittelst äusserlich angebrachter Stanniolbelege electrisch erregte Spectralröhre darbot; auch hier behauptete sich das Kohlenoxydspectrum in seiner Stellung.

Das so entschiedene Auftreten des letzteren muss umsomehr auffallen, als irgendwie bedeutende Verunreinigungen der Substanzen, welche zur Entwickelung des Fluorsiliciums

dienen, mit Kohlenstoff oder Verbindungen desselben in keiner Weise anzunehmen sind. Wie aber aus Spuren von Unreinheiten ein Kohlenoxydspectrum hervorgehen sollte, das geradezu einen integrirenden Bestandtheil der ganzen Erscheinung bildet, als hätte man es eher mit einer siliciumhaltigen Kohlenverbindung zu thun, dann umgekehrt, ist einigermassen schwierig einzusehen. Wenn bei höheren Dichten das Kohlenstoffspectrum relativ weniger lichtstark auftritt, was auf ein Zurücktreten des Kohlenoxydes gegenüber dem Silicium hinweisen könnte, so ist zu bedenken, dass bei grösseren Drucken auch Kohlensäureröhren ja nur wenig leuchtende Spectren geben. Wenn das betreffende Kohlenoxydspectrum nur von unbedeutenden Verunreinigungen herrührte, sollte man vielmehr erwarten, dass dasselbe, wenn es sich auch bei geringen Dichten bemerkbar machte, doch nicht im Stande sein würde, sich bis zur Continuität zu entwicklen, sondern bereits viel früher ganz zurücktreten müsste. Der Umstand, dass im eigentlichen Funken die Swan'schen Banden kaum sich zeigen, erklärt sich leicht aus dem geringen Electrodenabstande der hierbei angewandt werden musste, zeigen ja doch auch mit Kohlensäure gefüllte Röhren unter solchen Umständen das Swan'sche Spectrum kaum. Die chemischen Eigenschaften des Siliciums und des Fluorsiliciums sind durchaus keine solchen, um eine besonders starke Einwirkung auf Kohle vermuthen zu lassen, höchstens könnte man in der mächtigen Einwirkung des Gases auf die Feuchtigkeit, wodurch möglicher Weise wenigstens für kurze Zeit Sauerstoffatome frei werden dürften, die sich mit etwa vorhandenen Spuren kohlehaltiger Theilchen, wie Stäubchen etc. verbinden könnten, ein die Bildung von Kohlenoxyd begünstigendes Moment sehen. In Anbetracht aller dieser Umstände drängt sich einem fast unwillkürlich die Frage auf, ob nicht vielleicht unsere Beobachtungen durch eine Zersetzung des Siliciums in Kohlenstoff und ein oder mehrere andere Elemente zu erklären seien, eine Annahme, die indessen immerhin einigermassen gewagt erscheinen mag, da ja in unseren Versuchen ein vollständiges Ausschliessen jeglicher Verunreinigung doch

nicht erreicht ist, und der Einfluss einer solchen von vornherein sich kaum beurtheilen lässt. Nur das möchte ich noch bemerken, dass wenn man bisher die Kohlenlinien im Linienspectrum des Siliciums noch nicht bemerkt hat, dies nicht unbedingt als ein Beweis gegen die Zersetzbarkeit des Siliciums angesehen werden darf, da einmal das Linienspectrum der Kohle überhaupt nicht so leicht hervorzurufen ist, und zweitens in unserem Falle vielleicht auch nicht alle bei der Zersetzung sich bildenden Bestandtheile ins Glühen gerathen, indem dieselben etwa nur zum Theil an der Fortpflanzung der Electricität participiren.

Von Interesse erschien es mir, zu untersuchen, ob dasselbe merkwürdige Verhalten, welches wir bei Fluorsilicium beobachteten, auch bei anderen Kieselverbindungen anzutreffen ist. Ich habe daher meine Versuche auch auf Siliciumwasserstoff ausgedehnt, ein Gas, dessen Spectrum meines Wissens noch gar nicht erforscht worden. Die Hrn. Friedel und Ladenburg haben eine Methode kennen gelehrt, sehr reines Siliciumwasserstoffgas darzustellen, indessen ist dieselbe mit Schwierigkeiten verbunden und kaum anzunehmen, dass dieselbe für spectroskopische Untersuchungen ein von kohlehaltigen Dämpfen genügend befreites Gas liefern dürfte, da sie zu dessen Entwickelung organische Verbindungen verwenden, und zugleich mit dem Siliciumwasserstoff sich Kieselsäureäther bildet. Ich benutzte daher die von Wöhler angegebene Methode der Darstellung eines Gemenges von Siliciumwasserstoff und Wasserstoff. Die hierzu dienende Schlacke wurde mir von der chemischen Fabrik von Th. Schuchardt nach den Angaben von Gmelin-Kraut[1]) dargestellt und die Entwickelung in folgendem Apparate vorgenommen. Ein gläsernes Kugelgefäss *A* Fig. 9 war mit zwei weiteren (a, b) und zwei engeren (c, b) Glasröhren versehen, von denen b mit einem Wasserstoffentwickelungsapparate in Verbindung stand, c mit einem destillirtes Wasser enthaltenden Waschgefässe (e) communicirte, a diente zum Einfüllen der Entwickelungssubstanzen. An e waren drei

1) Gmelin-Kraut's Handbuch der Chemie 2. (1) p. 751.

Chlorcalciumröhren angeschmolzen (Schwefelsäure und Phosphorsäureanhydrid waren als Trockensubstanzen ausgeschlossen, da sie das Gas zersetzen), an diese wiederum ein grosses Kugelgefäss *B*, welches als Reservoir diente, und von dem aus die Röhre i zu der am Schliffstück der Pumpe befestigten Spectralröhre führte. Die weite Röhre b war umgebogen, sodass sie schräg nach aufwärts verlief, und trug die Hülse eines Schliffes, dessen Stöpsel mit einer längeren bis zum Knie von b reichenden, engen Röhre versehen, an den Hals eine Retorte (Fig. 10) sich angeschmolzen befand, welche concentrirte Salzsäure enthielt. Wurde der Stöpsel nunmehr so in seine Hülse eingesetzt, dass die Retorte nach abwärts hing, so konnte durch eine Drehung bewirkt werden, dass die Säure in beliebiger Quantität in das Kugelgefäss eintrat. Die Anwendung eines Hahnes war ausgeschlossen, da die durchtretende Säure nicht von dem Schmiermittel desselben verunreinigt werden durfte, was, wie man sieht, bei unserer Einrichtung bei einiger Vorsicht nicht zu befürchten ist. Da das Gas bekanntlich mit Wasserstoff vermengt an der Luft explodirt, so musste die Entwickelung in einer Wasserstoffatmosphäre geschehen, und zwar in einer verdünnten, um nicht einen zu grossen Ueberschuss an Wasserstoff zu haben. Ein directes Vacuum konnte wegen der störenden Salzsäuredämpfe nicht verwendet werden, diese wurden bei unserer Einrichtung durch das Wasser in e von der Pumpe abgeschlossen, die im Apparate vorhandene Luft wurde durch mehrmaliges Auspumpen und Einleiten von Wasserstoff thunlichst entfernt, und dann durch Drehen der Retorte etwas Säure in das Kugelgefäss fliessen gelassen, welches die in Stücke zerstossenen Schlacke nebst soviel destillirtem Wasser, dass jene darin ganz untertauchten, enthielt. Je nach Bedarf konnte man auf diese Weise, wie man leicht einsieht, nach Belieben Gas in grösseren oder kleineren Quantitäten entwickeln und dasselbe dann langsam bis in die ganz entleerten Reservoirkugeln strömen lassen. Nach Abschluss dieser wurde dann dem Gas gestattet, in die Spectralröhre und die Pumpenräume zu treten. Unter Einwirkung des electrischen Stromes trat eine starke Zersetzung

auf, ein gelblich-weisser Niederschlag trübte sehr bald die Glaswände und erschwerte die Beobachtung. Bildet das Licht in der mit einer Capillare versehenen Röhre einen engen Cylinder von violetter Farbe, so ist das Spectrum fast continuirlich, bei abnehmenden Drucken tritt das Kohlenoxydspectrum auch hier hervor und beherrscht das Gesichtsfeld fast allein, von dem Wasserstoff sind kaum Spuren zu sehen, das Silicium macht sich gar nicht bemerkbar. Als das Glimmlicht einen dünnen Cylinder bildete, und das positive Licht bereits die ganze Röhrenbreite ausfüllte, passirten auch die Flaschenentladungen die Röhre. Dabei blieb das Kohlenoxydspectrum bestehen, die Wasserstofflinien aber, besonders die grüne, flackerten hell auf, daneben bandenförmige Gebilde, die sich als Andeutungen des Swan'schen Spectrums erwiesen. Mit abnehmender Dichte trat späterhin das Wasserstoffspectrum mehr und mehr hervor; umgibt ein hufeisenförmiger, dunkler Raum die Electroden, so sind vom Kohlenoxyd nur noch Andeutungen vorhanden, die Flasche gibt bereits das bekannte Vacuumspectrum; wurde noch etwas weiter evacuirt, so gingen die Flaschenentladungen nicht mehr durch, die gewöhnlichen ergaben unter Erscheinung der grünen Fluorescenz des Glases nur noch ein Wasserstoffspectrum. Die Reinheit der Schlacke von Kohle, trotz sorgfältiger Bereitung, kann wohl kaum in dem Maasse vorausgesetzt werden, wie bei den Substanzen, welche Fluorsilicium lieferten, trotzdem bleibt auch hier die Entstehung des Kohlenoxydspectrums sehr auffallend.

Das Silicium, welches sich merkwürdigerweise bei geringen Dichten gar nicht bemerkbar machte, trat bei grösseren Drucken in einer weiten Röhre hervor, als Flaschenentladungen unter Einschaltung einer Funkenstrecke das Gas passirten. Man sah dann eine Anzahl der im Funkenspectrum des Fluorsiliciums auftretenden Linien sich zeigen, die blauen Streifen desselben fehlten jedoch ebenso wie bei den früheren Beobachtungen. Vielleicht sind diese speciell dem Fluorsilicium eigenthümlich und daher bei anderen Verbindungen überhaupt nicht aufzufinden.

VI. *Zur Dispersion des Quarz; von E. Ketteler.*

Der Bergkrystall ist ein optisch so interessanter Körper, dass es nicht wunder nimmt, dass derselbe in neuester Zeit wieder eine Reihe von höchst werthvollen Untersuchungen veranlasst hat. Dieselben, wesentlich gefördert durch die hohe Durchgängigkeit des Quarz für ultraviolette Strahlung, welche, Dank den Bemühungen der Herren Cornu[1]) und Mascart[2]), ein Bereich von etwa vier Octaven für Messungen zugänglich macht, beziehen sich auf die Feststellung seiner Brechungsindices im gewöhnlichen und aussergewöhnlichen Spectrum durch die Herren Mascart[3]) und Sarasin[4]), auf die durch ihn bewirkte Drehung der Polarisationsebene für die Axenrichtung seitens der Herren Soret und Sarasin[5]) und zum Theil auch auf seine elliptische Polarisation in geneigten Richtungen seitens der Herren v. Lang[6]) und Hecht.[7])

Ich beabsichtige im Folgenden, die vorgenannten Beobachtungen nach einem einheitlichen Gesetze zu berechnen und möchte dabei insbesondere auf die sich ergebenden Constanten desselben und deren theoretische Bedeutung die Aufmerksamkeit hinlenken.

1. Bezieht man zunächst das von mir aufgestellte Dispersionsgesetz[8]) auf ein circular oder elliptisch polarisirendes

1) Cornu, Ann. de l'École normale. (2) **8.** u. **4.** Arch. de Gen. **2.** p. 119. 1879.

2) Mascart, Ann. de l'École normale. **4.** p. 7. 1867.

3) Mascart, l. c. **1.** p. 233. 1864.

4) Sarasin, Arch. de Gen. **66.** p. 109. 1878.

5) Soret u. Sarasin, l. c. **8.** p. 5, 79, 201. 1882.

6) v. Lang, Pogg. Ann. Ergzbd. **8.** p. 389. 1878.

7) Hecht, Wied. Ann. **20.** p. 426. 1883. Da derselbe neben den Formeln Cauchy's, v. Lang's, Lommel's und Voigt's die meinigen (Wied. Ann. **16.** p. 109 u. 222) nicht berücksichtigt hat, so möge hier kurz bemerkt werden, dass dieselben zwischen denen Cauchy's und den späteren v. Lang's gerade die Mitte halten. Leider gibt es wegen der Enge der bisherigen Versuchsgrenzen vorläufig noch keine Dispersionsbeziehungen zu berechnen.

8) Ketteler, Wied. Ann. **21.** p. 206. 1884. Vgl. ferner Wied. Ann.

Medium, welches parallel seiner magnetischen oder krystallographischen Hauptaxe von ebenen Wellen durchzogen wird, und in welchem, wie früher gezeigt, die sich dieser Richtung zuordnenden beständigen Schwingungen der Aether- und Körpertheilchen Kreise sind, so erhält dasselbe die folgende Form:

$$n^2 - 1 = \sum \frac{m'}{m} \frac{B C_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - C_0^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1 \pm F\frac{\lambda}{\lambda_m}\right) - \sqrt{-1}\, G \frac{\lambda}{\lambda_m}}.$$

Darin bedeutet: $n = a + b\sqrt{-1}$

den sich aus der Charakteristik a, b (a = Hauptrefractionsindex, b = Hauptextinctionsindex) zusammensetzenden complexen Brechungsexponenten. m'/m ist die auf die Aetherdichtigkeit bezogene Dichtigkeit der mitschwingenden Körpertheilchen. $1/\lambda_m^2$ ist die Kraft, welche die isolirt gedachten Körpertheilchen in die Gleichgewichtslage zurückführt, und G die Reibungsconstante. Es misst ferner B/λ_m^2 den seitens der Körpertheilchen auf die Aethertheilchen ausgeübten Reactionsdruck, und C_0 bedingt die von der Form der Körpertheilchen abhängige Ursache, welche dieselben von dem andrängenden Aether ergriffen werden lässt. F endlich ist diejenige Constante, welche, mit der Asymmetrie des Mediums gegeben, die rechtscircularen Schwingungen anders fortschreiten lässt als die linkscircularen, und die daher für beide mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen ist. Endlich bezieht sich das Summenzeichen auf die Zahl der vorhandenen Absorptionsgebiete, resp. auf die Zahl der vorhandenen heterogenen Molecularqualitäten.[1])

Für die extremen Wellenlängen 0 und ∞ ergeben sich insbesondere die von F unabhängigen Grenzwerthe:

$$n_0^2 - 1 = \sum \frac{m'}{m} C_0^2, \quad n_\infty^2 - 1 = \sum \frac{m'}{m} B C_0.$$

---

16. p. 86. 1882. In allen dort gegebenen Formeln wolle man dem Coëfficienten $\mathfrak{D}$ den Werth beilegen:

$$\mathfrak{D} = (n_\infty^2 - 1)\lambda^2 - (n_0^2 - 1)\lambda_m^2.$$

1) Ueber den Zusammenhang zwischen dem Drehungswinkel der Polarisationsebene und dem bezüglichen Absorptionscoëfficienten findet man l. c. p. 120 ein einfaches Theorem.

Es wird im Folgenden genügen, sich auf zwei einzelne Molecularqualitäten zu beschränken. Nehmen wir überdies noch an, dass die Mittellinien der beiden Absorptionen recht weit ausserhalb des Beobachtungsfeldes gelegen seien, und die bezüglichen Reibungsconstanten (G) für das Innere desselben vernachlässigt werden dürfen, so wird zugleich b verschwinden, und a mit n identisch werden. Man darf dann einfacher schreiben:

$$n^2 - 1 = \frac{m_1}{m} \frac{B_1 C_1 \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} - C_1^2}{\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} - 1 \pm F_1 \frac{\lambda}{\lambda_1}} + \frac{m_2}{m} \frac{B_2 C_2 \frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} - C_2^2}{\frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} - 1 \pm F_2 \frac{\lambda}{\lambda_2}},$$

und will ich hier gleich hinzufügen, dass fortan auch die Coëfficienten F als so klein vorausgesetzt werden sollen, dass ihre höheren Potenzen unbeachtet bleiben dürfen. Unter dieser Beschränkung erhält man, wenn man die Indices der rechts- und linkscircularen Einzelwelle mit n', n'' bezeichnet:

$$\text{(I)} \quad \tfrac{1}{2}(n'^2 + n''^2) - 1 = \frac{m_1}{m} \frac{B_1 C_1 \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} - C_1^2}{\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} - 1} + \frac{m_2}{m} \frac{B_2 C_2 \frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} - C_2^2}{\frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} - 1},$$

sowie:

$$\text{(II)} \quad \tfrac{1}{2}(n'^2 - n''^2) = F_1 \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{m_1}{m} \frac{B_1 C_1 \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} - C_1^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2} - 1\right)^2} + F_2 \frac{\lambda}{\lambda_2} \frac{m_2}{m} \frac{B_2 C_2 \frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} - C_2^2}{\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_2^2} - 1\right)^2}.$$

2. Wendet man den ersten dieser Ausdrücke auf die Brechungsindices des Quarz an, sowie sie die prismatische Methode bei der zur Zeit üblichen Genauigkeit zu liefern pflegt, so ist darin das links stehende arithmetische Mittel mit dem factisch beobachteten Werthe (n^2) zu identificiren. Beziehen wir endlich von den beiden Gliedern der rechten Seite das erste auf ein ultrarothes, das zweite auf ein ultraviolettes Absorptionsgebiet, sodass folglich:

$$\lambda_1 > \lambda > \lambda_2,$$

und sehen wir der Erfahrung zufolge den Einfluss des ganzen ersten Gliedes als nur klein an, so dürfte das darauf hinauskommen, dass schon C_1^2 und ebenso die höheren Potenzen von λ^2/λ_1^2 vernachlässigt werden dürfen. Demnach wird:

$$(1_a) \quad n^2 - 1 = -\frac{m'}{m}\frac{B_1 C_1}{\lambda_1^2}\lambda^2 + \frac{m'_2}{m} B_2 C_2 + \frac{m'_2}{m}\frac{(B_2 C_2 - C_2^2)\lambda_2^2}{\lambda^2 - \lambda_2^2}.$$

Ich setze jetzt hierin abkürzungsweise:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{m'_1}{m}\frac{B_1 C_1}{\lambda_1^2} = \varkappa, \quad \frac{m'_2}{m} B_2 C_2 = \mathfrak{n}_\infty^2 - 1, \quad \frac{m'_2}{m} C_2^2 = \mathfrak{n}_0^2 - 1, \\ \mathfrak{n}_\infty^2 - \mathfrak{n}_0^2 = D = \frac{\mathfrak{D}}{\lambda_m^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_m \end{cases}$$

und erhalte so die für numerische Rechnungen bequeme Form:

$$(1) \qquad n^2 = -\varkappa\lambda^2 + \mathfrak{n}_\infty^2 + \frac{\mathfrak{D}}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Der so entstandene Näherungsausdruck charakterisirt natürlich im Gegensatz zu dem früher entwickelten[1]) strengen Gesetz den ordinären Strahl des Quarz ganz unabhängig vom Neigungswinkel zur optischen Axe. Untersucht man ebenso die Brechungsindices des extraordinären Strahles, und zwar mittelst eines Prismas, dessen Kante der Axe parallel ist, also für Schwingungen parallel zur Axe, so gilt auch für diese ein Ausdruck von der gleichen Form, aber mit theilweise verschiedenen Coëfficienten. Unserer Theorie zufolge[2]) lässt sich nämlich schreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} n'^2 = -\varkappa'\lambda^2 + \mathfrak{n}'^2_\infty + (\mathfrak{n}'^2_\infty - \mathfrak{n}_0^2)\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2} \\ n''^2 = -\varkappa''\lambda^2 + \mathfrak{n}''^2_\infty + (\mathfrak{n}''^2_\infty - \mathfrak{n}_0^2)\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2}, \end{cases}$$

sofern eben $\mathfrak{n}_0$ (resp. C_1 und C_2) und λ_1 und λ_m in beiden gleichen Werth haben. Durch Subtraction beider entsteht also die neue, $\mathfrak{n}_0$ nicht mehr enthaltende Gleichung:

$$(4) \qquad n'^2 - n''^2 = -(\varkappa' - \varkappa'')\lambda^2 + (\mathfrak{n}'^2_\infty - \mathfrak{n}''^2_\infty)\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Und wenn man zu den theoretischen Coëfficienten zurückgeht, kommt:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{B'_1}{B''_1} = \frac{\varkappa'}{\varkappa''}, \quad \frac{B'_2}{B''_2} = \frac{\mathfrak{n}'^2_\infty - 1}{\mathfrak{n}''^2_\infty - 1}, \\ \frac{B'_2}{C_2} = \frac{\mathfrak{n}'^2_\infty - 1}{\mathfrak{n}_0^2 - 1}, \quad \frac{B''_2}{C_2} = \frac{\mathfrak{n}''^2_\infty - 1}{\mathfrak{n}_0^2 - 1}, \end{cases}$$

1) Ketteler, l. c. p. 109.

2) Ketteler. l. c. 21. p. 208. 1884.

wohingegen bei dem eingehaltenen Näherungsgrade C_1 und λ_1 der Berechnung unzugänglich bleiben.

3. Führen wir dieselben Vernachlässigungen in den Ausdruck II ein, so schreibt sich zuvörderst die linke Seite desselben auch so: $(n' - n'')\, n$.

Das erste Glied der rechten Seite reducirt sich auf:

$$F_1 \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{m'_1}{m} \frac{B_1}{\lambda_1^2} \frac{C_1}{\lambda_1^2} \lambda^2,$$

das zweite endlich zufolge Gl. (1) auf:

$$F_2 \frac{\lambda}{\lambda_2} \frac{n^2 - 1 + \varkappa\lambda^2}{\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2} - 1}.$$

Multipliciren wir demnach Ausdruck II mit $\pi/\lambda n$ und beachten, dass die entsprechende Drehung ϱ der Polarisationsebene einer Quarzschicht von der Dickeneinheit (1 mm) durch die Formel:

$$\varrho = \frac{\pi}{\lambda}(n' - n'')$$

mit der Differenz der Brechungsindices verknüpft ist, so erhalten wir:

$$(6_a) \qquad \varrho = \frac{\pi}{n} \frac{F_1}{\lambda_1} \varkappa\lambda^2 + \frac{\pi}{n} \frac{F_2}{\lambda_2} (n^2 - 1 + \varkappa\lambda^2) \frac{\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Sofern auch hier das erste Glied nur geringen Einfluss hat, so möge in demselben für n ein Mittelwerth n_μ eingeführt werden. Ebenso werden wir in der Klammer des zweiten Gliedes die kleine Grösse $\varkappa\lambda^2$, die nur für die kleinen Drehungswinkel der grösseren Wellenlängen bemerkbar wird, bis auf weiteres vernachlässigen. Setzen wir nun zur Abkürzung:

$$(7) \qquad \frac{F_1}{\lambda_1} \frac{\pi}{n_\mu} \varkappa = K, \qquad \frac{F_2}{\lambda_2} \pi \lambda_m^2 = c,$$

so gewinnen wir die bequemere Form:

$$(6) \qquad \varrho = K\lambda^2 + c \frac{\frac{n^2 - 1}{n}}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.^{1})$$

1) Sollte man in einzelnen Fällen C_1^2 nicht vernachlässigen dürfen, so würde zu den beiden Gliedern der rechten Seite noch eine kleine Constante hinzutreten.

In derselben ist ersichtlich λ_m identisch mit der gleichbezeichneten Grösse der Gleichungen (3); das Nämliche gilt von λ_1, das sich indess auch hier der Berechnung entzieht.

4. Von allen in Betracht kommenden Constanten hat offenbar λ_m die fundamentalste Bedeutung, und keine Gleichung erscheint in Rücksicht auf die vorliegenden Beobachtungsreihen zur numerischen Ermittelung derselben so geeignet als der schon durch die fünfte Ziffer der Wellenlängen stark beeinflusste Ausdruck (6). Ich beginne daher mit der Berechnung der Versuche der Herren Soret und Sarasin über die Rotationspolarisation und stelle hier insbesondere den kürzlich von Hrn. Lommel[1]) aufgestellten Näherungsgesetzen Gleichung (6) als das vollständige Drehungsgesetz gegenüber.

Die Resultate der Beobachtung und Rechnung sind in Tabelle I zusammengestellt. Die erste Columne derselben enthält die Bezeichnung der Spectrallinien, die zweite die Wellenlängen, und zwar für die Fraunhofer'schen Linien nach Ångström, für die ultravioletten Sonnen- und Cadmiumlinien nach Cornu; in der dritten Columne stehen die Brechungsverhältnisse, sowie dieselben für die Sonnenlinien von Mascart und für die Cadmiumlinien von Sarasin bestimmt sind. Die mit * bezeichneten Werthe für h und K sind interpolirt. Die vierte Columne gibt sodann die am Quarz ($n^0 = 2$) gemessenen Drehungswinkel; dabei sind diejenigen Werthe, die sich auf schwierig zu beobachtende Linien, resp. Liniengruppen beziehen, und deren Genauigkeit infolge dessen zweifelhaft erscheint, in Klammern eingeschlossen.

Es wurden zunächst die drei Constanten K, c, λ_m^2 aus mehreren zusammengehörigen Einzelbeobachtungen berechnet und zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler leicht gegen einander verschoben, bis das gesammte System der beobachteten Drehungen den aus den Wellenlängen berechneten möglichst zu entsprechen schien. Die so gewonnenen endgültigen Constanten findet man am Kopf der Tabelle, die

1) Lommel, Wied. Ann. 20. p. 578. 1883.

berechneten Drehungen stehen in der fünften Columne, und in der sechsten die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung.

Tabelle I.

Drehungswinkel des Quarz.

$K = -0{,}2960$ $\quad c = 8{,}20148$

$\log(-K) = 0{,}471\,2900 - 1$ $\quad \log c = 0{,}913\,8923$

$\lambda_m^2 = 0{,}010\,627.$

Spectral-linie	λ	n	ϱ beob.	ϱ ber.	δ	δ' Ketteler	δ' Lommel	δ' Sor. u. Sar.
A	0,760 4	1,539 02	(12,668°)	12,679°	−0,011	−0,181	−0,112	−0,035
a	0,718 36	1,540 187	14,304	14,305	−0,001	−0,154	−0,068	+0,006
B	0,686 71	1,540 99	15,746	15,733	−0,013	−0,126	−0,032	+0,037
C	0,656 21	1,541 88	17,318	17,318	0,000	−0,127	−0,022	+0,041
D_2	0,589 513	1,544 19	21,684	21,614	+0,082	−0,033	−0,013	+0,024
D_1	0,588 912	1,544 19	21,727	21,659	+0,068	−0,035	−0,017	+0,020
E	0,526 913	1,547 18	27,543	27,592	−0,049	−0,131	+0,033	+0,024
F	0,486 074	1,549 66	32,773	32,800	−0,027	−0,097	+0,081	+0,024
G	0,430 725	1,554 29	(42,604)	42,662	−0,058	−0,118	+0,095	−0,056
h	0,410 12	1,556 3*	47,481	47,511	−0,019	−0,080	+0,120	−0,074
H	0,396 81	1,558 16	(51,193)	51,139	+0,054	+0,007	+0,227	+0,004
K	0,393 33	1,558 3*	(52,155)	52,128	+0,027	−0,019	+0,176	−0,054
L	0,381 96	1,560 19	(55,625)	55,691	−0,066	−0,108	+0,111	−0,144
M	0,372 62	1,561 49	58,894	58,875	+0,019	−0,022	+0,188	−0,086
Cd. 9	0,360 90	1,563 48	(63,268)	63,306	−0,038	−0,077	+0,138	−0,158
N	0,358 18	1,564 00	(64,459)	64,412	+0,047	+0,009	+0,228	−0,073
Cd. 10	0,346 55	1,566 17	69,454	69,469	−0,015	−0,051	+0,160	−0,156
O	0,344 06	1,566 68	70,587	70,631	−0,044	−0,079	+0,145	−0,191
Cd. 11	0,340 15	1,567 44	72,448	72,517	−0,069	−0,103	+0,098	−0,224
P	0,336 00	1,568 42	74,571	74,615	−0,044	−0,077	+0,126	−0,199
Q	0,328 58	1,570 0	78,579	78,585	−0,006	−0,038	+0,113	−0,188
Cd. 12	0,324 70	1,570 94	(80,459)	80,498	−0,039	−0,081	−0,199	−0,522
R	0,317 98	1,572 90	(84,972)	84,912	+0,060	+0,030	+0,226	−0,090
Cd. 17	0,274 67	1,587 50	121,052	121,147	−0,095	−0,113	−0,079	−0,152
„ 18	0,257 13	1,596 24	143,266	143,315	−0,086	−0,069	−0,121	+0,037
„ 23	0,231 25	1,614 02	(190,426)	190,320	+0,106	+0,090	−0,101	+0,408
„ 24	0,226 45	1,618 16	201,824	201,762	+0,062	+0,046	−0,175	+0,342
„ 25	0,219 35	1,625 02	220,731	220,878	−0,147	−0,162	−0,389	+0,040
„ 26	0,214 31	1,630 40	235,972	236,271	−0,299	−0,313	−0,554	−0,302

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung mit Abrechnung etwa der beiden Bestimmungen für die Cadmiumlinien

25 und 26 eine vorzügliche, sofern in der That die Beobachtungsfehler nirgends überschritten scheinen. Der Zeichenwechsel ist ein häufiger, und die beobachtete und berechnete Curve schneiden sich in nicht weniger als in zwölf Punkten. Dabei möge indess bemerkt werden, dass ich, um bezüglich der dreifachen Cadmiumlinie 12 zu einem nur einigermassen befriedigenden Ziele zu kommen, die ihren beiden Extremlinien entsprechenden Drehungen einzeln berechnet und deren Mittelwerth in die Tabelle eingeführt habe. Es ergab sich nämlich:

$$\text{Cd } 12 \begin{cases} 0{,}3258 & 80{,}195 \\ 0{,}3248 & — \\ 0{,}3247 & 80{,}801\,. \end{cases}$$

5. Sofern überhaupt die Ermittelung der Wellenlängen nach den bezüglichen Bemerkungen der Herren Cornu und Mascart für das äusserste Ultraviolett verhältnissmässig schwierig, die Bestimmung der Rotationspolarisation dagegen erheblich sicherer erscheint, so hätte es einiges Interesse, die Wellenlängen auch rückwärts aus den gemessenen Drehungswinkeln abzuleiten. Ich habe mich indess mit einer derartigen Berechnung der sechs letzten Wellenlängen begnügen zu dürfen geglaubt, denn schon das in der folgenden kleinen ergänzenden Tabelle II zusammengestellte überaus günstige Ergebniss scheint diese Beschränkung zu rechtfertigen.

Tabelle II.

	λ beobachtet	λ berechnet	δ
Cd. 17	0,27467	0,27476	— 9
„ 18	0,25713	0,25717	— 4
„ 23	0,23125	0,23120	+ 5
„ 24	0,22645	0,22642	+ 3
„ 25	0,21935	0,21941	— 6
„ 26	0,21431	0,21441	—10

Cd. 26 liegt an der Grenze der Durchgängigkeit des für die Nicol'schen Prismen benutzten Kalkspathes.

6. Doch kehren wir zur Tabelle I zurück. Um zu zeigen, dass das erste Glied der Formel (6) nur einen geringen Einfluss ausübt, habe ich auch die Drehungswinkel, wie sie sich unter Vernachlässigung dieses Gliedes aus derselben

Formel berechnen, mit den beobachteten Werthen verglichen und die Differenzen (als δ') in Columne 7 aufgeführt. Unsere Gleichung (6) ist dadurch zu einer zweiconstantigen geworden, deren Leistungsfähigkeit mit der gleichfalls zweiconstantigen Formel des Hrn. Lommel:

$$\varrho = \frac{a}{\lambda^2\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2} \tag{7}$$

dadurch vergleichbar gemacht ist, dass die achte Columne die von Hrn. Lommel selbst mitgetheilten Abweichungen dieser Formel (7) von der Beobachtung enthält. Die in derselben vorkommenden Constanten haben die Werthe:

$$\log a = 0{,}855\,591\,2\,, \quad \lambda_0^2 = 0{,}008\,612\,4;$$

sie sind nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden. Man wird bemerken, dass (selbstverständlich unter Ausschluss der verschieden behandelten Linie Cd. 12) die Differenzen der Columne 7 weitaus kleiner sind als die der Columne 8.

Die Herren Soret und Sarasin selber haben anfangs Interpolationsformeln verwerthet von der von Boltzmann herrührenden Form:

$$\varrho = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \frac{c}{\lambda^6} + \frac{d}{\lambda^8} \tag{8}$$

mit zwei, drei und vier Gliedern, worin λ die Wellenlänge in Luft bedeutet. Später benutzten sie die Formel:

$$\varrho = Kl^2 + \frac{A}{l^2} + \frac{B}{l^4} + \cdots,$$

in welcher $l = \lambda/n$ die innere Wellenlänge im Quarz ist, haben aber schliesslich das erste Glied wieder fallen lassen und mit den zwei weiteren Gliedern die verhältnissmässig besten Resultate erzielt. Da indess diese letzte Gleichung, wiewohl sie vor der vorletzten die stärkere Convergenz voraus hat, einen lediglich empirischen Charakter besitzt, wohingegen die theoretischen Ausdrücke durch Reihenentwickelung mit Formel (8) in leidliche Uebereinstimmung gebracht werden können, so habe ich der Vollständigkeit wegen auch die Abweichungen zwischen dieser (mit vier Gliedern) und der Erfahrung als Columne 9 in Tabelle I aufgenommen.

7. Wir kommen hiernach zur Berechnung der Brechungs-

indices des Quarz und benutzen dazu die Gl. (3) und (4). Ueber die Brechungsexponenten des ordinären Strahles, welche das ganze Interall von *A* bis Cd. 26 umfassen, ist bereits oben (p. 438) das Nöthige gesagt, die des extraordinären Strahles sind von Mascart gemessen und reichen blos von *A* bis *R*.

Tabelle III.

Brechungsexponenten des Quarz.

Ordinärer Strahl.	Extraordinärer Strahl.
$\varkappa' = 0{,}011\,13$	$\varkappa'' = 0{,}013\,42$
$\mathfrak{D}' = 0{,}010\,653\,9$	$\mathfrak{D}'' = 0{,}010\,955\,4$
$n'^2_\infty = 2{,}356\,81$	$n''^2_\infty = 2{,}385\,17$
$\log \varkappa' = 0{,}046\,700\,0 - 2$	$\log \varkappa'' = 0{,}127\,780\,0 - 2$
$\log \mathfrak{D}' = 0{,}027\,510\,4 - 2$	$\log \mathfrak{D}'' = 0{,}039\,627\,2 - 2$
$\lambda_m{}^2 = 0{,}010\,627$	$\lambda_m{}^2 = 0{,}010\,627$

Spectr.-Linie	n beobachtet	n berechnet	δ	n beobachtet	n berechnet	δ
A	1,539 02	1,539 18	−16	1,548 12	1,548 16	− 4
a	1,540 19	1,540 16	+ 3	1,549 19	1,549 17	+ 2
B	1,540 99	1,540 98	+ 1	1,550 02	1,550 03	− 1
C	1,541 88	1,541 88	0	1,550 95	1,550 96	− 1
D	1,544 19	1,544 23	− 4	1,553 38	1,553 42	− 4
E	1,547 18	1,547 14	+ 4	1,556 36	1,556 43	− 7
F	1,549 66	1,549 64	+ 2	1,558 97	1,559 02	− 5
G	1,554 29	1,554 23	+ 6	1,563 72	1,563 75	− 3
H	1,558 16	1,558 09	+ 7	1,567 70	1,567 70	0
L	1,560 19	1,560 12	+ 7	1,569 74	1,569 78	− 4
M	1,561 49	1,561 52	− 3	1,571 21	1,571 23	− 2
Cd. 9	1,563 48	1,563 48	0	—	—	—
N	1,564 00	1,563 95	+ 5	1,573 81	1,573 71	+10
Cd. 10	1,566 17	1,566 15	+ 2	—	—	—
O	1,566 68	1,566 65	+ 3	1,576 59	1,576 47	+12
Cd. 11	1,567 44	1,567 47	− 3	—	—	—
P	1,568 42	1,568 36	+ 6	1,578 22	1,578 22	0
Q	1,570 0	1,570 06	− 6	1,579 98	1,579 96	+ 2
Cd. 12	1,570 94	1,571 01	− 7	—	—	—
R	1,572 90	1,572 73	+17	1,582 73	1,582 69	+ 4
Cd. 17	1,587 50	1,587 57	− 7	—	—	—
„ 18	1,596 24	1,596 27	− 3	—	—	—
„ 23	1,614 02	1,613 96	+ 6	—	—	—
„ 24	1,618 16	1,618 12	+ 4	—	—	—
„ 25	1,625 02	1,624 96	+ 6	—	—	—
„ 26	1,630 40	1,630 37	+ 3	—	—	—

Nachdem, wie gezeigt, die Rotationsversuche eine recht sichere Bestimmung der charakteristischen Wellenlänge λ_m ermöglicht haben, berechnete man zunächst für den gewöhnlichen Strahl die drei übrigen Constanten der Gl. (1) aus mehreren Einzelversuchen und suchte gleich durch kleine Modificationen derselben die Beobachtungsfehler in etwas auszugleichen. Da wegen der Länge des zur Verfügung stehenden Intervalles und der Grösse der Zunahme der Indices die so gewonnenen Constanten völlig sicher schienen, so ist bei dieser Ausgleichung jede Rücksichtnahme auf den extraordinären Strahl unterlassen worden.

Zur Vergleichung zwischen Beobachtung und Erfahrung dienen die ersteren Columnen der Tabelle III, deren Einrichtung wohl ohne weiteres verständlich ist. Sieht man etwa von den beiden Bestimmungen für A und R ab, so befriedigen die übrigen um so mehr. Nicht blos sind die absoluten Beträge der Abweichungen ganz den gegenwärtigen Hülfsmitteln entsprechend, sondern auch der Zeichenwechsel ist ein so häufiger, dass sich beobachtete und berechnete Curve in elf Punkten schneiden.

8) Durften hiernach die am Kopf der Tabelle stehenden Constanten $\varkappa'$, $n_\infty'^2$ und $\mathfrak{D}'$ als befriedigend angesehen werden, so blieb weiter für den extraordinären Strahl nur mehr $\varkappa''$ und $\mathfrak{D}''$ zu bestimmen übrig, was wieder mittels mehrerer Einzelbeobachtungen ausgeführt wurde. Die mit Hülfe dieser Constanten berechneten aussergewöhnlichen Indices findet man in den letzten Columnen der Tabelle III den beobachteten gegenübergestellt. Wie die Differenzencolumne lehrt, ist wiederum die Uebereinstimmung zwischen beiden genügend klein, indess der Zeichenwechsel (beobachtete und berechnete Curve schneiden sich blos in vier Punkten) befriedigt weniger, sofern das Vorzeichen für die grösseren Wellenlängen durchweg das gleiche bleibt.

Man kann die Erklärung dieses Umstandes vielleicht in einer Ungenauigkeit der Orientirung der Prismenkante zur Krystallaxe suchen. Beachtet man indess, dass die Grössenverhältnisse der zur Darstellung eines Brechungsindex nöthigen vier Constanten $\varkappa$, n, $\mathfrak{D}$, λ_m unbeschadet der Brauchbarkeit

derselben innerhalb eines gewissen Spielraumes relativ verschoben werden können, so unterliegt es keinem Zweifel, dass die Ausgleichung der Fehler der extraordinären Reihe noch befriedigender gelungen wäre, wenn man sie schon bei der definitiven Constantenbestimmung der ordinären Reihe von vornherein in Mitberücksichtigung gezogen hätte. Es würde das bei ähnlichen Untersuchungen wohl am besten in der Weise geschehen, dass man für die zwei, resp. drei Reihen der Hauptindices eines Krystalles n_0 (und event. λ_m) provisorisch selbständig berechnet, und dann erst den Mittelwerth dieser Zahlen als definitive gemeinschaftliche Constante behandelt.

9) Stellen wir nunmehr sämmtliche, aus allen drei Beobachtungsreihen gewonnenen Constanten in einer mehr übersichtlichen Weise zusammen, so ergiebt sich zunächst, dass in keiner derselben sich ein Einfluss des Reibungscoëfficienten G bemerkbar macht. Der Quarz ist also bis zur äussersten untersuchten Grenze noch (praktisch) als vollkommen durchsichtig anzusehen. Weiter berechnet sich aus den Drehungsversuchen ($n_\mu = 1{,}541$ genommen):

$$\frac{F_1}{\lambda_1} = \frac{K}{\frac{\pi}{n_\mu}\varkappa} = -\frac{13{,}039}{100}, \qquad \frac{F_2}{\lambda_2} = \frac{c}{\pi\lambda_m^2} = \frac{245{,}658}{100},$$

$$\lambda_1 = \text{unbekannt.} \qquad \lambda_2 = \lambda_m = 0{,}10309.$$

Aus den beiden ersteren Daten zieht man den Schluss, dass der Quarz als aus zwei activen Molecularqualitäten zusammengesetzt erscheint, deren eine ihr Absorptionsgebiet im Ultraroth, die andere im Ultraviolett gelegen hat, und deren Drehungsvermögen entgegengesetzt ist.

Die zweite Versuchsreihe ergab sodann für den ordinären Strahl:

$$\varkappa' = 0{,}011\,135 \qquad D' = 1{,}002\,542,$$
$$n'_\infty = 1{,}53519 \qquad n_0 = 1{,}16373,$$
$$\lambda_m = 0{,}10309.$$

Und ebenso die dritte für den extraordinären Strahl:

$$\varkappa'' = 0{,}013\,421 \qquad D'' = 1{,}03090,$$
$$n''_\infty = 1{,}54440 \qquad n_0 = 1{,}16373,$$
$$\lambda_m = 0{,}10309.$$

Es mag sonach — in Uebereinstimmung mit der theoretischen Forderung — als erwiesen gelten, dass die Drehungsformel mit den beiden Brechungsformeln eine, und die beiden letzteren zwei Constanten mit einander gemein haben.

Vergleicht man endlich die theoretischen Quotienten (p. 441):

$$\frac{B'_2}{C_2} = 3{,}91001, \qquad \frac{B''_2}{C_2} = 3{,}82985,$$
$$\frac{B''_2}{B'_2} = 1{,}02093, \qquad \frac{B''_1}{B'_1} = 1{,}2053,$$

so ergibt sich aus den beiden letzteren, dass für den ordinären und extraordinären Strahl das Verhältniss der Reactionskräfte der Körpertheilchen gegen den Aether für beide Absorptionsgebiete, resp. beide Molecularqualitäten keineswegs gleich ist.

Es wäre gewiss hoch interessant, die hier gezogenen Schlüsse auch auf andere Krystalle ausdehnen zu können. Vorläufig habe ich mich wenigstens vergewissert, dass dieselben auch für die verhältnissmässig stark differirenden Hauptbrechungsindices des Kalkspathes, sowie für die drei Indicesreihen des zweiaxigen Arragonits noch zutreffend sind.

10) Im Anschluss hieran, mögen noch einige Bemerkungen über die verwandten Formeln des Hrn. Lommel gestattet sein. Für alle genähert durchsichtigen (isotropen, resp. hemiëdrischen) Medien gehen die von mir aufgestellten Ausdrücke unmittelbar in die Lommel'schen über, wenn man in ersteren $n_0 = 1$ setzt, was etwa dadurch geschehen könnte, dass man $C = 0$, $B = \infty$ nähme, sodass BC eine endliche Grösse bliebe.

Was zunächst das Drehungsgesetz betrifft, so fällt die zwischen beiden Systemen bestehende Verschiedenheit aus der Formel (6) ganz heraus, und gilt daher diese, und gelten

ebenso meine sämmtlichen Rechnungen in Tab. I auch vom Standpunkte Lommel's.

Die von ihm benutzte Formel (7) ist erst dadurch unbefriedigend geworden, dass er die Brechungsindices des Ausdruckes (6) durch eine ungenügende Formel ausgedrückt hat. Ist nämlich meine Dispersionsgleichung:

$$(K) \qquad n^2 - n_\infty^2 = (n_\infty^2 - n_0^2)\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

ihrer Herleitung zufolge dreiconstantig, so ist die des Hrn. Lommel:

$$(L) \qquad n^2 - n_\infty^2 = (n_\infty^2 - 1)\frac{\lambda_m^2}{\lambda^2 - \lambda_m^2},$$

ihrer Natur nach zweiconstantig, d. h. die minimale Zahl der in beiden nöthigen Constanten ist bei jener 3, bei dieser 2. Nun ist es aber als ausnahmslose Regel bekannt, dass die Indices selbst eines schwach dispergirenden Mediums innerhalb eines einigermassen ausgedehnten Intervalles mindestens drei Constanten verlangen. Wollte auch Hr. Lommel das vollständige Drehungsgesetz (6) unter Beibehaltung der gefundenen Wellenlänge $\lambda_m = 0{,}10309$ mit seiner Dispersionsformel (L) in Uebereinstimmung bringen, so wäre derselbe genöthigt, zu den oben besprochenen beiden activen Bestandtheilen noch einen dritten, und zwar inactiven Bestandtheil ($F_3 = 0$) hinzuzuziehen. Denn schreibt man:

$$n^2 - 1 = -\varkappa\lambda^2 + \frac{a_2}{1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda^2}} + \frac{a_3}{1 - \frac{\lambda_3^2}{\lambda^2}},$$

so lässt sich diese Gleichung durch Reihenentwickelung umformen in:

$$n^2 - 1 = -\varkappa\lambda^2 + (a_2 + a_3) + (a_2\lambda_2^2 + a_3\lambda_3^2)\frac{1}{\lambda^2} + (a_2\lambda_2^4 + a_3\lambda_3^4)\frac{1}{\lambda^4},$$

welcher Ausdruck dann freilich auch den strengsten Anforderungen genügt.

Ebenso würden endlich beispielsweise für Schwefelkohlenstoff — die einzige angebbare Substanz, für welche der Coëfficient $\varkappa$ zu vernachlässigen ist — nach Hrn. Lommel's Auffassung zwei Absorptionsgebiete nöthig werden,

während ich mit einem einzigen auskomme und nach den von Hrn. Wüllner[1]) für 0° C. gegebenen Daten finde:

$$n_\infty = 1{,}60150, \qquad n_0 = 1{,}46765,$$
$$\lambda_m = 0{,}11149.$$

Wenn übrigens Hr. Lommel für das kurze Intervall von $B - G$ genügend strenge erwiesen hat, dass die magnetische Drehung der Polarisationsebene ganz dem gleichen Dispersionsgesetz gehorcht wie die der gewöhnlichen circularpolarisirenden Medien, so hat er damit zugleich der „electromagnetischen Lichttheorie" das Zeugniss ausgestellt, dass dieselbe auf ihrem eigensten Gebiet ihre Leistungsfähigkeit noch erst zu zeigen hat. Nach diesem in der That überzeugenden Beweise Hrn. Lommel's dürfte es vielleicht auch nicht mehr schwierig sein, die von mir[2]) jüngst aufgestellten Differentialgleichungen dahin zu erweitern, dass sie auch die von Kerr entdeckte Doppelbrechung electrisirter Flüssigkeiten mit umfassen.

Bonn, Januar 1884.

VII. *Akustische Experimentaluntersuchungen; von Dr. F. Melde in Marburg.*

(Hierzu Taf. IV Fig. 11—19.)

Schwingungen von Fäden.

1. In früheren Arbeiten[3]) habe ich die Methoden, Fäden mittelst anderer schwingender Körper, insbesondere Stimmgabeln, in stehende Transversalwellenbewegungen zu versetzen, im einzelnen beschrieben, und die hierbei in Betracht kommenden Erscheinungen und Gesetzmässigkeiten nach verschiedenen Richtungen hin erörtert. Es kamen hierbei für die Lage des Fadens gegenüber der Stimmgabel namentlich

1) Wüllner, Pogg. Ann. **133.** p 1. 1868.

2) Ketteler, Wied. Ann. **21.** p. 208. 1884.

3) Melde, Pogg. Ann. **109.** p. 193—215. 1859; **111.** p. 517—533. 1860. Ferner: „Lehre von den Schwingungscurven" Leipzig, J. A. Barth, 1864, besonders Kap. 6.

zwei wesentliche Verschiedenheiten in Betracht, und bezeichnete ich diese mit dem Namen „Parallelstellung“ und „Transversalstellung“.

Das Interessante bei der Transversalstellung bestand in den von mir in den citirten Abhandlungen mit dem Namen „gebrochene Wellen“ bezeichneten Wellenformen. Diese eigenthümlichen Formen kommen dadurch zu Stande, dass das eine Ende des Fadens, an der Stimmgabel liegend, keine feste Grenze bildet, sondern ein bewegliches Ende ist, das mit der Gabel gemeinschaftlich seine Schwingungen ausführen muss. Ist die Masse des Fadens gegenüber der Masse der Gabel verschwindend klein, ist ferner die dem Faden ertheilte Spannung keine beträchtliche, so muss man annehmen, dass der Faden die Schwingungen der Gabel kaum beeinflusst, und dass die Gabel das allein Dominirende ist, nach welchem die Fadenschwingungen sich zu richten haben. Von diesem Gesichtspunkte aus kann man das, was ich „gebrochene Wellen“ nannte, auch mit dem in jüngster Zeit mehrfach in Gebrauch gekommenen Namen „erzwungene Schwingungen“ belegen, deren Hauptwesen also auch noch darin bestände, dass die Schwingungszahl des mitschwingenden Körpers dieselbe ist, wie die, welche dem erregenden Körper zukommt. Ist die soeben hervorgehobene Beziehung hier und sonstwo in der Akustik nicht erfüllt, so passt die letzte Bezeichnung nicht recht. Denn wäre die Masse des Fadens gross, nähme man anstatt eines dünnen Fadens eine schwere Metallsaite, wäre ferner auch schon bei einem leichten Faden die Spannung eine beträchtliche, so kann von „erzwungenen“ Schwingungen nicht mehr ganz geredet werden. Denn die Sache kann jetzt so kommen, dass die Schwingungen des fadenförmigen Körpers die Gabel sehr wesentlich beeinflussen. In diesem Falle würde u. a. der Unterschied jetzt darin liegen, dass eine sich gleichbleibende, für Faden und Gabel geltende Schwingungszahl nicht mehr existirt, vielmehr statt dessen eine resultirende Schwingungszahl sich einstellt, welche nicht dieselbe ist wie die der Gabel. Der fadenförmige Körper und die Gabel bildeten in diesem Falle ein combinirtes

System, dessen Schwingungen im allgemeinen andere sein müssen, wie die jedes einzelnen Theiles. Eine bestimmte Grenze zwischen den sogenannten „erzwungenen" Schwingungen und denen, welche ich soeben „combinirte" nannte, existirt nicht. Denn man wird unzweifelhaft durch optische Hülfsmittel im Stande sein, selbst die Einwirkung eines ganz dünnen und wenig gespannten Fadens auf die Gabelschwingungen zu constatiren.

2. Die Stimmgabel war bei meinen bisherigen Versuchen an dem einen Ende des Fadens mit diesem in Verbindung und erzeugte von hieraus in letzterem stehende Transversalwellen, wobei deren Zahl gleich einem Vielfachen 0, 1, 2... einer Halbwelle plus einem Reste einer solchen, welcher Rest unmittelbar an der Stimmgabel lag. Bildet dieser Rest gerade eine Viertelwellenlänge = eine halbe Halbwelle, so ist die Maximal-Schwingungsamplitude $\mu\nu$ (Fig. 11_a) des Fadens gleich der Schwingungsamplitude $\alpha\beta$ der Gabel. Würde von diesem Moment an die Spannung vermehrt, so nähme der Rest der Halbwelle ab; es näherte sich der Knoten n dem beweglichen Gabelende, und die Maximalschwingungsamplitude $\mu\nu$ (Fig. 11_b) des Fadens würde grösser werden, am grössten, wenn dieser Knotenpunkt in unmittelbarer Nähe links von der Gabel sich befände. Vermehrte man jetzt die Fadenspannung noch weiter, so würde eine der Fig. 11_c entspechende Schwingung stattfinden. Es käme hierbei eine volle Halbwelle nicht heraus, und ist die Sache so aufzufassen, als wäre der Knoten n rechts von der Gabel gelegen.

Verringerte man von dem durch die Fig. 11_a versinnlichten Momente an die Spannung, so würden die nächsten Uebergänge der Fadenschwingungen durch die Fig. $11_{d\ u.\ e}$ versinnlicht sein, zu denen wohl eine nähere Erläuterung nicht gegeben zu werden braucht. Das Bemerkenswerthe bleibt demnach das, dass am Gabelende niemals ein Knoten angenommen werden darf, und dass, wenn man etwa Messungen von Halbwellenlängen vornehmen will, man die an der Gabel liegende Strecke unberücksichtigt lassen muss.

Es versteht sich von selbst, dass wenn in Fig. 11 und

auch bei noch folgenden Figuren die Formen der Fadenschwingung in Stücken von geraden Linien dargestellt sind, dies nur eine Bequemlichkeit bei der Zeichnung bildete. In Wirklichkeit hat man ja den Faden in den Elongationsgrenzen als eine Curve und nicht als eine gebrochene Linie aufzufassen.

3. Weiter interessant und insbesondere mit Membranschwingungen im innigsten Zusammenhang stehend werden die Fadenschwingungen dann, wenn die erregende Gabel nicht an einem Ende, sondern an irgend einem Punkte, der zwischen den beiden festen Endpunkten des Fadens gelegen ist, seine Bewegung einleitet und unterhält. Ich benutze zu diesen Versuchen eine Stimmgabel, die mit Hülfe des electrischen Stromes in Bewegung erhalten wird. An einem der Zinken lässt sich leicht eine Hülfseinrichtung anbringen, mit welcher der Faden in dauernden Contact gebracht, nun seine Schwingungen ausführt. Diese Hülfseinrichtung kann einfach in einem Stückchen Draht bestehen, das in der Mitte rechtwinklig umgebogen ist. Fig. 12 versinnlicht die ganze Einrichtung. Sie besteht in vier ca. 120 cm langen Holzleisten, die durch zwei Brettchen — schwarz gezeichnet — an den Enden zu einem Rahmengestell zusammengehalten werden, sodass sie, von oben gesehen, einen Zwischenranm zwischen sich lassen, in welchem die Ständer S und S_1 sich hin und her bewegen lassen. Desgleichen halten diese Brettchen an den Enden die zwei oberen Leisten pp und die zwei unteren Leisten qq so auseinander, dass sich die beiden Fussbrettchen — vertical schraffirt gezeichnet —, auf denen die Ständer S und S_1 mittelst Schrauben aufgeschraubt sind, hin und her schieben lassen. Die Ständer S und S_1 tragen oben je ein rechtwinkelig umgebogenes und mit Siegellack befestigtes Zinkblatt α und α_1, über welches der Faden AB läuft, der an S in ein Häkchen h eingehakt ist und durch das in S_1 sitzende Wirbelchen ω gespannt werden kann. Die Stimmgabel ist so hinter dem soeben beschriebenen Apparate auf einer soliden Unterlage befestigt, dass sie sich mit dieser hin und her verschieben lässt. Die Vorderfront der beiden Gabelzinken ist in D und D_1 zu sehen. An D

ist das Drahtstück σ befestigt, welches mit dem Faden in Verbindung gesetzt wird. Es kann also durch Verschiebung der Gabel ein beliebiger Punkt des Fadens mit σ in Verbindung kommen. Dasselbe lässt sich aber auch, wenn der Tisch, auf dem das Ganze aufruht, lang genug ist, dadurch bewirken, dass die Gabel stehen bleibt und der Fadenhalter verschoben wird. Selbstverständlich muss die Gabel so an an den Faden heranreichen, dass der Stift σ denselben nur eben berührt. Bringt man dann auf σ ein klein wenig weiche Klebmasse (Kolophonium und Terpentinöl zusammengeschmolzen), so kann man in der allereinfachsten Weise die Verbindung des Fadens mit der Gabel herstellen, indem man ein wenig den Faden an σ andrückt, und kann ebenso einfach diese Verbindung auch wiederum lösen, ohne dass hierbei eine Spannungsänderung des Fadens eintritt. Denn dies ist die Grundbedingung für die im Folgenden beschriebenen Erscheinungen.

4. Wir wollen nun zunächst annehmen, der Faden stehe in seinem Mittelpunkte mit der Gabel in Verbindung. Es gilt dann für alle Schwingungsarten, welche die Gabel hervorbringt, das bemerkenswerthe

1. Gesetz: dass der Faden beiderseits zur Mitte nur **symmetrische** Bewegungen und Formen annimmt.

2. Gesetz: dass bei all diesen Schwingungen in die Mitte des Fadens kein Knoten zu liegen kommt, dass mithin vor allem die Oberschwingungen des Fadens, deren Ordnungszahl m eine gerade Zahl ist, jetzt nicht eintreten können.

Hierbei möge zunächst bemerkt werden, dass „Oberschwingungen“ und „Eigenschwingungen“ als identisch anzusehen sind, und dass die erste Oberschwingung auch identisch ist mit der Grundschwingung des Fadens, wobei er nur eine Halbwelle zeigt, und wofür $m = 1$ zu setzen ist.

Fig. 13_d stelle nun dar, dass die dritte Oberschwingung eingetreten ist. Es zeigt der Faden dann drei völlig gleiche Halbwellen, deren Maximalamplituden $\mu\nu$ und $\mu_1\nu_1$ gleich der

Schwingungsamplitude $\alpha\beta$ der Gabel sind. Vermehrt man von diesem Momente an die Spannung des Fadens, so rücken die beiden Knoten n und n_1 näher an die Mitte heran, und der Faden zeigt die interessante Erscheinung der Fig. 13_c. Man könnte glauben, er zeige zwei gleich lange Halbwellen an den beiden Enden und in der Mitte eine kürzere Halbwelle. Doch ist selbstverständlich diese letztere nicht als Halbwelle zu rechnen, vielmehr die Sache so anzusehen, als hätten wir zwei halb so lange Fäden mit den festen Enden A und B, während die anderen noch freien Enden bei $\alpha\beta$ mit der Gabel verbunden wurden. Man begreift demnach sofort, dass die Schwingungsformen, mit denen wir es jetzt zu thun haben, eigentlich keine neuen Formen sind. Denn ob der Faden mit seiner Mitte oder mit irgend einem anderen Punkte seiner Länge mit der schwingenden Gabel in Verbindung gebracht wird, es gilt das

3. Gesetz: dass hierbei der Faden als aus zwei Stücken bestehend angesehen werden kann, von denen jedes Stück genau so schwingt, als wäre es für sich mit der Gabel in Verbindung und bildete gar nicht die Fortsetzung des anderen Stückes.

Wir hätten demnach nicht nöthig, diese Erscheinungen zu verfolgen, da dieselben nach dem, was schon unter 2. hervorgehoben wurde, leicht vorausgesehen werden können. Aber mit Rücksicht auf andere akustische Phänomene können wir diese Formen auch als für den ganzen Faden eintretend ansehen und besprechen, da sich dann der Zusammenhang leichter übersehen lässt, und die Darstellung desselben auch eine bequemere wird. Vermehren wir von einem der Fig. 13_a entsprechenden Momente an die Spannung noch weiter und weiter, so rücken die Knoten n, n_1 noch näher an die Gabel heran. Da sie aber nicht vollständig in einen Knoten zusammenfallen können, so muss nothwendig jetzt eine Discontinuität in den Uebergangsformen stattfinden: die zweite Oberschwingung tritt nicht ein, sondern statt ihrer die durch Fig. 13_b versinnlichte Schwingung, welche letztere dann bei noch grösserer Spannungsvermehrung in die erste Oberschwingung der Fig. 13_a übergeht, und wobei wieder die

Maximalamplitude der Fadenschwingung gleich der Schwingungsamplitude $\alpha\beta$ der Gabel geworden ist.

Verringern wir die Fadenspannung vom Momente der Fig. 13_d an, so tritt zunächst eine der Fig. 13_e entsprechende Schwingungsform ein. Bei weiterer Verringerung möchte der Faden gern die vierte Oberschwingung ausführen; aber da dies nicht möglich ist, so tritt auch jetzt eine Discontinuität in den Uebergängen ein, indem plötzlich die Form Fig. 13_f herauskommt, welche bei noch weiter fortgesetzter Spannungsverminderung sich in die fünfte Oberschwingung Fig. 13_g verwandelt.

Man wird den Zusammenhang klar übersehen, namentlich auch dann, wenn man nicht, wie es bisher geschah, von der Spannung der Fig. 13_d, sondern gleich von der der Fig. 13_a den Ausgang genommen hätte, und fortwährend eine Spannungsverminderung eingetreten wäre; ebenso wenn man umgekehrt, vom Momente der Fig. 13_g ausgehend, nur eine Spannungsvermehrung hätte eintreten lassen, um rückwärts die Formen bis zur Fig. 13_a hin zu erhalten. Das letztere erweist sich bei den Experimenten als rationeller, weil hierbei die Spannung des Fadens in seinen beiden Hälften viel eher gleichmässig bleibt. Denn bei einer Spannungsvermehrung gestattet der weiche Klebkitt sehr leicht eine Verschiebung des Fadens an σ, Fig. 12, während bei einer Verminderung der Spannung es eher eintritt, dass die linke Hälfte des Fadens stärker gespannt bleibt wie die rechte, und man, um eine Gleichmässigkeit der Spannung herzustellen, öfters nöthig hat, den Faden vom Stift σ erst abzulösen und dann wieder daran zu bringen. Der geschickte Experimentator wird hierbei leicht die zweckmässigsten Manipulationen von selbst erlernen.

5. Es fragt sich weiter, welche Schwingungsformen stehen zu erwarten, wenn wir die Gabel nicht mit dem Mittelpunkte, sondern mit irgend einem anderen Punkte des Fadens in Verbindung bringen? Unsere Fig. 13_d zeigt sofort, dass die betreffende Schwingung, die dritte Partialschwingung, völlig ungeändert bleibt, wenn wir die Gabel nicht in der Mitte, sondern je an einem Sechstel von einem Ende an-

greifend denken. Was für die dritte Partialschwingung gilt, gilt aber ganz allgemein, und besteht das

4. Gesetz: Wenn ein Faden irgend eine Partialschwingung zu geben im Stande ist, so wird diese von einer mit dem Faden unisono schwingenden Gabel eingeleitet, wenn die Gabel in einem Punkte der Fadenlänge angreift, der eine Stelle des Schwingungsmaximums der betreffenden Partialschwingung bildet.

Aber man überzeugt sich sofort, dass die Partialschwingungen nicht blos bei diesen Stellungen der erregenden Gabel, sondern bei unzähligen anderen eingeleitet werden können, nur dürfen diese Stellungen nicht so sein, dass die Gabel an einem Knotenpunkte der betreffenden Partialschwingung angreift. Ferner leuchtet ein, dass auch die Elongationsweite der Gabel und des Fadens wesentlich bestimmende Elemente bilden können. Denn wenn z. B. an irgend einer Stelle der Faden vermöge seiner Spannung nur eine Elongationsweite von 2 mm zuliesse, die Gabel aber eine solche von 6 mm verlangte, so würde die betreffende Partialschwingung unmöglich werden. Wir können daher allgemein aussprechen ein

5. Gesetz, wonach die Partialschwingungen eines Fadens von einer Gabel erregt werden können, wenn diese an irgend einer Stelle der Fadenlänge angreift, die nicht zu nahe mit einem Knoten der herauszubringenden Partialschwingung zusammenfällt.

Gänzlich anders aber fällt die Sache aus, wenn wir nicht Eigenschwingungen, sondern die Uebergangsformen, also z. B. die Formen Fig. $13_{b, c, e \text{ u. } f}$ ins Auge fassen. Diese speciellen, durch die Zeichnung versinnlichten Formen können nur herauskommen, wenn die Gabel in der Mitte des Fadens angreift. Um uns hiervon zu überzeugen, wollen wir einmal annehmen, wir hätten bei der Spannung, welche der in Fig. 13_c gezeichneten Schwingung entspricht, die Gabel in $^1/_7$ der Fadenlänge vom rechten Ende B aus gerechnet, angreifen lassen. Die betreffende Spannung verlangt vor allem zwei Halbwellen gleich $An = Bn_1$, Fig. 13_c. Tragen wir daher

diese Halbwellen als An und $nn_1 = An$ von A nach B hin ab, so kann die jetzt mögliche Schwingungsform des Fadens nur so ausfallen, wie es in der Fig. 14 versinnlicht ist. In ähnlicher Weise wird man schon im voraus die Schwingungsformen übersehen, resp. durch Zeichnungen präcisiren können, welche anstatt der Uebergangsformen Fig. $13_{b, e \text{ u. } f}$ eintreten müssten, wenn die Gabel in $\frac{1}{7}$ von B angriffe. Rückt also die Gabel von der Mitte des Fadens nach einem festen Ende desselben hin, so ändern sich diese Formen im allgemeinen total um, und bestätigt sich das

6. Gesetz: dass, wenn der Angriffspunkt der Gabel nicht mit der Mitte des Fadens zusammenfällt, die Uebergangsformen auch niemals eine Symmetrie zur Mitte zeigen können, sondern hierzu unsymmetrisch sind.

Hieraus ergibt sich aber mit Nothwendigkeit, dass wenn man hintereinander zwei verschieden gelegene Erregungspunkte der Gabel annimmt, die Uebergangsformen, die zwischen zwei benachbarten Eigenschwingungen liegen, streng genommen niemals in derselben Schwingungsform vertreten sein können. Denn ein jeder Erregungspunkt hat seine ganz besonderen Uebergangsformen. Um dies durch Zeichnung noch weiter klar zu machen, wollen wir einmal die Uebergangsformen betrachten, welche eintreten müssen, wenn man den Erregungspunkt so wählte, dass er dahin fiele, wo der Fig. 14 gemäss eine ebensolche Elongationsweite wie $\alpha\beta$ besteht. Es kann dies noch vierfach verschieden geschehen, nämlich a) ein Stückchen rechts von A, b) ein Stückchen links von n, c) ein Stückchen rechts von n und d) ein Stückchen links von n_1. Die Formen der Schwingung, welche hierbei resultiren sind, in Fig $15_{a, b, c, d}$ versinnlicht. Man erkennt hieraus die bemerkenswerthe Thatsache, dass wenn die betreffende Fadenspannung Uebergangsformen verlangt, die hierbei etwa eintretenden völligen Halbwellen unter allen Umständen von einem der festen Endpunkte A oder B aus nach dem inneren Theile des Fadens liegen, und niemals der Fall eintritt, dass etwaige unvollständige Halbwellen an den zwei Endpunkten A und B zugleich oder überhaupt an zwei

getrennten Stellen auftreten, während dies für die vollständigen Halbwellen, wie Fig. 15 documentirt, sehr wohl möglich ist. Hiernach sind wir berechtigt ein

7. Gesetz anzunehmen, welches sagt, dass zwischen zwei benachbarten Eigenschwingungen eines Fadens unzählig viele Uebergangsformen möglich sind, da man die Erregungsstelle in der beliebigsten Weise verändern kann, und jeder Aenderung der Erregungsstelle ein anderes System von Uebergängen in der Fadenschwingung entspricht.

Der electrische Strom als Schwingungserreger.

6. Die Methode, mit Hülfe des electrischen Stromes einen Magneten zu erzeugen, der auf die Zinken einer Stimmgabel einwirkt, und der im Falle die Gabel so armirt ist, dass sie den Strom öffnet und schliesst, zu einem periodischen Magneten wird, und dann die Gabel in anhaltende Schwingungen versetzt, ist längst bekannt. Man pflegt eine solche Einrichtung einen Stimmgabelunterbrecher zu nennen, und findet derselbe mannigfache Anwendung bald auf dem Gebiete der Akustik, bald auf anderen Gebieten. Insbesondere weiss man, dass dieser Unterbrecher eine zweite Stimmgabel, oder auch mehrere Stimmgabeln in Bewegung setzen kann, falls der electrische Strom noch andere Electromagnete erzeugt, die je die Zinken anderer Gabeln bewegen. Soll ein möglichst starkes Mitschwingen von anderen Gabeln erfolgen, so müssen diese bekanntermassen mit ihren Schwingungszahlen das 1, 2, 3... *n*fache von der Schwingungszahl des Stimmgabelunterbrechers bilden.

Anstatt eines Stimmgabelunterbrechers lassen sich auch verschiedene andere Stromunterbrecher herstellen. Zunächst kann man mit Leichtigkeit die Unterbrechungseinrichtung eines gewöhnlichen Inductionsapparates, eines Schlittenapparates oder des Ruhmkorff'schen Apparates benutzen und wird, wenn die Unterbrechung durch eine langsam schwingende Lamelle erfolgt, die Anwendung solcher Apparate da grosse Vortheile gewähren, wo man grosse Elon-

gationsweiten des Unterbrechers und namentlich eine geringe Schwingungszahl haben will, abgesehen davon, dass ein gewöhnlicher Inductionsapparat überall zur Hand ist, während ein Stimmgabelunterbrecher vielleicht schon schwieriger zu beschaffen ist.

Ebenso einfach kann irgend ein anderer schwingender Körper benutzt werden, um einen Stromunterbrecher im Sinne des zuerst bezeichneten Stimmgabelunterbrechers zu bilden. Ein schwingender Metallstab, eine schwingende Metallscheibe, ein cylindrisches Blechgefäss, und namentlich auch eine schwingende Metallsaite können leicht gute Dienste leisten. Ob man hierbei Quecksilber- oder Platincontacte wie bei dem König'schen Vibrationsmikroskop einrichten will, das hängt von den Umständen ab. Jedenfalls bietet der letztere Contact mehrfach gute Dienste da, wo man nicht ein Schwingen in einer verticalen, sondern in irgend einer anderen Richtung, also namentlich auch in einer horizontalen wünscht oder haben muss.

Die Fig. 16 stellt einen Unterbrecher in Form eines Blechcylinders, den wir einfach Cylinder-Unterbrecher nennen wollen, dar. Das cylindrische Blechgefäss B ist 16 cm hoch, bei einem Durchmesser von 14 cm. Rechts oben trägt es ein angekittetes Streichstäbchen s von Glas, und kann das Gefäss, wenn das Streichstäbchen mit nassen Fingern gestrichen wird, dauernd in Schwingungen erhalten werden. Links oben ist ein Platinfaden x angelöthet, der aus einzelnen feinen Platinfäden zusammengedreht wurde. Dieser Platinfaden ragt weiter nach links hin an ein Platinblech v heran, das mit der Schraube h vorwärts und rückwärts verstellt werden kann, um die richtige Berührung von x mit v während des Schwingens von B zu erhalten. E stellt den Stromerreger, die beigezeichneten Pfeile die Stromrichtung dar. Der durch B unterbrochene und hergestellte Strom wendet sich nach dem Electromagnet M und setzt hier in unserem Beispiele eine Stimmgabel D in Bewegung. Um dies zu ermöglichen, muss ein Oberton von B mit dem Tone der Stimmgabel unisono gemacht werden, was sich sehr leicht durch Wasser, das in B hineingegossen wird, erreichen

lässt. Ausserdem könnte der Ton von *B* auch ein Unterton der Gabel sein.

In ähnlicher Weise lässt sich auch ein „Membranresonator“ einrichten. Denn substituirt man dem Unterbrecher *B* der Fig. 16 den Membranapparat des Reis'schen Telephons, und singt in diesen den Ton der Stimmgabel *D* hinein, so kommt die Gabel auch zum Mitschweigen.

7. Die Stärke des Schwingens der Gabel *D* in der Fig. 16 hängt insbesondere von drei Dingen ab. Zunächst offenbar von der Stromstärke; sodann von der Regelmässigkeit, mit welcher der Stromunterbrecher, also in unserer Fig. 6 der Cylinder *B* incl. der Contacteinrichtung functionirt. Das Schwingen von *B* wurde mittels eines Streichstäbchens eingeleitet. Viel regelmässiger aber schwingt der Cylinder, wenn wir ihn auch durch einen Electromagnet in den Gang bringen. Zu dem Ende ist nur nöthig, an die Stelle des Streichstäbchens neben *B* noch einen Electromagnet zu substituiren, der ebenfalls in den Strom eingeschaltet wird. Man erhält auf diese Weise einen selbständigen Cylinderunterbrecher ganz entsprechend einem selbständigen Stimmgabelunterbrecher, wie wir ihn eingangs von 6. offenbar im Auge hatten. Durch Eingiessen von Wasser in *B* kann man den Ton auch jetzt in der leisesten Weise innerhalb gewisser Grenzen reguliren. Das dritte, wovon die Stärke des Mitschwingens des Unterbrechers und des zweiten Körpers, der ebenfalls zum Mitschwingen kommen soll, abhängt, liegt in der Natur der zu verwendenden Electromagnete, und habe ich gefunden, dass ein eigenthümlicher Electromagnet sehr vortheilhaft zu einer Reihe interessanter Experimente verwendet werden kann. Es ist dies der von Romershausen im Jahre 1851 zuerst erfundene Electromagnet.[1]) Auch Zöllner construirte im Jahre 1857 solche Magnete, und berichtete hierüber.[2]) Es muss aber demgemäss bezüglich dieser Entdeckungen Romershausen die Priorität gewahrt bleiben. Ich beschreibe hier den Elec-

1) Die Beschreibung hiervon findet sich in Dingler's Journal **120.** p. 358—362. 1851.

2) Zöllner, Pogg. Ann. **101.** p. 139—148. 1857.

tromagneten, den ich bei den im Folgenden mitgetheilten Experimenten verwendet habe. Fig. 17 stellt ihn im Längsdurchschnitt dar. Ein innerer weicher Eisenkern — schwarz gezeichnet — ist umgeben von einem cylindrischen Eisenmantel — ebenfalls schwarz gezeichnet — und besitzt mit diesem eine Länge von 130 mm; sein Durchmesser beträgt 12 mm, der Durchmesser des ganzen Electromagnets 32 mm, die Dicke des cylindrischen Eisenmantels 3 mm. Um den inneren Eisenkern herum, den Raum zwischen ihm und dem Mantel ziemlich ausfüllend, läuft eine dreifache Drahtwindung, deren Enden unten durch eine Holzplatte — leer gezeichnet — hindurch gehen, um mit der Batterie verbunden zu werden. Der obere Theil des inneren Kernes setzt sich in eine Schraube fort, auf welche sich ein mit einem Loche versehenes Eisenstück — doppeltschraffirt gezeichnet — aufschrauben lässt, um den Magnet auch in geeigneter Weise irgendwo vertical aufhängen zu können. Dieses Eisenstück schraubt sich hierbei auch auf eine Eisenplatte — vertical schraffirt — auf, die ihrerseits durch drei kleine Schräubchen oben auf den Eisenmantel aufgeschraubt ist. Der Kupferdraht der Umwickelung hat einen Durchmesser von 0,7 mm. Will man unten einen Anker anhängen, so kann man die Enden der Drähte seitlich umbiegen, wodurch sie in einen Falz des Eisenmantels hineinkommen, und so der untere Rand des Eisenkernes und des Mantels, in einer Ebene liegend, gestattet, dass eine runde Eisenplatte als Anker zur Anziehung kommt.

8. Dieser Magnet wurde nun zunächst benutzt, um Stahl- oder Eisensaiten in ihre Eigenschwingungen zu versetzen. Als Stromunterbrecher verwendete ich zunächst eine Stimmgabel, deren Zinkenlängen gleich 28 cm bei einer Breite von 14,7 mm und Dicke von 7 mm, und deren Ton durch Laufgewichte verändert werden konnte. Als Apparat mit den aufgespannten Saiten diente mir ein gewöhnliches Monochord, das horizontal auf den Tisch gestellt wurde, ganz in der durch Fig. 12 versinnlichten Manier. Der Electromagnet wurde in verticaler Lage zunächst über der Mitte der Saite durch eine Klammer an einem Statif festgehalten,

sodass seine untere Polfläche etwa 2—4 mm von der Saite abstand. Als Stromgeber fungirten zwei bis sechs Chrom-Tauchelemente. Sobald der Unterbrecher tönte, wurde mittels eines Stimmschlüssels die Saite ins vollständige Unisono mit dem Tone der Gabel gebracht, und sofort sah man, wie die Saite, ihrer ganzen Länge nach eine Halbwelle bildend, in stehende Schwingungen gerieth. Wurde der Ton der Saite so verändert, dass er zum dritten Unterton von dem der Gabel wurde, d. h. so verändert, dass ein Drittel der Saite einen Ton lieferte, der mit der Gabel unisono wurde, so zeigte die ganze Saite unter dem Einflusse des Magnets in schönster Weise drei Halbwellen als dritte Oberschwingungsform. Sollte sie die zweite Oberschwingung mit zwei Halbwellen liefern, so brauchte man nur den Electromagnet aus der Mittelstellung wegzuschieben und ihn über ein Viertel, von einem Ende der Saite aus gerechnet, zu stellen und die Spannung so zu ändern, dass die Hälfte der Saite einen Ton gab, unisono mit der Gabel.

Gestattet es die Saite, dass man ihre Stimmung eine Octave höher wie den Ton der Gabel hinauftreiben kann, so geräht bei der Mittelstellung des Electromagnets die Saite auch wieder in eine stehende Wellenbewegung mit einer Halbwelle, indem jetzt gemäss des Resonanzgesetzes der Saitenton zweiter Oberton vom Tone der Gabel ist. Dass die Saitenschwingungen jetzt nicht so weite sind wie beim Unisono, leuchtet ein. Denn offenbar wird mit der Vergrösserung der Spannung der Saite eine Verminderung der Schwingungsamplituden eintreten müssen, abgesehen davon, dass das Mitschwingen bei höheren Obertönen so wie so schon mehr und mehr schwächer wird.

Es liegt kein Hinderniss vor, die Länge der Eisensaite zu vergrössern, und habe ich Saiten von vier Metern Länge in eine schöne Wellenbewegung versetzt. Um hierbei leichter zum Ziele zu gelangen, muss man den Ton von einem aliquoten Theile der Saite vorher annähernd ermitteln und möglichst genau durch Spannung so reguliren, dass er mit dem Tone des Unterbrechers unisono wird. Die Aufspannung der Saite kann so geschehen, dass man an zwei gegen-

überstehenden Thürgewänden die nöthigen Einrichtungen anbringt, um an einem Ende durch eine Klemme den Draht einzuklemmen und am anderen Ende mittelst eines in einem Holzklötzchen drehbaren Metallwirbels zu spannen. Um nun z. B. die vierte Oberschwingung einzuleiten, halte man, vom Wirbel aus gerechnet, in einem Viertel der ganzen Saite diese zwischen dem Daumen und Zeigefinger der einen Hand fest und prüfe, ob dieses Viertel mit dem Tone des Unterbrechers unisono ist. Wo nicht, so wird durch Umdrehen des Wirbels corrigirt. Auf diese Weise wird man leicht dahin gelangen, die ganze Seite mit zwei, drei, vier Halbwellen schwingen zu sehen, falls der Electromagnet je über ein Schwingungsmaximum einer Halbwelle eingestellt wird, und sich, indem man die Saite beobachtet, aus dem Verhalten der Schwingungsamplituden erkennen lässt, ob die Spannung noch ein wenig zu vermehren oder zu vermindern ist.

9. Es war mir viel daran gelegen, mit Hülfe eines Electromagnets nicht blos Eisen- oder Stahlsaiten, sondern auch Saiten von anderen Metallen und namentlich auch meine Fäden in stehende Transversalwellenbewegungen zu versetzen. Dies ist mir nun sehr gut gelungen, und zwar auf einfache Weise. Dass neben dem Magnet noch irgend ein Eisentheil hierbei mitwirken muss, liegt auf der Hand. Diesen stelle ich her in einem etwa 10—12 mm langen Eisenspiralstückchen, dessen innere Höhlung so beschaffen ist, dass es sich bequem auf eine Kupfersaite oder einen Faden aufziehen und hierauf verschieben lässt. Zu dem Ende wickelt man ein Eisen- oder Stahldrahtstück um einen anderen Draht, dessen Dicke etwa dieselbe ist wie die in Bewegung zu setzende Kupfersaite oder der entsprechende Faden. Fig. 18 versinnlicht diesen Fall unter der Voraussetzung, dass man bei dem Faden die vierte Oberschwingung einleiten will, der zu Folge das Eisenspirälchen und der Electromagnet am einfachsten in einem $\frac{1}{8}$ vom einen festen Endpunkt des Faden an gerechnet, anzubringen ist. Sollte die kleine Spirale schlottern, so kann man an der Stelle, wo sie hinkommt, etwas Klebwachs auf den Faden bringen, mittels dessen man dann die Spirale leicht fest macht. Auf

diese Weise habe ich einen vier Meter langen Faden in schönste stehende Wellen versetzt.

Es leuchtet ein, dass das kleine Eisenspiralstückchen als ein Belastungsgewicht für die Saite oder den Faden anzusehen ist, und dass demgemäss die Halbwellen bei den Oberschwingungen, die ohne Belastung gleich lang ausfallen würden, nunmehr nicht gleiche Länge besitzen. Gegenüber einer einen Meter oder gar vier Meter langen Metallsaite von Kupfer oder Messing, gegenüber einem dickeren Faden — ich verwendete geradezu eine Leinenbaumwollkordel mit einer Dicke gleich 1 mm —, der bei grösserer Länge schon eine beträchtliche Spannung bekommen muss, kann die Belastung durch die kleine Spirale kaum einen bemerkenswerthen Einfluss ausüben, sodass schon feinere Messungen nöthig wären, um eine etwaige Verschiedenheit der Halbwellen zu constatiren.

10. Es wurde oben unter den verschiedenen akustischen Unterbrechern auch der Saitenunterbrecher erwähnt. Derselbe ist zuerst von Eustis im Jahre 1880 in einer bestimmten Form verwendet worden[1]), um die Wellen in einer Quecksilbermasse zu erregen. Die Einrichtung besteht darin, dass man in der Mitte eines horizontal ausgespannten Eisendrahtes eine Platinspitze befestigt, die in ein unter der Saite befindliches Quecksilbergefäss eintaucht. Ueber dem Eisendraht befindet sich ein Electromagnet. Lässt man daher den Strom einer Batterie am einen Ende des Drahtes eintreten, so läuft dieser nach der Platinspitze, von da ins Quecksilber und kann von hier aus den Eisenkern des Magnets umkreisen und zur Batterie zurückgehen. Sofort zieht der Magnet den Eisendraht in die Höhe, der Strom ist unterbrochen, und meistens von selbst schon, ohne dass man die Saite zupft, kommt diese ihrer ganzen Länge nach mit einer Halbwelle in Schwingung. Eustis wollte nur die Wellen im Quecksilber durch den eintauchenden Platindraht hervorrufen, ohne weiter die Wellen des Drahtes im Auge zu haben. Die Methode gestattet auch nicht, den

1) Eustis, Proc. Bost. Soc. (2) 7. p. 218—219. 1880.

Draht in Aliquotschwingungen zu versetzen, sondern nur die Grundschwingung ist es, welche man einleiten kann, diese aber, namentlich mit einem Romershausen'schen Magneten, in sehr hervorragender Weise, indem es mir gelang, einen 0,6 mm dicken und 4 m langen Eisendraht in eine sehr lebhafte Grundschwingung zu versetzen, und zweifle ich nicht, dass noch viel längere und dickere Saiten sich auf die bezeichnete Art zum Schwingen bringen lassen. Es ist auch keineswegs hier und auch bei den oben von mir angewandten Methoden, die Oberschwingungen hervorzurufen, erforderlich, den Electromagnet gerade an der Stelle der entsprechenden Schwingungsmaxima über der Saite zu befestigen; vielmehr kann man denselben auch mehr und mehr nach den Knoten hinrücken.

Ein solcher Saitenunterbrecher eignet sich nun vorzüglich zu einer Reihe von Experimenten, und zwar deshalb, weil man in leichter Weise bei ihm innerhalb der Grenzen, welche die Spannung der Saite zulässt, in den leisesten Abstufungen die Tonhöhe ändern kann, was bei einer Stimmgabel schon umständlicher ist. Ich habe daher auch den Saitenunterbrecher sehr geeignet gefunden, um die Oberschwingungen einer langen Saite hervorzurufen. Zu dem Ende benutze ich als Saite des Unterbrechers eine 1 m lange Saite von derselben Dicke wie die lange Saite, welche in Oberschwingungen versetzt werden soll. Selbstverständlich bedarf man hierzu einen zweiten Electromagnet, und ist die ganze Anordnung aus der schematischen Fig. 19 zu erkennen. Der Strom läuft von der Batterie E aus zunächst nach dem einen Endpunkte a der Unterbrechungssaite ab; von da zur Spitze σ ins darunter stehende Quecksilbernäpfchen, von hier in die Drahtwindung des Electromagnets der Saite ab, von da in die Windung des Magnets über der langen Saite AB und sodann zur Batterie zurück. Ist nun z. B. die Saite ab so gespannt, dass ihr Ton unisono mit dem dritten Oberton von AB stimmt, so wird AB in der schönsten Weise mit drei Halbwellen in Schwingung kommen.

Es versteht sich nach dem unter 9. Mitgetheilten, dass man in gleicher Weise wie den Stahl- oder Eisendraht AB

Fig. 19 auch Fäden in Schwingung bringen kann, falls man diese mit dem kleinen Eisenspirälchen versieht. Man kann also die lange Saite AB Fig. 19 durch einen Faden (Kordel) ersetzen, während die kurze Saite $a b$ sich nicht durch einen Faden verteten lässt, denn man muss ja den Strom durch das Stück $a \sigma$ der Saite leiten können. Recht wohl aber kann man auch den Eisen- oder Stahldraht des Unterbrechers durch einen anderen Metalldraht in Verbindung mit dem Eisenspiralchen verwenden.

11. In vorzüglicher Weise kann nun ein Saitenunterbrecher auch angewendet werden, um andere schwingende Körper, also wie oben cylindrische Blechgefässe, ebene Scheiben von Eisen- oder Stahlblech und namentlich auch Membranen, in stehende Schwingungen zu versetzen. Es könnte hierbei jeder andere Unterbrecher auch dienen; aber da man, wie schon erwähnt, bei einem Saitenunterbrecher sehr leicht den Ton ändern kann, und somit sehr bequem das Unisono mit einem Membranoberton erreicht, so empfiehlt sich die Saite sehr. Es leuchtet ein, dass wenn eine Papiermembran verwendet wird, wiederum ein kleiner Eisentheil nöthig ist. Diesen stelle ich her in Form eines dünnen runden Eisenblechstückchens, das noch nicht so gross wie ein Fünfpfennigstück zu sein braucht. Soll nun die Membran durch den Electromagnet in ihrer Mitte erschüttert werden, so hefte ich das Eisenscheibchen mit Wachskitt in der Mitte der Membran auf. Die Membran muss sich dann leicht richten und namentlich in die richtige Entfernung unter den Magnet bringen lassen. Hierzu eignen sich sehr gut die von mir in meiner „Akustik“[1]) p. 116 beschriebenen Schraubenständer, mittels derer man die Membran bis auf einen Bruchtheil eines Millimeters nähern kann, welche Annäherung bei Membranen allerdings oft nöthig ist. Soll das Erregungscentrum an irgend einer anderen Stelle der Membran liegen, so heftet man das Eisenscheibchen an dieser Stelle fest.

---

1) F. Melde, Akustik: Fundamentalerscheinungen und Gesetze einfach tönender Körper. Leipzig. F. A. Brockhaus.

Aendert man durch Handhabung eines Stimmhammers den Ton des Saitenunterbrechers, so folgt die Membran diesen Aenderungen mit ihren Obertönen nach, aus denen immer einer dann besonders stark hervortritt, wenn für ihn die Saite und die Membran sich im Einklang befinden. Für einen solchen Membranton kann man dann auch durch aufgestreuten Sand die entsprechende Klangfigur erhalten.

Die Schaar der Obertöne der Membran, welche so in wechselnder Folge sich vernehmen lässt, hat grosse Aehnlichkeit mit dem Tönen einer Aeolsharfe. Insbesondere lässt sich der Versuch noch so abändern, dass man die Membran in einem ganz anderen Zimmer, vielleicht ein Stockwerk höher gelegen wie das Zimmer, in welchem der Saitenunterbrecher aufgestellt ist, aufstellt. Lässt man die Töne des letzteren sich änderen, so folgt die Membran diesen Aenderungen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Zusammenstellung schwingender Körper unter Anwendung des electrischen Stromes sich in der Telephonie verwerthen lässt, und hoffe ich, später auf diesen Gegenstand näher eingehen zu können.

VIII. *Ueber die Strömung der Luft durch Röhren von beliebiger Länge; von Paul Hoffmann.*

(Hierzu Taf. V Fig. 1—8.)

Die bisherigen Untersuchungen über die Strömung der Gase haben für zwei specielle Fälle mit der Erfahrung übereinstimmende Gesetze geliefert: das Navier'sche Gesetz[1]) für ganz kurze Röhren und das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz[2]) für sehr lange Röhren. Für die dazwischenliegenden Fälle rechnete man näherungsweise nach dem einen oder anderen Gesetze, besonders hat man für kurze Röhren das Navier'sche Gesetz unter Einführung sogenannter Ausflusscoëfficienten angewendet.[3]) Das Strömungsgesetz der

1) Navier, Mém. de l'Acad. royale des sciences. **9.** p. 336. 1830.
2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **127.** p. 269. 1866 u. **148.** p. 6. 1873.
3) Vgl. Gehler's physik. Wörterbuch. Artikel Pneumatik.

Gase für Röhren von beliebiger Länge ist also noch als eine offene Frage zu betrachten, zu deren Lösung die vorliegende Arbeit versuchen soll, einige Beiträge zu liefern.

§ 1. Aufstellung der Formeln.

a) Erweiterung des Poiseuille-Meyer'schen Gesetzes. — Wenn das erweiterte Poiseuille'sche Gesetz für seine Gültigkeit die Anwendung langer Capillaren fordert, so geschieht dieses deshalb, um eine parallele Strömungsrichtung der einzelnen Gastheilchen voraussetzen zu können. Wir werden demnach, sobald jenes Gesetz nicht mehr anwendbar ist, einen Hauptgrund dafür darin suchen dürfen, das die Theilchen bei ihrem Gange durch die Röhre nicht mehr gerade, sondern wellenartige Linien beschreiben. Am natürlichsten wird nun die Vorstellung sein, dass diese Störungen in der Bewegung hauptsächlich durch die scharfen Ränder am Anfang und Ende der Capillare hervorgerufen werden und auch dort am stärksten sind. Guthrie's[1]) Untersuchungen scheinen dieser Vorstellung zu widersprechen. Guthrie zerschnitt eine Capillare, durch die er unter gewissem treibenden Drucke ein bestimmtes Volumen Luft hatte strömen lassen, in kleine Stücke und fügte diese wieder mit Kautschukschlauch aneinander. Dann stellte er denselben Strömungsversuch wie vorher an und fand dieselbe Transpirationszeit. Hiernach lag es nahe, die Störungen am Anfang und Ende der Capillare zu leugnen. Da mir die Guthrie'schen Versuche nicht ausreichend erschienen, um ein so befremdendes Resultat zu beweisen, stellte ich ähnliche Versuche an. Die Luft strömte, durch festes Kalihydrat von Wasser und Kohlensäure befreit, aus der Atmosphäre in einen leergepumpten Ballon. Die Ablesung geschah, wenn das Quecksilbermanometer am Ballon vom Barometerstande den Unterschied von:

60,47 50,69 40,93 31,10 21,15 11,01 cm

anzeigte.

---

1) Guthrie, Phil. Mag. 5. (5) p. 433. 1878.

Röhre I.

Länge 117,84 cm, 28 Stücke.

	Vor dem Zerschneiden	Nach dem Zerschneiden
Barometer . .	75,26	75,48
Thermometer .	21,8°	19,4°
Zeit	0^m $0{,}0^s$	0^m $0{,}0^s$
„	1 20,0	1 28,0
„	2 48,0	3 3,0
„	4 31,0	4 53,0
„	6 43,0	7 12,5
„	10 11,0	10 47,5

Röhre II.

Länge 87,42 cm, 20 Stücke.

1)	Vor dem Zerschneiden	Nach dem Zerschneiden
Barometer	73,78	74,19
Thermometer	19,1°	18,8°
Zeit	0^m $0{,}0^s$	0^m $0{,}0^s$
„	1 9,0	1 23,75
„	2 24,5	2 54,0
„	3 51,0	4 36,0
„	5 42,5	6 43,0
„	8 36,0	9 52,0

2)	Vor dem Zerschneiden	Nach dem Zerschneiden
Barometer	73,80	74,31
Thermometer	19,2°	18,8°
Zeit	0^m $0{,}0^s$	0^m $0{,}0^s$
„	1 9,5	1 23,5
„	2 24,5	2 53,0
„	3 51,5	4 35,0
„	5 43,0	6 42,0
„	8 36,5	9 51,0

Was die Wiedervereinigung der einzelnen Röhrchen anbetrifft, so wurde über je zwei derselben ein passendes Glasrohr geschoben und eine luftdichte Verbindung mit Siegellack hergestellt. Die Röhrchen berührten sich nicht, sondern liessen zwischen sich etwa 1 mm Zwischenraum; das übergesteckte Glasrohr wurde möglichst mit Siegellack ausgefüllt, um den Raum zwischen den beiden Röhrchen auf ein Minimum zu reduciren, jedoch überzeugte ich mich stets sorgfältig, dass dabei nicht etwa eine Verstopfung der Röhrchen eingetreten war. Die angeführten Resultate scheinen für unsere Vorstellung und gegen Guthrie's Behauptung zu sprechen. Guthrie's Resultat ist nicht ganz falsch, sondern nur als unvollständig zu bezeichnen; es liesse sich vielleicht dadurch erklären, was leider beides aus seiner Arbeit nicht ersichtlich ist, dass er mit nur geringem treibenden Druck gearbeitet, oder dass er die einzelnen Röhrchen dicht aneinander geschoben hat. Hätte er das letztere gethan,

dann hätte die Luft beim Eintritt in die einzelnen Röhrchen nicht dieselbe Bedingung vorgefunden, wie am Anfange des ersten; die Berührungsstellen hätten dann nur den Werth von Sprüngen im Glase gehabt. Wenn wir so schliessen müssen, dass wir am Anfang der Röhre in der That eine stärkere Wirbelbewegung anzunehmen haben, so können wir uns jetzt auch eine Anschauung von den Vorgängen am Ende der Röhre zu machen versuchen. Zu dem Zwecke liess ich Tabaksrauch durch Röhren, natürlich nicht Capillarröhren, strömen und fand, dass zuerst eine kegelförmige Zusammenziehung des austretenden Strahles darauf eine viel stärkere kegelförmige Erweiterung eintrat, in welcher sich heftige Wirbelbewegungen geltend machten. Diese Erweiterungen und die Wirbelbewegungen rückten um so näher an die Austrittsstelle, je schneller die Strömung wurde, und es trat ein Punkt ein, wo die Zusammenziehung des Strahles ganz verschwand, dafür aber die Wirbelbewegungen dicht vor dem Ende der Röhre stattfanden. Diese Resultate sind übrigens übereinstimmend mit denjenigen, welche Sondhaus[1]) bei Oeffnungen in dünner Wand gefunden.

Da wegen der verwickelten Form der für das vorliegende Problem geltenden mathematischen Grundgleichungen[2]) eine strenge Lösung derselben für den vorliegenden Fall kaum zu erwarten ist, so müssen wir uns mit den vorhandenen Wirbelbewegungen auf andere Weise abzufinden versuchen. Wir wollen die Wirbelbewegungen ganz vernachlässigen und ebenfalls wieder geradlinige Strömung annehmen, dafür aber die Störungen am Anfang und Ende der Röhre so berücksichtigen, dass wir den ersten und letzten Querschnitt der Capillare als Oeffnungen in dünner Wand ansehen. Zwischen dem ersten Ballon und dem ersten Querschnitt der Röhre,

---

1) Sondhaus, Pogg. Ann. **85.** p. 58 ff. 1852.

2) Navier, Mém. de l'Acad. de sc. de Paris. **6.** p. 389. 1823. — Poisson, Journ. de l'école polytechnique. **13.** p. 139. 1831. — Stokes, Phil. Trans. Cambridge **8.** p. 287. 1849. — Cauchy, Exerc. de mathém. **3.** p. 183. 1828. — Barré de St. Venant, Compt. rend. **17.** p. 1240. 1843. — Stefan, Wien. Ber. **46.** Abth. II. p. 8. 1862.

ebenso zwischen dem letzten Querschnitt der Röhre und dem zweiten Ballon wenden wir dann das Navier'sche Gesetz[1]), für die Röhre selbst das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz[2]) an. Demnach können wir schreiben:

$$(1) \qquad vp = R^2 \pi \pi_1 \sqrt{C \log \text{nat} \frac{p_1}{\pi_1}},$$

$$(2) \qquad vp = \frac{R^4 \pi g \varrho (\pi_1^2 - \pi_2^2)}{16 \eta l},$$

$$(3) \qquad vp = R^2 \pi p_2 \sqrt{C \log \text{nat} \frac{\pi_2}{p_2}}.$$

Hierin sind:

R der Radius der Capillare,

$\pi = 3{,}1415 \ldots$

p_1 die Höhe einer Quecksilbersäule, welche dem Druck im ersten Ballon das Gleichgewicht hält,

π_1, π_2, p_2 die entsprechenden Grössen für den ersten und letzten Querschnitt der Röhre und den zweiten Ballon,

v das Volumen, welches unter der Druckhöhe p gemessen in der Zeiteinheit durchfliesst,

g die beschleunigende Kraft der Schwere,

ϱ die Dichtigkeit des Quecksilbers,

l die Länge der Röhre,

η die Reibungsconstante der Luft,

$C = \frac{2 g \varrho \, 76 (1 + 0{,}003\,665\, \vartheta)}{0{,}001\,292\,77}$,

wenn ϑ die Temperatur in Graden der hunderttheiligen Scala bedeutet.

Es sei hierbei ausserdem bemerkt, dass sämmtliche Rechnungen im Centimeter-Gramm-Secunden-System durchgeführt sind.

Die obigen drei Gleichungen enthalten drei Unbekannte, und es entsteht die unangenehme Schwierigkeit, diese zu eliminiren, trotzdem zwei Gleichungen transcendent sind. Wir müssen uns wieder einer angenäherten Rechnung bedienen, die allerdings durch die physikalischen Thatsachen gerechtfertigt wird. Aus (1) schliessen wir:

1) Navier, Mém. de l'Acad. royale des sciences. **9.** p. 330. 1830.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **127.** p. 253. 1866.

$$\pi_1 = p_1 e^{-\frac{(vp)^2 p_1^2}{R^4\pi^2 C p_1^2 \pi_1^2}},$$

$$\pi_1 = p_1\left[e^{-\frac{(vp)^2}{R^4\pi^2 C p_1^2}} - 2e^{-\frac{(vp)^2}{R^4\pi^2 C p_1^2}}\frac{(vp)^2}{R^4\pi^2 C p_1^2}\left(\frac{p_1-\pi_1}{p_1}\right) + \ldots\ldots\right].$$

Machen wir die Annahme, dass $(p_1-\pi_1/p_1)^2$ schon verschwindend klein ist, dann dürfen wir die drei Gleichungen auch so schreiben:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \pi_1 = \dfrac{p_1\left[1-\dfrac{2(vp)^2}{R^4\pi^2 C p_1^2}\right]}{\left[e^{\frac{(vp)^2}{R^4\pi^2 C p_1^2}} - \dfrac{2(vp)^2}{R^4\pi^2 C p_1^2}\right]}, & vp = \dfrac{R^4\pi\varrho g(\pi_1^2-\pi_2^2)}{16\eta l}, \\ & \pi_2 = p_2 e^{\frac{(vp)^2}{R^4\pi^2 C p_2^2}}. \end{cases}$$

In π_1 und π_2 ist nun freilich noch das ebenfalls unbekannte (vp) enthalten; die Rechnung lässt sich aber doch verhältnissmässig bequem durchführen, wenn man annehmen kann, dass das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz wenigstens noch einen rohen Näherungswerth von vp liefert. Dann ist nämlich π_1 von p_1 und π_2 von p_2 sehr wenig verschieden, also der Factor von p_1 und p_2 nahezu der Einheit gleich. Für die Berechnung dieser Factoren wird es dann ausreichend sein, einen angenäherten Werth von vp, etwa wie ihn das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz liefert, einzusetzen, um mit Benutzung der so gewonnenen Grössen π_1 und π_2 aus der mittleren der angeführten Formeln einen richtigen Werth von vp zu erhalten. Sollte der so ermittelte Werth noch nicht mit jenem Näherungswerthe genügend übereinstimmen, so wird eine nochmalige Rechnung gewiss das gewünschte Resultat liefern, wenn man jetzt als Näherungswerth einen solchen benutzt, der zwischen dem ersten und dem berechneten Werthe, jedoch ziemlich nahe an diesem liegt. Durch eine grosse Zahl von Berechnungen habe ich mich überzeugt, dass eine einmalige, höchstens zweimalige Rechnung den gewünschten Erfolg hatte; auch zeigte sich dabei, dass in den meisten Fällen auch schon $(p_1 - \pi_1)/p_1$ zu vernachlässigen gewesen wäre.

In den Fällen, in denen unsere Formel nicht mehr anwendbar ist, ist ersichtlich, dass sie einen zu hohen Werth für vp liefern wird. Der Durchgang der Luft durch den

ersten und letzten Querschnitt der Röhre wird nicht so erfolgen, wie ihn das Navier'sche Gesetz verlangt, sondern es wird eine Zusammenziehung des Strahles erfolgen. Wir könnten diese Zusammenziehung allerdings durch Einführung eines Contractionscoëfficienten berücksichtigen, es entsteht dann aber wieder die Ungewissheit, welchen Werth man ihm beilegen soll. Jedenfalls muss er grösser angenommen werden, als für eine Oeffnung in dünner Wand; nur so lässt sich die Thatsache erklären, dass durch ein kurzes Röhrchen eine grössere Menge Luft ausfliesst als durch eine Oeffnung in dünner Wand.[1]) Das Maximum muss man sich dadurch entstehend denken, dass bei wachsender Röhrenlänge das eine Hinderniss, die seitliche Strömung der Lufttheilchen sich vermindert, während das andere, die Reibung, wächst, aber in geringerem Maasse. Welchem Gesetze die Strömung für den Maximalausfluss gehorcht, konnte leider nicht ermittelt werden: die Joule'schen Versuche sind dazu nicht ausreichend, und die Versuche von D'Aubuisson waren mir in ausführlicher Angabe nicht zugänglich.

b) Aufstellung einer empirischen Formel. — Wollen wir aus der im Vorhergehenden aufgestellten Formel eine Formel für veränderliche Strömung ableiten, so liegt es nahe, jene nur auf unendlich kurze Zeit anzuwenden und eine Integration vorzunehmen. Man überzeugt sich jedoch bald, dass diese Integration nur mit sehr grossen Vernachlässigungen ausführbar ist und selbst dann noch zu so verwickelten Formeln führt, dass es besser ist, sich von vornherein nach einer anderen Formel für variable Strömung umzusehen. Tragen wir die Transpirationszeit für ein gewisses Volumen als Ordinate und die zugehörige Länge der Röhre als Abscisse auf, alle übrigen Verhältnisse als gleichbleibend vorausgesetzt, so erhalten wir eine Linie, welche wir etwas näher betrachten wollen. Es liefert das Poi-

1) Joule, Memoirs of the Literary and Phil. Soc. Manchester. **1.** (3) p. 102. 1862. — D'Aubuisson, Ann. des Mines. (1) ? **13.** p. 483. Im Auszug: Ann. de chim. et de phys. **32.** p. 327. 1851 und Gehler's physik. Wörterb. Art. Pneumatik. p. 616—919.

seuille-Meyer'sche Gesetz in unserer Zeichnung eine durch den Anfangspunkt des Coordinatensystemes gehende gerade Linie, der sich unsere Curve asymptotisch nähern muss. Nehmen wir andererseits an, dass für die Länge, bei welcher die Ausflussmenge ihr Maximum erreicht, wieder das Navier'sche Gesetz gilt, so haben wir auch für kleine Längen einen Punkt der Curve bestimmt. Die genannten beiden Angaben sind freilich noch nicht ausreichend, die Curve festzulegen; wir müssen uns jetzt an das Experiment halten. Nehmen wir zunächst an, dass die Curve eine Hyperbel sei, welche den durch das Navier'sche Gesetz bestimmten Punkt zum Scheitelpunkt und jene gerade Linie zur Asymptote hat, so lassen sich die folgenden Beziehungen aufstellen (vgl. Fig. 1). Es sei:

$FJ = T$ die wirkliche Zeit,

$HF = P$ die nach dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetze berechnete Transpirationszeit,

$ED = N/a$ die nach Navier's Gesetz berechnete Effusionszeit,

$AF = l$ die Länge der Röhre,

$AD = l_1$ die Röhrenlänge für den Maximalausfluss,

$CD = t$,

dann ist:

$$\frac{(T-t)^2}{\left(\frac{N}{a}-t^2\right)} - \frac{(l-l_1)^2}{EK^2} = 1,$$

$$(T-t)^2 - (P-t)^2 = \left(\frac{N}{a} - t\right)^2,$$

$$T = t + \sqrt{(P-t)^2 + \left(\frac{N}{a} - t\right)^2}$$

$$(\mathrm{II_a}) \qquad \left\{ T = \frac{Pl_1}{l} + \sqrt{\frac{P^2(l-l_1)^2}{l^2} + \left(\frac{N}{a} - \frac{Gl_1}{l}\right)^2}, \right.$$

oder, wenn l gegen l_1 sehr gross ist:

$$(\mathrm{II_b}) \qquad T = \sqrt{P^2 + \frac{N^2}{a^2}},$$

Wir haben noch zu zeigen, wie die Grössen P, N und a sich ausdrücken. Was zunächst a anbetrifft, so ist diese Grösse der Ausflusscoëfficient des Navier'schen Gesetzes,

für den wir die Zahl Eins angenommen haben, den wir zur Sicherheit aber doch noch einführen wollen. Lassen wir die Luft aus der Atmosphäre in einen leergepumpten Ballon strömen, so ist p_1 constant, p_2 variabel und[1]):

$$P = \frac{8\eta l W_2}{p_1 \pi R^4 g \varrho} \cdot 2{,}3026 \log\left(\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{p_1 - P_2}{p_1 + P_2}\right).$$

Hierin ist W_2 das Volumen des Ballons, P der Werth von p_2 zu Anfang des Versuches, 2,3026 der reciproke Werth des Modulus des decadischen Logarithmensystemes, die übrigen Grössen sind schon erwähnt.[2]) Das Navier'sche Gesetz für constante Strömung gibt[3]):

$$vp = \frac{R^2\pi(p_1+p_2)}{2}\sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1+p_2}},$$

wenn man die Holtzmann'sche Annahme[4]) über den Druck in der Effusionsöffnung einführt. Ist v_2 das in der Zeit t durchfliessende Volumen, gemessen unter dem Druck im Ballon, so ist:

$$v_2 p_2 = t\frac{R^2\pi(p_1+p_2)}{2}\sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1+p_2}},$$

$$p_2\, dv_2 = \frac{R^2\pi(p_1+p_2)}{2}\sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1+p_2}}\, dt.$$

Nun besteht aber nach dem Mariotte'schen Gesetz die Gleichung:

$$(W_2 + dv_2)p_2 = W_2(p_2 + dp_2), \qquad p_2 dv_2 = W_2\, dp_2,$$

also ist:

$$W_2\, dp_2 = \frac{R^2\pi(p_1+p_2)}{2}\sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1+p_2}} \cdot dt,$$

$$\frac{W_2\, dp_2}{\frac{R^2\pi(p_1+p_2)}{2}\sqrt{C \log \text{nat} \frac{2p_1}{p_1+p_2}}} = dt.$$

Durch Integration folgt:

$$t = \frac{4W_2}{R^2\pi\sqrt{C}\cdot 0{,}43429}\left[\sqrt{\log \frac{2p_1}{p_1+P_2}} - \sqrt{\log \frac{2p_1}{p_1+p_2}}\right].$$

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **127.** p. 274. 1866.

2) Diese Abhandlung p. 474.

3) Navier, l. c. p. 4.

4) Holtzmann, Pogg. Ann. **187.** p. 466. 1861; Segnitz, Pogg. Ann. **111.** p. 474. 1860.

Hierin ist 0,43429 der Modulus des Briggs'schen Logarithmensystemes. Die so berechnete Transpirationszeit t bedeutet aber die obige Grösse N, sodass man setzen kann:

$$N = \frac{4 W_2}{R_2 \pi \sqrt{C \cdot 0{,}43429}} \left[\sqrt{\log \frac{2 p_1}{p_1 + P_2}} - \sqrt{\log \frac{2 p_1}{p_1 + p_2}} \right].$$

Durch Versuche, welche später in ihren Einzelheiten mitgetheilt werden sollen, ergab sich, dass die oben erwähnte Curve zwar angenähert, aber doch nicht genau eine Hyperbel ist, sondern eine weniger gekrümmte Verbindungslinie der beiden Grenzpunkte darstellt. Den Versuchen konnte relativ am besten genügt werden, wenn man setzte:

$$T = \sqrt{P^2 + \frac{N^2}{a^2 b^2}}, \tag{III}$$

worin $b = (l + 4) / (2l + 4)$ und a aus der folgenden kleinen Tabelle zu entnehmen ist:

a	0,9338	0,9637	1,0000	1,0000	0,9585
Mittlere Druckdiff.	50,0	41,5	31,0	21,0	11,5.

Wenn es also gestattet ist, aus unseren Versuchen rückwärts auf das Gesetz für den Maximalausfluss zu schliessen, so müssen wir annehmen, dass nach diesem sich die Transpirationszeit durch die Gleichung:

$$t = \frac{N}{a b}$$

ausdrückt, worin die Grössen N, a und b die angegebenen Werthe haben.

Man kann jetzt versuchen, die gewonnene Formel auch auf constante Strömung zu übertragen. Sie nimmt dann die Form an:

$$\frac{1}{(vp)} = \sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{(N_1 a b)^2}}.$$

$$(vp) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{(N_1 a b)^2}}}, \tag{IV}$$

worin vp, a und b die schon erwähnten Bedeutungen haben, und

$$P_1 = \frac{R^4 \pi g \varrho (p_1^2 - p_2^2)}{16 \eta l},$$

$$N_1 = \frac{R^2 \pi (p_1 + p_2)}{2} \sqrt{\frac{C}{0{,}43429} \log \frac{2 p_1}{p_1 + p_2}} \quad \text{ist.}$$

Was die Versuche selbst anbetrifft, so wendete ich drei verschiedene Beobachtungsmethoden an.

§ 2. Beobachtungsmethoden.

1. Beobachtungsmethode, Messung der überströmenden Luft durch Flüssigkeit. — Am einen Ende der Capillare stand die Luft unter dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, während am anderen Ende eine Wasserluftpumpe wirkte. Der benutzte Apparat soll durch Fig. 2 veranschaulicht werden. Den dort gegebenen Anmerkungen mögen nur noch wenige Worte zur Erklärung hinzugefügt werden. Der Druckregulator[1]) am Ballon II wirkt in der bekannten Weise, dass bei zu heftiger Wirkung der Wasserluftpumpe aus der Atmosphäre durch das für jeden Druck einstellbare Rohr *H* und durch das Quecksilber Luft in den Ballon eintritt. Zwischen dem Ballon I und dem *T*-Rohr *L* befindet sich ein Gummischlauch *FG*, an welchem bei *K* eine leicht und schnell wirkende Klemme sitzt. Alles Uebrige dürfte aus der Figur ersichtlich sein. Der Versuch selbst wurde so angestellt: Zunächst wurden die Hähne *A*, *C*, *D* geschlossen, *B* und die Klemme *K* geöffnet, die Wasserluftpumpe wurde in Thätigkeit gesetzt, der Druckregulator, ebenso *L* durch Heben und Senken eingestellt, bis die gewünschten Drucke erreicht waren. Dann wurde der Hahn *B* geschlossen, dafür aber *D* etwas geöffnet, damit für Ballon II keine Aenderung eintrat. Die Klemme *K* wurde geschlossen, die Hähne *A* und *C* geöffnet und durch *A* ein Strom getrockneter und kohlensäurefreier Luft gepresst. Die Folge davon war, dass alle Flüssigkeit durch *C* austrat, welche sich über dem Ende des Rohres genau bis zu diesem heran befand. Wenn dieses erreicht war, wurde *C* geschlossen und durch *A* im Ballon ein Druck erzeugt, der höher war als der gewünschte; dann wurde auch *A* geschlossen. Jetzt wurde gleichzeitig *D* geschlossen und *B* geöffnet. Manometer I fiel natürlich, und sobald der gewünschte und vorher eingestellte Druck erreicht war, wurde die Klemme *K* geöffnet und die Zeit abgelesen. Zum Schlusse des Versuches wurde die Klemme geschlossen und wieder

1) Loth. Meyer, Wied. Ann. 7. p. 506. 1879.

die Zeit abgelesen. Die eingeströmte Flüssigkeit, die ja zugleich das Volumen der ausgeströmten Luft, gemessen unter dem Drucke im Ballon I angab, wurde in der beschriebenen Weise durch C in ein Maassgefäss gebracht. — Was die angewendete Flüssigkeit anbetrifft, so musste eine solche gewählt werden, welche weder Wasser anzog, noch abgab, welche überhaupt keinen Dampfdruck duldete. Dieses leistet eine Mischung von Schwefelsäure mit Wasser, nach Fr. Rüdorff vom specifischen Gewicht 1,300.[1])

In den nachfolgenden Versuchen bedeutet von den neu eingeführten Grössen ϑ_1 und ϑ_2 die Temperatur im ersten und zweiten Ballon, A die Ausflussmenge der Luft, gemessen unter dem Druck im Ballon 1 und bezogen auf eine Zeitsecunde.

1.

A = 2,735 ccm.
R = 0,031 459 3 cm. l = 69,6808 cm.

p_1	p_2	ϑ_1	ϑ_2
78,96	71,61	20,0°	19,4°
78,97	71,60	20,0	19,4
78,90	71,59	19,9	19,8
78,91	71,58	19,9	19,7
78,90	71,58	19,9	19,7

2.

A = 2,739 ccm.
R = 0,031 459 3 cm. l = 60,6808 cm.

p_1	p_2	ϑ_1	ϑ_2
78,94	71,51	20,2°	20,2°
78,95	71,54	20,3	19,8
78,95	71,55	20,3	19,7
78,94	71,52	20,3	19,8
78,94	71,53	20,3	19,7
78,94	71,53	20,2	19,7

3.

A = 2,743 ccm.
R = 0,031 459 3 cm. l = 69,6808 cm.

p_1	p_2	ϑ_2	ϑ_2
78,92	71,51	19,6°	19,2°
78,93	71,53	19,7	19,1
78,92	71,55	19,7	19,2
78,94	71,56	19,6	19,0
78,92	71,56	19,6	19,0
78,94	71,56	19,6	19,0

4.

A = 3,940 ccm.
R = 0,031 459 3 cm. l = 69,6808 cm.

p_1	p_2	ϑ_1	ϑ_2
82,89	71,84	20,6°	20,9°
82,87	71,83	20,6	20,8
82,85	71,83	20,6	20,9
82,84	71,84	20,6	20,8
82,84	71,83	20,6	20,9

5.

A = 3,915 ccm. R = 0,031 459 3 cm. l = 69,6808 cm.

p_1	p_2	ϑ_1	ϑ_2
82,92	71,92	20,2°	20,2°
82,87	71,93	20,2	20,3
82,86	71,91	20,3	20,4
82,86	71,91	20,3	20,5
82,86	71,93	20,3	20,5

1) Rüdorff, Berl. Ber. 13. p. 150. 1880. Vgl. Regnault, Compt. rend. 20. p. 1127. 1845.

Nach dieser Beobachtungsmethode konnten leider nur diese fünf Versuche angestellt werden. Die angewendete Schwefelsäure erwies sich doch noch als concentrirt genug, um Haut und Kleidungsstücke recht unangenehm anzugreifen. Die übrigen bekannten derartigen Stoffe theilten diese Eigenschaft der Schwefelsäure. Einige Versuche, bei denen die Schwefelsäure durch Wasser ersetzt und die Luft vor dem Eintritt in die Capillare wieder getrocknet wurde, ergaben schlecht befriedigende Resultate; auch konnte man dabei, besonders bei einigermassen schneller Strömung nicht sicher sein, dass die strömende Luft wirklich trocken war.

Ehe wir an die Berechnung der Versuche herangehen, wird es nöthig sein, über den Ursprung der benutzten constanten Zahlen zu berichten. Die nachfolgenden Bemerkungen behalten auch für die beiden anderen Beobachtungsmethoden ihre Gültigkeit.

Das specifische Gewicht des Quecksilbers wurde aus den Angaben Regnault's entnommen[1]), als beschleunigende Kraft der Schwere wurde für den Beobachtungsort Breslau die Zahl 981,2 angenommen.[2]) Das specifische Gewicht[3]) der Luft bei 0° und 760 mm Barometerstand, bezogen auf Wasser bei 4° C. wurde zu 0,001 292 77, der Ausdehnungscoëfficient der Luft nach Regnault und Magnus zu 0,003 665 angesetzt.[4]) Als Reibungsconstante der Luft bei 0° wurde der Mittelwerth[5]) 0,000 175 verwendet. Um diese Constante für eine andere Temperatur umzurechnen, wurde die Formel von Puluj[6]) benutzt:

$$\eta = \eta_0 (1 + 0{,}003\,665\,\vartheta)^{0{,}72196}.$$

Der Radius der Capillaren wurde in der bekannten Weise mittelst Quecksilber gemessen und, da ein Fehler im

1) Regnault, Mém. de l'Acad. de Paris. **21.** p. 162 u. 328. 1847.

2) Beling, Zur Theorie der Bifilaraufhängung (Inaug.-Diss.) Bresl. 1881. p. 51. u. 53.

3) Regnault, Mém. de l'Acad. de Paris. **21.** p. 158. 1847.

4) Regnault, Mém. de l'Inst. **21.** p. 3. 1847 und Magnus Pogg. Ann. **55.** p. 1, 57, 177. 1842.

5) O. E. Meyer, Kinet. Theorie d. Gase. p. 140.

6) Puluj, Carl's Repert. **13.** p. 293—330. 1877.

Radius einen erheblichen Einfluss auf das Resultat hat, auf diese Messung sehr grosse Sorgfalt verwendet.

Selbstverständlich ist es, dass sämmtliche benutzte Instrumente mit Normalinstrumenten verglichen wurden.

In den angeführten Tabellen ist unter Pois. die Poiseuille-Meyer'sche Formel, unter den übrigen Zeichen die betreffende Formel der vorliegenden Abhandlung zu verstehen. Berechnet wurde nach diesen Formeln jedesmal die Grösse (vp).

	Pois.	Formel I	Formel IV	Beobachtet
1.	219,64	216,75	214,82	215,88
2.	221,94	219,57	217,01	216,18
3.	221,47	219,13	216,56	216,50
4.	339,02	330,21	327,63	326,44
5.	337,38	331,98	326,06	324,42

2. Beobachtungsmethode, Messung der überströmenden Luft durch eine lange Capillare. — Das Princip dieser Methode bestand darin, dass dieselbe Masse Luft zuerst durch eine lange Capillare gepresst wurde und dann durch die zu prüfende Capillare. Von der langen Capillare hatte ich mich vorher überzeugt, dass sie dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetze genügte. Um nicht genöthigt zu sein, (vgl. Fig. 3) im Ballon II und III denselben Druck zu haben, wurde zwischen beiden ein Druckregulator eingeschaltet, der sich durch Zugiessen und Ablassen des Quecksilbers einstellen liess. Die getrocknete und kohlensäurefreie Luft trat bei A in den Apparat und verfolgte den durch Pfeile bezeichneten Weg.

Um der gehörigen Einstellung der vier Manometer sicher zu sein, wurde vom Beginn des Versuches bis zur ersten verwendeten Ablesung mindestens 45 bis 60 Minuten gewartet und zwischen je zwei Ablesungen ebenfalls ein grösserer Zeitraum gelassen. Die Dimensionen der verwendeten Capillaren waren:

Maasscapillare $R = 0{,}026\,657$ cm. $l = 154{,}0938$ cm.
Capillare $R = 0{,}026\,343$ cm. l variabel.

Es bedeutet ϑ_1 und ϑ_2 die Temperatur im Ballon I und II, ϑ_3 die Temperatur der äusseren Luft.

1.

Maasscapillare				Capillare			
p_1	p_2	ϑ_1	ϑ_2	l	p_3	p_4	ϑ_3
72,23	28,09	18,2	18,1	5,943	27,33	28,09	18,1
			2.				
73,78	47,27	21,6	21,8	5,943	46,81	45,20	21,6
			3.				
72,78	60,75	22,7	22,4	5,943	60,44	59,86	22,6
			4.				
71,70	30,48	23,7	23,3	11,42	29,80	23,30	23,7
			5.				
72,51	43,59	24,0	23,6	11,42	43,06	39,79	23,8
			6.				
73,39	61,03	23,1	22,7	11,42	60,69	59,57	22,9
			7.				
72,53	36,84	32,3	22,7	22,95	36,26	26,42	22,9
			8.				
72,51	59,92	23,3	22,8	22,95	59,60	57,39	23,0
			9.				
72,30	66,32	22,8	22,1	22,95	66,07	65,06	22,3
			10.				
72,12	38,10	22,8	22,5	35,92	37,53	22,05	22,5
			11.				
72,04	48,74	23,1	22,9	35,92	48,33	40,56	22,9
			12.				
73,42	69,09	22,8	22,8	35,92	68,85	67,74	22,8
			13.				
72,72	46,66	22,3	22,1	51,23	46,22	32,38	22,1
			14.				
72,73	58,32	21,4	21,4	51,23	57,99	52,00	21,3
			15.				
72,77	67,44	21,2	21,0	51,23	67,18	65,21	21,0
			16.				
73,46	49,86	21,9	21,8	65,12	49,44	33,72	22,0
			17.				
73,53	68,15	20,9	20,6	65,12	67,88	65,34	20,9
			18.				
72,98	52,22	20,4	20,3	65,12	51,84	39,06	20,5
			19.				
71,82	58,61	20,1	20,0	80,04	58,31	49,67	20,0

Es bleibt noch zu zeigen, dass die als Maasscapillare benutzte Röhre wirklich dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetze genügte. Zu diesem Zwecke wurden zwei Versuche

mit constantem p_1 und variablem p_2 angestellt; setzen wir für den Augenblick:

$$\frac{\log\left(\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}\frac{p_1 - P_2}{p_1 + P_2}\right)}{p_1 t} = \frac{1}{C}\,^{1}),$$

so ergeben sich die Versuche, wenn man immer p_1/C aus je zwei benachbarten Versuchen berechnet, folgendermassen.

Temperatur 18,6°					Temperatur 18,3°				
		Zeit					Zeit		
p_1	p_2	Min.	Sec.	$10^6 \frac{p_1}{C}$	p_1	p_2	Min.	Sec.	$10^6 \frac{p_1}{C}$
75,36	14,98	0	0,0	—	75,37	14,93	0	0,0	—
6	24,69	2	0,0	1009	7	24,70	2	0,5	1006
6	34,45	4	12,0	10	7	34,46	4	12,5	10
5	44,27	6	47,0	9	8	44,30	6	47,5	11
5	54,21	10	7,5	8	8	54,24	10	8,0	8
5	64,35	15	24,0	00	8	64,38	15	25,5	997

Ausser den angeführten Versuchen wurde nach der zweiten Beobachtungsmethode noch eine andere Reihe von Versuchen angestellt. Bei denselben war nämlich die Maasscapillare durch eine kurze Capillare ersetzt worden, welche dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz nicht mehr genügt. Da auf diese Weise keine absolute Messung, sondern nur eine Vergleichung des Volumens der durchgeströmten Luft möglich war, so sollen diese Versuche[2]) als weniger wichtig hier nicht mitgetheilt werden.

Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der Versuchsreihe der zweiten Beobachtungsmethode, also der Versuche 1 bis 19 auf p. 484.

	Poiseuille	Formel I	Formel IV	Beobachtet
1.	246,74	218,68	207,85	206,67
2.	169,45	155,45	150,29	148,44
3.	79,60	76,31	75,09	74,14
4.	204,31	193,28	185,77	193,75
5.	159,32	153,33	149,54	154,36
6.	79,88	78,03	76,98	76,57
7.	181,97	177,33	172,94	179,85
8.	76,28	74,42	74,72	76,65
9.	39,14	38,90	38,72	38,26

1) Vgl. O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 274. 1866.

2) Siehe P. Hoffmann, Inaug.-Diss., Beitr. zu dem Thema: Ueber d. Ström. d. Luft durch Capill. von belieb. Länge. Bresl. 1883. p. 20.

	Poiseuille	Formel I	Formel IV	Beobachtet
10.	174,04	171,27	168,54	172,95
11.	130,17	128,60	127,03	129,66
12.	28,60	28,52	28,45	28,45
13.	144,08	142,74	141,16	143,64
14.	87,45	86,97	86,41	87,33
15.	34,65	34,55	34,28	34,61
16.	136,32	135,36	134,37	134,77
17.	35,39	35,33	35,25	35,26
18.	121,62	120,86	120,10	120,26
19.	81,24	80,83	80,64	80,02

3. Beobachtungsmethode, variable Strömung. — Die Luft strömte, von Wasser und Kohlensäure befreit, durch die Capillare in einen luftleer gepumpten Ballon. Der Inhalt des Ballons betrug nach mehrfacher Messung $W_2 = 10950$ ccm. Der zum Ballon führende Hahn hatte eine Bohrung von 1,3 cm Länge und 0,15 cm Radius. Durch den Hahn allein füllte sich der Ballon, vorher luftleer wie bei den Versuchen, in acht Secunden. Bei der für diese Versuche benutzten Capillare wurde der mittlere Radius für jede Länge besonders bestimmt.

Bei jedem Versuch ist die Reibungsconstante der Luft berechnet, wie sie sich aus dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz[1]) ergibt:

$$\eta = \frac{p_1 \pi g \varrho R^4}{8 W_2 l} \cdot \frac{0{,}43429\, t}{\log\left(\frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{p_1 - P_2}{p_1 + P_2}\right)},$$

und zwar nach der Formel von Puluj[2]) auf 0^0 reducirt. Der Werth von η_0 ist immer aus zwei benachbarten Beobachtungen hergeleitet. ϑ_1 bedeutet die Temperatur der Luft in der Atmosphäre, ϑ_2 die der Luft im Ballon. Für jede Länge der Röhre sind drei Versuche angestellt worden, die jedoch eine so gute Uebereinstimmung zeigten, dass die Mittheilung je eines derselben genügend erschien.

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. **127.** p. 274. 1866.
2) Puluj, l. c. vgl. diese Abhdl. p. 482.

1.

$l = 1{,}3283$. $R = 0{,}023\,813$.

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η
75,13	20,28	2	15	16,25	15,7°	15,2°	
3	29,84	—	16	15,00	7	8	0,001 706
3	39,46	—	17	15,25	7	16,0	1 538
3	49,08	—	18	18,50	7	3	1 356
3	58,66	—	19	31,75	7	3	1 130
3	68,32	—	21	10,00	7	4	0 859

2.

$l = 1{,}8442$. $R = 0{,}023\,813$.

74,92	20,07	2	18	48,00	16,0°	15,6°	
2	29,63	—	19	50,50	0	16,0	0,001 301
2	39,25	—	20	54,50	0	3	1 171
2	48,87	—	22	53,25	1	5	1 040
2	58,45	—	23	21,00	1	6	0 872
2	68,11	—	25	26,00	1	6	0 659

3.

$l = 3{,}3425$. $R = 0{,}023\,813$.

74,88	20,03	12	40	49,75	15,6°	15,5°	
8	29,59	—	41	59,75	6	8	0,000 804
8	39,21	—	43	11,75	6	16,1	727
8	48,84	—	44	29,25	7	2	647
8	58,42	—	45	57,00	7	4	544
8	68,08	—	47	57,50	7	3	417

4.

$l = 5{,}738$. $R = 0{,}023\,813$.

74,36	19,50	12	52	24,25	15,0°	14,6°	
6	29,02	—	53	46,25	14,9	15,0	0,000 546
6	38,66	—	55	11,75	9	4	499
6	48,28	—	56	48,50	9	5	444
7	57,88	—	58	28,00	9	6	374
7	67,55	1	0	54,50	8	5	294

5.

$l = 10{,}341$. $R = 0{,}023\,813$.

73,80	18,94	2	7	16,25	14,9°	14,9°	
0	28,46	—	8	53,50	9	15,0	0,000 355
0	38,10	—	10	35,50	9	6	327
0	47,72	—	12	26,00	9	6	294
0	57,31	—	14	37,00	9	6	258
0	66,98	—	17	57,00	15,0	6	221

6.

$l = 15{,}795$. $R = 0{,}023\,813$.

73,38	18,51	2	29	36,25	14,1°	13,4°	
9	28,04	—	31	31,00	1	8	0,000 273
9	37,68	—	33	31,50	0	9	251
9	47,31	—	35	46,00	0	14,0	233
9	56,90	—	38	32,50	0	1	214
40	66,58	—	43	5,50	0	13,9	197

7.

$l = 21{,}061$. $R = 0{,}023\,820$.

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η_0
73,39	18,52	11	47	4,0	14,2°	13,4°	
9	28,04	—	49	16,0	2	8	0,000 236
9	37,68	—	51	38,0	1	9	223
9	47,31	—	54	19,0	2	14,1	209
9	56,90	—	57	43,0	0	1	197
9	66,57	12	3	25,0	0	0	185

8.

$l = 26{,}820$. $R = 0{,}023\,818$.

73,79	18,90	12	56	19,5	13,3°	12,9°	
9	28,43	—	58	58,0	4	13,5	0,000 217
8	38,05	1	1	39,5	5	6	207
7	47,65	—	4	52,0	5	8	199
6	57,25	—	8	58,0	6	9	188
5	66,92	—	16	0,0	7	8	181

9.

$l = 32{,}678$. $R = 0{,}023\,808$.

74,72	19,86	1	22	16,5	15,1°	14,3°	
2	29,38	—	25	9,0	2	6	0,000 203
1	39,01	—	28	17,5	2	9	194
1	48,63	—	31	58,5	0	15,2	189
1	58,22	—	36	47,0	0	1	182
69	67,87	—	45	9,5	0	0	178

10.

$l = 37{,}905$. $R = 0{,}023\,795$.

75,11	20,25	2	7	49,5	15,4°	14,9°	
2	29,78	—	11	2,0	4	15,4	0,000 196
2	39,42	—	14	34,0	4	6	189
2	49,04	—	18	44,5	4	8	185
2	58,63	—	24	18,0	4	7	180
3	68,31	—	33	50,0	4	5	176

11.

$l = 42{,}981$. $R = 0{,}023\,788$.

74,90	20,05	1	50	3,0	15,7°	15,3°	
0	29,61	—	53	36,0	8	9	0,000 189
0	39,23	—	57	33,0	8	16,1	185
0	48,85	2	2	13,0	8	2	181
0	58,43	—	8	22,0	8	1	177
0	68,09	—	19	15,0	8	0	175

12.

$l = 54{,}110$. $R = 0{,}023\,785$.

73,81	18,96	2	20	42,0	16,2°	16,2°	
1	28,52	—	25	2,0	2	5	0,000 179
0	38,13	—	29	51,5	3	8	176
0	47,75	—	35	37,5	3	8	174
0	57,33	—	43	15,0	2	6	171
79	66,98	—	56	50,0	2	4	171

13.

$l = 58{,}985$. $R = 0{,}053\,793$.

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η
74,08	19,24	1	57	3,0	15,8°	15,2°	
8	28,75	2	1	41,0	8	5	0,000 180
8	38,40	—	6	52,5	8	8	176
8	48,02	—	13	2,5	9	8	174
8	57,60	—	21	16,0	8	8	173
7	67,26	—	35	54,0	8	5	171

14.

$l = 62{,}184$. $R = 0{,}023\,804$.

73,75	18,91	12	28	15,0	15,8°	14,3°	
6	28,43	—	33	14,0	9	9	0,000 181
6	38,07	—	38	48,0	9	15,2	177
6	47,70	—	45	28,5	9	3	176
7	57,29	—	54	20,0	8	4	173
7	66.95	1	10	9,0	9	3	174

15.

$l = 65{,}820$. $R = 0{,}023\,816$.

73,45	18,59	12	33	31,0	14,7°	13,8°	
5	28,11	—	38	45,0	7	14,8	0,000 181
5	37,75	-	44	35,5	6	4	177
5	47,37	—	51	34,0	7	5	175
5	56,96	1	0	52,0	7	5	173
5	66,63	—	17	25,0	9	4	178

16.

$l = 68{,}389$. $R = 0{,}023\,822$.

74,21	19,34	11	56	36,0	14,3°	13,5°	
20	28,85	12	1	57,0	1	14,1	0,000 180
20	38,49	—	7	56,0	2	4	176
18	48,10	—	15	7,0	3	5	175
17	57,68	—	24	42,0	4	5	178
15	67,33	-	41	45,0	5	5	173

17.

$l = 71{,}245$. $R = 0{,}023\,826$.

74,02	19,17	12	10	57,0	15,3°	14,9°	
3	28,70	—	16	35,0	4	15,4	0,000 180
2	38,33	—	22	52,0	3	8	176
3	47,96	—	30	23,5	3	8	175
3	57,54	—	40	27,0	3	8	174
2	67,20	—	58	19,0	4	7	173

18.

$l = 74{,}639$. $R = 0{,}023\,835$.

74,63	19,74	1	13	54,5	13,1°	13,0°	—
4	29,28	—	19	36,5	12,9	3	0,000 177
3	38,90	—	26	2,0	8	5	176
2	48,50	—	33	40,0	13,0	5	173
1	58,10	—	43	59,0	1	4	173
1	67,78	2	2	13,0	2	5	171

19.

$l = 81{,}828$. $R = 0{,}023\,846$.

p_1	p_2	h	m.	sec.	ϑ_1	ϑ_2	η
74,28	19,39	11	39	18,5	13,1°	12,8°	—
8	28,92	—	45	24,5	0	13,3	0,000 175
9	38,56	—	52	22,0	0	5	173
80	48,18	12	0	44,0	1	5	172
3	57,82	—	11	54,5	2	5	170
6	67,53	—	31	47,0	3	4	169

20.

$l = 86{,}050$. $R = 0{,}023\,851$.

78,86	19,00	1	19	56,0	15,0°	14,9°	—
	28,53	—	26	29,0	14,7	15,1	0,000 174
7	38,17	—	33	55,0	9	2	173
7	47,79	—	42	47,5	9	2	172
6	57,37	—	54	40,0	7	1	170
5	67,03	2	15	47,0	7	14,9	170

In der jetzt folgenden Berechnung der soeben angeführten Versuche ist als Reibungsconstante bei 0° der Werth 0,000 168 benutzt, weil diese Zahl ungefähr als Grenzwerth aus den Versuchen selbst hervorgeht. Die Tabellen enthalten die Transpirationszeiten, in Secunden angegeben, wie sie direct beobachtet wurden, und ausserdem, wie sie aus dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz aus unserer Formel (III) (p. 479) folgen.

1.			2.			3.		
Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.
5,79	60,91	58,75	8,10	64,51	62,50	14,63	72,36	70,00
6,58	61,71	60,25	9,18	65,36	64,00	16,63	73,56	72,00
7,96	64,09	64,25	11,10	67,97	68,75	20,14	77,00	77,50
10,74	72,96	72,25	14,97	77,56	77,75	27,12	88,51	87,75
19,21	100,59	98,25	26,77	107,47	105,00	48,50	124,31	120,50
4.			5.			6.		
23,99	81,23	78,00	45,97	96,30	97,25	70,72	112,27	114,75
28,82	84,02	85,50	52,47	100,78	102,00	80,58	121,11	120,50
34,74	88,64	91,75	63,21	108,79	110,50	97,09	134,74	134,50
46,92	103,87	104,50	85,20	132,09	131,00	128,28	166,31	166,50
83,70	151,70	146,50	152,13	205,13	200,00	233,30	274,54	273,00
7.			8.			9.		
94,12	131,02	132,00	118,74	150,41	153,50	142,77	169,85	172,50
107,24	141,65	142,00	135,26	164,42	166,50	163,13	188,04	188,50
129,34	160,84	161,00	162,73	195,49	192,50	196,93	219,38	221,00
174,06	205,02	204,00	220,01	245,90	246,00	265,70	287,56	288,50
310,16	343,64	342,00	392,37	420,02	422,00	473,78	496,93	502,50

10.			11.			12.		
Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.
164,92	188,97	192,50	188,89	210,64	213,00	243,55	261,47	260,00
188,51	210,56	212,00	214,80	234,59	237,00	276,73	292,90	289,50
227,55	247,36	250,50	259,75	277,51	280,00	331,87	346,44	346,00
307,23	326,40	328,50	350,33	367,45	369,00	449,49	463,41	457,50
549,73	570,06	577,00	626,39	644,48	653,00	801,31	815,95	815,00

13.			14.			15.		
259,30	276,06	278,00	277,88	293,81	299,00	292,15	307,53	314,00
296,81	312,09	311,50	317,88	332,34	334,00	333,24	347,23	350,50
357,44	371,05	370,00	382,49	395,40	400,50	401,20	413,64	418,50
480,40	493,48	493,50	514,85	527,24	531,50	540,58	552,51	558,00
860,52	874,24	878,00	918,14	931,14	949,00	964,99	977,51	993,00

16.			17.			18.		
299,95	314,66	321,00	315,23	329,38	338,00	323,99	337,74	342,00
342,87	356,25	359,00	359,26	372,09	377,00	368,80	381,24	385,50
413,11	425,01	431,00	433,83	445,26	451,50	444,85	455,92	458,00
557,27	568,68	575,00	583,73	594,67	603,50	602,07	612,71	619,00
994,87	1006,83	1023,00	1042,76	1054,24	1072,00	1075,66	1086,84	1094,00

19.			20.		
Pois.	F. III	beob.	Pois.	F. III	beob.
355,96	368,65	371,00	379,94	391,93	393,00
406,14	417,65	417,50	433,21	444,07	446,00
489,19	499,42	502,00	518,85	528,56	532,50
663,40	673,25	670,50	703,00	712,23	712,50
1183,30	1193,67	1192,50	1254,30	1263,96	1267,00

Um unsere Formel auch auf frühere Versuche anzuwenden, mögen z. B. einige nach der dritten Beobachtungsmethode angestellte Versuche [1]) von Graham berechnet werden. Berechnet man dieselben nach der Poiseuille-Meyer'schen Formel, so erhält man nach Hrn. Prof. O. E. Meyer [2]) folgende Tabelle:

$2R = 0{,}00539$ engl. Zoll.

	$l = 1$ Zoll	$l = 2$ Zoll	$l = 4$ Zoll.
Luft	$\eta = 0{,}000\,206$	$\eta = 0{,}000\,177$	$\eta = 0{,}000\,178$
Sauerstoff . .	0,000 216	0,000 197	0,000 199.

Für $l = 1$ Zoll genügt die Röhre dem Poiseuille-Meyer'schen Gesetz nicht mehr; unsere Formel III liefert die Zahlen:

0,000 177, 0,000 197,

also ein hinreichend befriedigendes Resultat.

1) Graham, Phil. Trans. 1846. Tab. 14, 15, 16.

2) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 127. p. 365. 1866.

§ 3. Kurze Betrachtung der Resultate.

Besonders bei den Versuchen mit constanter Strömung[1]) scheint sich in unseren Zahlenreihen für mittlere Längen der Röhre ein deutliches Minimum geltend zu machen. In meiner Inauguraldissertation habe ich gezeigt, dass diese Abweichung durch Beobachtungsfehler zu erklären ist. Um den Einfluss derselben anschaulich zu machen, mag hier das folgende Beispiel dienen. Bei dem Versuche 5 auf p. 481 strömten in 1012,0 Secunden 3961,8 ccm über, woraus die Zahl 3,915 erhalten wurde; nehmen wir an, dass in 1011,0 Secunden 3977,9 ccm überströmten, so geht die bezügliche auf p. 483 verzeichnete Zahl 324,42 in 326,06 über.

So haben wir gezeigt, dass unsere Formel im allgemeinen das richtige Resultat innerhalb der Beobachtungsfehler liefert, doch soll nicht geleugnet werden, dass das erwähnte Minimum immerhin auffällig bleibt.

§ 4. Bemerkungen über die Strömung des Wassers durch Röhren und Schluss.

Unsere in der vorliegenden Abhandlung entwickelten Ansichten werden noch dadurch unterstützt, dass für die Strömung des Wassers durch Röhren ähnliche Resultate gefunden sind. Beginnen wir mit Jacobson's Versuchen.[2]) Jacobson hat nachgewiesen, „dass an der Einflussöffnung der Druck plötzlich sinkt", und wenn auch gegen seine numerische Bestimmung des neuen Druckes einiges Bedenken möglich ist, so ist doch das nachgewiesen, was auch wir aus unseren Versuchen über Luft entgegen der Guthrie'schen Ansicht behaupten mussten.

Unsere empirische Formel für die Strömung der Luft findet sich im wesentlichen bei der Strömung des Wassers wieder. Die für diese von Hrn. Prof. O. E. Meyer hergeleitete Formel[3]):

$$t = \alpha + \beta\lambda - \gamma\lambda^2,$$

1) vgl. P. Hoffmann l. c. p. 31.

2) Jacobson, Müller's Arch. f. Anat. u. Physiol. 1860. 1861. p. 304.

3) O. E. Müller, Pogg. Ann. Jubelband p. 1. 1874.

worin t die Transpirationszeit, λ die Röhrenlänge und α, β, γ, constante Zahlen sind, liefert bei ihrer graphischen Darstellung „schräg ansteigende, fast geradlinige Curven". Auch unsere Formel ergibt ja solche Curven, dabei zeigt sich aber ein allerdings wegen der Kleinheit der betreffenden Glieder sehr unwesentlicher Unterschied. Es ist nämlich:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = -2\gamma,$$

also eine negative Grösse, mithin ist jene Curve nach unten concav, während unsere Curve nach unten convex ist; denn schreiben wir unsere Formel kurz für den Augenblick:

$$t = \sqrt{m^2 + n^2 l^2},$$

so ist:

$$\frac{d^2t}{dl^2} = \frac{n^2}{l^2}\left(1 - \frac{n^2 l^2}{t^2}\right),$$

also da $t^2 > n^2 l^2$ ist, d^2t/dl^2 eine positive Grösse. — Es mag schliesslich noch für unseren Zweck eine Arbeit von Houba[1]) erwähnt werden. Houba ist auch der Ansicht[2]), dass ein Hauptgewicht auf die Vorgänge am Anfang und Ende der Röhre zu legen sei; am Anfang der Röhre wendet er das Toricelli'sche Gesetz, in der Mitte das Poiseuille'sche, aber nicht unter Verwendung der ganzen Röhrenlänge an; die Vorgänge am Ende vernachlässigt er dann, führt aber im Toricelli'schen Gesetz den Ausflusscoëfficienten ein. Wenn auch zugegeben werden muss, dass diese Anschauung der Wirklichkeit ziemlich nahe kommen mag, so bleibt doch noch immer die sehr grosse Schwierigkeit, die richtige Länge und den richtigen Ausflusscoëfficienten zu finden. Houba führt ferner eine Formel an[3]), welche einige Aehnlichkeit mit unserer empirischen Formel hat; schreiben wir sie mit unseren Bezeichnungen, so lautet sie:

$$t = \frac{N}{a} + \frac{P}{l}(l - l_0),$$

1) Houba, Over de strooming van vloeistoffen door buizen. Nijmegen 1883.

2) Houba, l. c. p. 95.

3) Houba, l. c. p. 98.

wenn l_0 die Wirbelstrecke am Anfang der Röhre bedeutet. Welcher Werth dem l_0 beizulegen, weiss Houba allerdings nicht anzugeben, jedenfalls muss er l_c als abhängig von l annehmen, denn sonst kann sein Gesetz nicht für sehr kleine und sehr grosse Längen in die dann geltenden Gesetze übergehen. Ein Vergleich mit unserer Formel:

$$t = \sqrt{\left(\frac{N}{ab}\right)^2 + P^2},$$

welche die beiden Grenzfälle in sich enthält, würde ergeben:

$$l_0 = l - \frac{l}{P}\left(\sqrt{\left(\frac{N}{ab}\right)^2 + P^2} - \frac{N}{a}\right).$$

Fassen wir die gewonnenen Resultate noch einmal kurz zusammen, so können wir sie in den folgenden beiden Sätzen aussprechen.

1) Wenn für eine Röhre das Poiseuille-Meyer'sche Gesetz nicht mehr gilt, so ist der Hauptgrund dafür in den Vorgängen am Ende und besonders am Anfange der Röhre zu suchen.

2) Trägt man die Transpirationszeiten für eine beliebige Luftmenge, bei beständiger oder veränderlicher Strömung, als Ordinaten, die zugehörigen Röhrenlängen als Abscissen auf, so ergeben sich schräg ansteigende, fast geradlinige Curven, die sich in der Mitte halten zwischen einer Geraden und einer Hyperbel.

Indem ich die vorliegende Arbeit einer nachsichtigen Beurtheilung empfehle, schliesse ich dieselbe mit dem Ausdruck des herzlichen Dankes für meinen hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. O. E. Meyer, der mich jederzeit bereitwilligst mit seinem Rathe unterstützte. Ebenso ist es mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Dr. O. Schumann an dieser Stelle für seine vielfache freundliche Hülfe öffentlich bestens zu danken.

IX. *Ueber die Verdichtung der Kohlensäure an blanken Glasflächen; von H. Kayser.*

(Hierzu Taf. V Fig. 4.)

Im 20. Bande dieser Annalen, p. 545—560, findet sich unter obiger Ueberschrift eine Abhandlung von Bunsen, deren Resultate sowohl den früheren Beobachtungen von Chappuis und mir, als auch unseren sonstigen Kenntnissen in Bezug auf das Verhalten der Gase zu Glasflächen widerstreiten.

Bunsen findet nämlich, dass die Verdichtung der Kohlensäure an einer grossen, mittelst Glasfäden hergestellten Oberfläche nach Verlauf von drei Jahren noch nicht vollendet sei, — im ersten Jahre verschwanden 43 ccm, im zweiten 15 ccm, im dritten 12 ccm; weiter findet er, „dass mit steigender Temperatur eine Beschleunigung, mit abnehmender eine Verzögerung der Gasverdichtung erfolgt," und „dass bei instantanen und allmählichen Druck- und Temperaturänderungen eine bemerkbare Loslösung der an der Glasoberfläche verdichteten Kohlensäure nicht stattfindet".

Nun sind die längst bekannten und stets mit Erfolg angewandten Mittel, um an den Wänden verdichtete Gase zu beseitigen, Temperaturerhöhung und Luftverdünnung; von diesen würde nach Bunsen's Resultaten das erstere die verdichtete Gasmasse geradezu vermehren, das zweite ohne Einfluss sein. Dieser Widerspruch gegen die Erfahrung scheint mir zu zeigen, dass der in der Behandlung der Gase so gewiegte und berühmte Verfasser in seiner Versuchsanordnung eine Fehlerquelle übersehen haben muss.

Die Erklärung derselben ergab sich mir leicht, da ich bei meinen Arbeiten anfangs durch denselben Fehler genug getäuscht worden war: im Bunsen'schen Apparate waren Schliffstücke mit Fettdichtungen vorhanden. Ich habe früher[1]) bemerkt, dass durch dieselben „Diffusion mit ins Spiel kommt, sodass man scheinbar enorme Adsorption erhält", — genau der Fall, der bei Bunsen eingetreten ist.

1) H. Kayser, Wied. Ann. **14.** p. 458. 1881.

Die Erklärung der Bunsen'schen Resultate wird also folgende sein: Die Luft im Zimmer war von der Kohlensäure im Apparate durch Fettschichten getrennt. Das Fett absorbirt einerseits Luft, andererseits Kohlensäure; beide Gase werden durch die Fettschicht hindurchgeführt und auf der anderen Seite abgegeben. Es muss also Luft in den Apparat gelangen, andererseits Kohlensäure aus dem Apparat herausgehen. Man muss annehmen, dass der herausgehende Strom von Kohlensäure stärker ist, als der Strom der eintretenden Luft; dann wird dauernd der Gasinhalt des Apparates abnehmen, und dies sieht so aus, als ob die Gasverdichtung lange Zeit fortdauerte.

Dränge gar keine Luft ein, so würde der austretende Kohlensäurestrom — abgesehen von der dabei eintretenden Druckverminderung und ihrem Einfluss — von unveränderter Stärke bleiben; dringt wenig Luft ein, sodass innen die Kohlensäure noch sehr lange die Luft überwiegt, so wird der austretende Strom sehr langsam schwächer werden und erst nach unendlich langer Zeit aufhören, nämlich, wenn innen gar keine Kohlensäure mehr vorhanden ist.

So erklärt es sich, dass bei Bunsen im zweiten Jahre noch 15 ccm verschwanden, im dritten Jahre 12 ccm; nur waren diese Gasmengen nicht an den Wänden verdichtet, sondern diffundirt.

Um diese Erklärung experimentell zu beweisen, habe ich einen Apparat construirt, welcher den Fehler des Bunsen'schen absichtlich in weit höherem Grade besass; er hat die in Fig. 4 skizzirte Form. *A* ist ein Kreuz aus 30 mm weiten Glasröhren, von welchem drei Arme durch aufgeschliffene Glasplatten verschlossen sind. Zur Dichtung wurde sehr hartes Fett — wie es auch Bunsen benutzt hat — angewandt. An den vierten Arm ist ein enges, in Millimeter getheiltes Glasrohr *B* mit seitlich angeschmolzenem Hahn *C* angeblasen, welches in ein Gefäss mit Quecksilber taucht und zur Druckmessung dient. Der Apparat hielt, luftler gepumpt, völlig dicht. Unmittelbar daneben stand ein zweiter ähnlicher Apparat von etwa gleichem Volumen, aber vollkommen zugeschmolzen. Beide Apparate wurden durch sechsmaliges

Auspumpen und Einlassen von trockner Kohlensäure mit diesem Gase gefüllt und dann sich selbst überlassen. An dem Kreuze *A* war ein in 0,1 Grade getheiltes Thermometer befestigt. Es wurde in Zwischenräumen von einigen Tagen die Temperatur, der Barometerstand und der Stand des Quecksilbers in *B* abgelesen. Das Volumen des Apparates war vorher bestimmt, ebenso das Rohr *B* kalibrirt worden, sodass sich die im Apparat vorhandene Gasmasse, reducirt auf 0° und 760 mm Druck, berechnen liess. Die innere Glasfläche des mit Fett gedichteten Apparates betrug etwa 332 qcm, sodass von einer messbaren Gasverdichtung daran nicht die Rede sein kann; oder mindestens hätte dieselbe in beiden Gefässen nahezu gleich gross sein müssen.

Ich gebe im Nachstehenden die Tabelle für den Apparat mit Fettdichtung:

Datum	Temp.	Druck	Volumen	Gasmenge
30. December 1883	13,4	728,1	121,317	110,73
3. Januar 1884	16,3	731,1	121,436	110,17
7. „ „	16,5	729,8	121,593	110,03
12. „ „	19,5	735,8	121,619	109,81
16. „ „	19,7	735,8	121,510	109,64
21. „ „	16,9	727,1	121,405	109,31
25. „ „	19,4	731,6	121,546	109,16
29. „ „	18,5	728,6	121,504	109,02
2. Februar „	19,6	729,6	121,557	108,80
10. „ „	18,9	726,0	121,480	108,45
15. „ „	20,8	730,5	121,353	108,29

Hier bedeutet die dritte Columne den Druck, unter dem das Gas bei der Ablesung im Apparate stand, also die Barometerhöhe minus der Quecksilbersäule in *B*; die vierte Columne gibt das vom Gase eingenommene Volumen, die letzte endlich die vorhandene Gasmenge reducirt auf 0° und 760 mm Quecksilberdruck.

Aus dem Apparate mit Fettdichtung sind also sehr erhebliche Gasmengen verschwunden. In dem zugeschmolzenen Apparate dagegen hat sich in derselben Zeit die Gasmenge absolut nicht verändert.

Dadurch ist zweifellos erwiesen, dass die Fettschichten

an dem dauernden Verschwinden des Gases schuld sind, und dass die von Bunsen zur Erklärung seiner Resultate aufgestellte Hypothese, das Gas dringe unter grosser Reibung langsam in das Glas ein, unnöthig ist.

Aus diesem Grunde hat sich auch in meinen früheren Versuchen in ganz zugeschmolzenen Apparaten stets ein Maximum der Adsorption gezeigt, und zwar meist in sehr kurzer Zeit, wie ich es dort angegeben habe.[1]) Wenn Bunsen seinen Vorgängern auf diesem Gebiete der Untersuchung vorwirft[2]), sie hätten sich von dem Eintreten eines Maximums nicht überzeugt, sondern es ohne weiteres angenommen, so muss ich darauf erwidern, dass ich bei nicht publicirten Vorversuchen zur Verdichtung der Gase an Glas auch speciell für Kohlensäure ein sehr rasches Eintreten der Maximalverdichtung habe constatiren können, sodass mindestens 99% der Verdichtung in der ersten Stunde nach Zulassen des Gases vollendet sind, in der zweiten Stunde manchmal noch eine kleine Verdichtung bemerkbar ist, während in den folgenden drei bis vier Tagen keinerlei messbare Aenderung mehr auftritt.

Ich habe schliesslich das im Apparat am 15. Febr. befindliche Gas analysirt und gefunden, dass von den 108,29 ccm 0,37 ccm Luft waren, der Rest Kohlensäure. Es sind demnach in den 47 Tagen, welche der Versuch dauerte, 2,44 + 0,37 = 2,81 ccm Kohlensäure durch die Fettschichten hinausgegangen, während nur 0,37 ccm Luft eingedrungen sind. Das Fett als Scheidewand zwischen Luft und CO_2 verhält sich also ebenso wie Kautschuk nach den Beobachtungen Wroblewski's.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man aus Bunsen's Resultaten folgern kann, dass die Diffusion der Kohlensäure mit steigender Temperatur zunimmt, vom Drucke aber nur in geringem Grade beeinflusst wird. Meine Versuche scheinen den Temperatureinfluss zu bestätigen, doch genügen sie — da die Temperatur des Zimmers fortwährend erheblich schwankte — nicht, um hier sicher zu entscheiden.

Berlin, Februar 1884.

1) H. Kayser, Wied. Ann. **12.** p. 536. 1881 u. **15.** p. 624. 1882.
2) R. Bunsen, Wied. Ann. **20.** p. 556. 1883.

X. *Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen; von Max Planck.*

(Hierzu Taf. V Fig. 5.)

Einleitung.

Die Gesetze der stationären Bewegung einer incompressibeln nichtreibenden Flüssigkeit, welche zum Theil von festen Wänden, zum Theil von ruhender Flüssigkeit begrenzt ist, sind zuerst von H. v. Helmholtz[1]) aus den allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen entwickelt und auf specielle Arten von Bewegungen angewandt worden. Diese Beispiele der Strahlenbildung hat später G. Kirchhoff[2]) noch erheblich vermehrt, indem derselbe mittelst der Methode der ähnlichen Abbildung eine Reihe von hierher gehörigen Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen kennen lehrte, — Lösungen, welche meines Wissens bisher die einzigen auf diesem Gebiete geblieben sind.

So fruchtbar sich indess die erwähnte Methode auf dem ihr zustehenden Gebiete erweist, so ist ihre Anwendung doch auf eine ganz specielle Classe von Flüssigkeitsstrahlen beschränkt, nämlich auf solche, bei denen die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen nur von zwei rechtwinkligen Coordinaten x und y, nicht aber von der dritten z abhängt. Eine weitere Ausbildung dieser Methode behufs der Darstellung allgemeinerer Bewegungen lässt sich aber aus dem natürlichen Grunde nicht erwarten, weil der Grundsatz, auf den sie basirt ist, die Lösung der Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential durch complexe Grössen, sich principiell nur für Functionen von zwei Variabeln verwerthen lässt, da ja für die Bedeutung, welche die complexen Grössen für die Ebene haben, kein Analogon für den Raum von drei Dimensionen existirt.

Im nachfolgenden Aufsatze beabsichtige ich eine Methode zur Auffindung der Bewegung einer Strahlen bilden-

1) v. Helmholtz, Berl. Monatsber. 1868. p. 215.

2) G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik, 1877. p. 291.

den Flüssigkeit mitzutheilen, deren Anwendung sich nicht gerade wesentlich auf Functionen von x und y allein beschränkt. Allerdings muss ich gleich hier am Anfang bemerken, dass es mir bis jetzt nicht gelungen ist, Fälle allgemeinerer Bewegungen aufzufinden, als die, welche der Behandlung durch die Methode der ähnlichen Abbildung bereits zugänglich sind; indess scheint mir doch der Umstand, dass das anzugebende Verfahren, abgesehen von seiner Leistungsfähigkeit auf schon bekannten Gebieten, wenigstens Aussicht hat, einmal auf allgemeinere Fälle übertragen zu werden, seine Mittheilung an dieser Stelle zu motiviren.

Wir fügen zunächst den gleich am Eingang erwähnten beschränkenden Annahmen noch die hinzu, dass auf die Massentheile der Flüssigkeit keinerlei Kräfte aus der Ferne wirken, und dass ein einwerthiges Geschwindigkeitspotential φ existirt. Dann ist zur vollständigen Darstellung einer Flüssigkeitsbewegung stets nothwendig und hinreichend, dass φ als Function der Raumcoordinaten bekannt ist.

§ 1. Fixirung der Aufgabe.

Wir nehmen an, das Geschwindigkeitspotential φ hänge nur von x und y, nicht aber von z ab, wodurch die Gleichung der Continuität sich reducirt auf:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Dann ist die Bewegung aller Flüssigkeitspunkte, die auf einer zur XY-Ebene senkrechten Geraden liegen, die nämliche.

Zu dieser Gleichung, die im ganzen Innern der Flüssigkeit gilt, treten noch die Grenzbedingungen, die wir nun festsetzen wollen. Das Gebiet der Flüssigkeit, das bis ins Unendliche reichen kann, sei im Endlichen begrenzt theils durch feste Wände, theils durch ruhende Flüssigkeit, in welcher ein constanter Druck herrscht. Diese (in dem betrachteten Falle cylindrischen) Grenzflächen der Flüssigkeit setzen sich jedenfalls zusammen aus Stromlinien; ihre Gleichungen sind also von der Form: $\psi = \text{const.}$, wenn ψ

eine Function von x und y bezeichnet, die im ganzen Innern der Gleichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \tag{2}$$

genügt; denn diese Gleichung sagt aus, dass die Bewegungsrichtung jedes Flüssigkeitspunktes in einer Fläche $\psi = \text{const.}$ liegt.

Für die Theile der Grenzflächen, welche an ruhende Flüssigkeit grenzen, oder mit anderen Worten: für die freie Oberfläche des Strahles gilt, da in ihr der Druck constant ist, nach der allgemeinen Relation zwischen Druck und Geschwindigkeit die Bedingung, dass in ihr die Grösse der Geschwindigkeit constant ist; wir setzen daher für sie:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=1 \tag{3}$$

und nehmen zugleich an, dass überall im Innern der Flüssigkeit der Druck grösser ist, als an der freien Oberfläche, woraus folgt, dass die Geschwindigkeit dort überall kleiner als Eins ist. Bezeichnet also $\psi=\psi_0$ eine bestimmte Grenzfläche, so muss für den Theil derselben, welcher der Oberfläche des Strahles entspricht, zugleich die Gleichung (3) erfüllt sein, während für den anderen Theil, welcher als feste Wand auftritt, keine weitere Bedingung zu befriedigen ist. Hieraus ergeben sich die erforderlichen Grenzbedingungen.

Jede Function φ, welche der Gleichung (1) genügt und ausserdem die Eigenschaft hat, dass für die Werthenpaare von x und y, welche die Bedingung (3) erfüllen, die durch (2) bestimmte Function ψ einen constanten Werth ψ_0 annimmt, entspricht einer Flüssigkeitsbewegung mit Strahlenbildung. Hierbei bezeichnet dann $\psi=\psi_0$ eine Grenzfläche der Flüssigkeit, welche in allen den Punkten, deren Coordinaten zugleich die Gleichung (3) befriedigen, die freie Oberfläche des Strahles bildet, in ihren übrigen Theilen aber als feste Wand zu denken ist.

Die Schwierigkeit, Lösungen dieser Aufgabe zu finden, liegt wesentlich in der Erfüllung der Grenzbedingungen; daher sollen zunächst diese letzteren durch geeignete Transformationen in eine einfachere Form gebracht werden. Zuvor

wollen wir jedoch die beiden Gleichungen (1) und (2) noch auf eine etwas andere Form bringen. Es ist klar, dass durch zwei Functionen φ und ψ, die folgende Relationen eingehen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4}$$

sowohl (1) als auch (2) befriedigt wird; wir brauchen daher für das Innere der Flüssigkeit nur diese letzten beiden Gleichungen zu befriedigen, und wollen sie ihrer grösseren Einfachheit wegen an die Stelle der obigen setzen.

§ 2. Einführung der unabhängigen Variabeln φ und ψ.

Indem wir zunächst statt der rechtwinkligen Coordinaten x und y die durch die Gleichungen (4) bestimmten Functionen φ und ψ als unabhängige Variable einführen, bedienen wir uns der allgemeinen Transformationsformeln, welche die Verhältnisse ergeben:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial x} : \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial \psi} : \left(-\frac{\partial x}{\partial \psi}\right) : \left(-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) : \frac{\partial x}{\partial \varphi}. \tag{5}$$

Dadurch erhalten wir für das Innere der Flüssigkeit aus (4) die Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{\partial y}{\partial \psi} \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \psi}. \tag{6}$$

Auch die Grenzbedingungen stellen sich wieder unter einer ganz ähnlichen Form dar. Da φ und ψ nach (2) orthogonal sind in Bezug auf x und y, so haben wir für das Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit allgemein:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2}. \tag{7}$$

Die Grösse $(\partial x/\partial \varphi)^2 + (\partial y/\partial \varphi)^2$ variirt also nach unseren Festsetzungen über die Geschwindigkeit im Innern der Flüssigkeit zwischen 1 und ∞, sie wird an der Oberfläche des Strahles $= 1$, und die Grenzbedingungen erfordern, dass diesem speciellen Werth ein constanter Werth ψ_0 von ψ entspricht. Um diese Bedingung schliesslich auf ihre einfachste Form zu bringen, führen wir alle Gleichungen noch einmal auf zwei neue unabhängige Variable zurück.

§ 3. Einführung der unabhängigen Variabeln λ und μ. Vereinfachung der Grenzbedingungen.

Wir definiren die beiden neuen Variabeln λ und μ vollständig, indem wir setzen:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{\lambda} \cos \mu, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{\lambda} \sin \mu, \tag{8}$$

mit der näheren Bestimmung, dass μ zwischen 0 und 2π liegt. Daraus folgt:

$$e^{2\lambda} = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

und, mit Hülfe von (5) und (4):

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}.$$

Es ist also nach (7) e^{λ} der reciproke Werth der Grösse der Geschwindigkeit, weshalb λ zwischen 0 und ∞ variirt, während der Winkel μ die Richtung der Strömung bezeichnet, wenn sein Werth von der Richtung der positiven X-Axe an gegen die der positiven Y-Axe hin als positiv gezählt wird. Aus (6) und (8) folgt zunächst:

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = -e^{\lambda} \cos \mu, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = e^{\lambda} \sin \mu. \tag{9}$$

Differenziiren wir diese beiden Gleichungen nach φ, dagegen die Gleichungen (8) nach ψ und setzen jedesmal die beiden Ausdrücke für $\partial^2 y / \partial \varphi \, \partial \psi$, resp. $\partial^2 x / \partial \varphi \, \partial \psi$ einander gleich, so erhalten wir mit Weglassung des Factors e^{λ} auf beiden Seiten:

$$-\cos \mu \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \sin \mu \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \sin \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} + \cos \mu \frac{\partial \mu}{\partial \psi}$$

$$\sin \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \cos \mu \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \cos \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} - \sin \mu \frac{\partial \mu}{\partial \psi}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \mu}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} = \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}$$

oder, wenn wir schliesslich zu den unabhängigen Variabeln λ und μ übergehen, ganz ebenso, wie oben die Gleichungen (6) aus (4) erhalten wurden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \tag{10}$$

und mit Elimination von φ:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mu^2} = 0. \tag{11}$$

Die Grenzbedingungen erfordern jetzt, dass für einen Theil der Grenzfläche $\psi = \psi_0$ $\lambda = 0$ ist; denn dem letzteren Werth entspricht die Grösse Eins der Geschwindigkeit.

Unsere Aufgabe ist also jetzt auf folgende einfachere reducirt. Bestimmt man eine Function ψ von λ und μ aus der Gleichung (11) derart, dass für $\lambda = 0$ ψ einen constanten Werth ψ_0 annimmt, dann stellt die Gleichung $\psi = \psi_0$ eine Grenzfläche der Flüssigkeit dar, welche überall da, wo sie zugleich der Bedingung $\lambda = 0$ genügt, die freie Oberfläche des Strahles bildet, während sie im übrigen als feste Wand auftritt.

Ist eine solche Function ψ gefunden, so lässt sich daraus zunächst φ mittelst der Gleichungen (10) durch einfache Quadratur als Function von λ und μ berechnen, und endlich auch x und y als Functionen der nämlichen Variabeln aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda},$$

oder mit Hülfe von (8), (9) und (10):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} = e^{\lambda} \cdot \left\{ -\cos\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \mu} + \sin\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\} \cdot \\ \text{Ebenso:} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu} = e^{\lambda} \cdot \left\{ \sin\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \mu} + \cos\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\} \end{array} \right. \tag{12}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} = e^{\lambda} \cdot \left\{ -\sin\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \mu} - \cos\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\} = -\dfrac{\partial x}{\partial \mu} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \mu} = e^{\lambda} \cdot \left\{ -\cos\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \mu} + \sin\mu \dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right\} = \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \end{array} \right. \tag{13}$$

Hierdurch ist natürlich auch φ als Function von x und y bestimmt und somit die Aufgabe vollständig gelöst.

§ 4. Erfüllung der Grenzbedingungen. Fall einer ebenen Wand.

Die Anwendbarkeit der im letzten Paragraph erhaltenen Gleichungen zur Auffindung von Strahlenbewegungen soll im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden.

Den Grenzbedingungen wird unter anderem genügt, wenn wir annehmen, dass ψ von einem einzigen Argument abhängig ist, welches die Form eines Productes $l.m$ hat, wo l und m gewisse Functionen von λ und μ sind, und zugleich für $l=0$ $\lambda=0$ wird. Denn dann ist ψ von der Form: $\psi(l.m)$ und für $\lambda=0$ hat man: $\psi=\psi(0)=\text{const.}$, eine Grenzfläche der Flüssigkeit. Diese Fläche zerfällt, wie man sieht, in die beiden Theile $l=0$ und $m=0$; der erste ist, weil für ihn $\lambda=0$, die freie Oberfläche des Strahles, der zweite dagegen ist feste Wand.

Wir wollen nur den speciellen Fall weiter verfolgen, dass l nur von λ, m nur von μ abhängt; in diesem Falle wird die feste Wand dargestellt durch eine Ebene (natürlich senkrecht auf der XY-Ebene); denn die Gleichung der festen Wand: $m=0$, führt dann zur Bedingung: $\mu=\text{const.}$, in welcher ausgesprochen ist, dass die Richtung der Strömung an allen Punkten der Wand die nämliche ist.

Um nun Integrale der Gleichung (11) zu finden, die den angenommenen Beschränkungen genügen, denken wir uns in diese Gleichung für ψ den Werth $\psi(l.m)$ eingesetzt und zugleich statt λ und μ die Grössen l und m als unabhängige Variable eingeführt. Bezeichnen wir zur Abkürzung die Differentialquotienten von ψ nach seinem Argument $(l.m)$ mit ψ' und ψ'', und analog die von λ und μ nach ihren Argumenten l und m mit λ' und μ', so wird die Gleichung (11):

$$\frac{m}{\lambda'}\cdot\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\psi'}{\lambda'}\right)+\frac{l}{\mu'}\cdot\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\psi'}{\mu'}\right)=0.$$

Die einzige zu erfüllende Grenzbedingung ist die, dass für $l=0$ $\lambda=0$ wird.

Setzen wir endlich noch:

$$\frac{1}{\lambda'}=L \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu'}=M, \tag{14}$$

so wird: $$mL\cdot\frac{\partial}{\partial l}(\psi'.L)+lM\cdot\frac{\partial}{\partial m}(\psi'.M)=0,$$

oder: $$\psi' \cdot \left(mL\frac{\partial L}{\partial l} + lM\frac{\partial M}{\partial m} \right) + \psi'' \cdot (m^2L^2 + l^2M^2) = 0 .$$

Daraus:

$$\frac{mL\frac{\partial L}{\partial l} + lM\frac{\partial M}{\partial m}}{m^2L^2 + l^2M^2} = -\frac{\psi''}{\psi'} = f(l.m). \tag{15}$$

Kann man also zwei Functionen L und M von l und m derart finden, dass die linke Seite der letzten Gleichung die Form $f(l.m)$ annimmt, so lässt sich daraus ψ als Function von $l.m$ berechnen. Dabei ist wesentlich, dass L und M gar keinen besonderen Grenzbedingungen zu genügen brauchen, denn λ kann aus L nach (14) durch geeignete Wahl der Integrationsconstante immer so bestimmt werden, dass für $l = 0$, $\lambda = 0$ wird.

Es entspricht also jede Lösung der letzten Differentialgleichung einer Flüssigkeitsbewegung von der gesuchten Art.

§ 5. Specielle Lösungen.

Es ist leicht, einfache Lösungen der Gleichung (15) zu finden. Schon die einfachste unter ihnen:

$$mL\frac{\partial L}{\partial l} + lM\frac{\partial M}{\partial m} = 0,$$

entspricht interessanten Flüssigkeitsbewegungen. Eine andere Lösung ist z. B.:

$$L = \frac{1-l^2}{c}, \qquad M = \frac{1+m^2}{c}, \tag{16}$$

wobei c constant. Setzt man nämlich diese Werthe in (15) ein, so ergibt sich:

$$\frac{2lm}{1+l^2m^2} = -\frac{\psi''}{\psi'} = f(l.m).$$

Daraus:

$$\psi' = \frac{1}{1+l^2m^2},$$

indem wir über die Integrationsconstante willkürlich verfügen. Endlich:

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}(lm), \tag{17}$$

wobei wir zur eindeutigen Bestimmung von ψ festsetzen wollen, dass ψ zwischen 0 und π liegt.

Aus den Werthen von L und M in (16) lässt sich ferner der Zusammenhang der Grössen λ, μ mit l und m berechnen.

Wir erhalten nämlich durch Einsetzung dieser Werthe in (14):

$$\lambda' = \frac{c}{1-l^2}, \qquad \mu' = \frac{c}{1+m^2},$$

also: $$\lambda = \frac{c}{2}\log\frac{1+l}{1-l}, \qquad \mu = c\,.\,\mathrm{arc\,tg}\,m\,.$$

Hierbei ist für $l = 0$, wie es sein muss, $\lambda = 0$, während wir in dem Ausdruck für μ über die Integrationsconstante willkürlich verfügt haben. Ausserdem wollen wir festsetzen, dass der arc zwischen 0 und π zu nehmen ist. Dann liegt μ zwischen 0 und $c.\pi$. Daraus ergibt sich schliesslich:

$$l = \frac{e^{\frac{2\lambda}{c}} - 1}{e^{\frac{2\lambda}{c}} + 1}, \qquad m = \mathrm{tg}\,\frac{\mu}{c},$$

und durch Substitution in (17):

$$\psi = \mathrm{arc\,tg}\left\{\frac{e^{\frac{2\lambda}{c}} - 1}{e^{\frac{2\lambda}{c}} + 1}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\mu}{c}\right\}$$

zwischen 0 und π zu nehmen. Nachdem ψ als Function von λ und μ bekannt ist, hat man noch nach den Gleichungen (10), (12) und (13) φ, x und y als Functionen der nämlichen Variabeln zu berechnen.

Für $c = 2$ (μ zwischen 0 und 2π) erhält man hieraus die zuerst von v. Helmholtz[1]) untersuchte Bewegung, bei der die Flüssigkeit aus einem unbegrenzten Becken in einen durch zwei parallele feste Ebenen begrenzten Canal hineinströmt.

Für $c = 1$ (μ zwischen 0 und π) ergibt sich der von Kirchhoff[2]) ausführlicher besprochene Fall des Ausflusses aus einer Oeffnung in einer ebenen Wand, die sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckt. Diesen letzteren Fall wollen wir hier noch etwas weiter verfolgen.

§ 6. Oeffnung in ebener Wand.

Setzen wir in dem letzten Ausdruck von ψ $c = 1$, so ergibt sich:

1) v. Helmholtz, l. c. p. 226.
2) G. Kirchhoff, l. c. p. 296.

$$(18) \qquad \psi = \operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{e^{2\lambda}-1}{e^{2\lambda}+1}\cdot \operatorname{tg}\mu\right\},$$

und durch Differentiation:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = \frac{2e^{2\lambda}\sin 2\mu}{e^{4\lambda}+2e^{2\lambda}\cos 2\mu+1}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{e^{4\lambda}-1}{e^{4\lambda}+2e^{2\lambda}\cos 2\mu+1},$$

und hieraus folgt nach (10) durch Integration:

$$\varphi = \lambda - \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{4\lambda}+2e^{2\lambda}\cos 2\mu+1}{4},$$

indem wir für $\lambda = 0$ und $\mu = 0$, $\varphi = 0$ annehmen. Für x und y endlich ergibt sich aus (12) und (13):

$$x = -e^{\lambda}\cos\mu - \operatorname{arc\,tg}\frac{2e^{\lambda}\cos\mu}{e^{2\lambda}-1}.$$

Hierbei ist, damit x für $\mu = \pi/2$ stetig bleibt, der arc zwischen $+\pi/2$ und $-\pi/2$ zu nehmen. Dann ist für $\mu = \pi/2$, $x = 0$. Ferner:

$$y = -e^{\lambda}\sin\mu + \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{2\lambda}+2e^{\lambda}\sin\mu+1}{e^{2\lambda}-2e^{\lambda}\sin\mu+1}.$$

Hierbei ist für $\mu = 0$, $y = 0$ angenommen.

Durch diese Gleichungen sind φ und ψ in ihrer Abhängigkeit von x und y bestimmt, und somit ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten.

Die hierdurch dargestellte Bewegung ist in Fig. 5 schematisch veranschaulicht. Die Flüssigkeit strömt von der Seite der negativen y aus der Unendlichkeit her mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 gegen die X-Axe hin, die in ihrer ganzen Ausdehnung als feste Wand zu denken ist, mit Ausnahme einer einzigen Oeffnung, die sich von $x = -\pi/2 - 1$ bis $x = +\pi/2 + 1$ erstreckt. Durch diese Oeffnung strömt die Flüssigkeit in einem Strahle aus, dessen Breite schnell abnimmt und sich asymptotisch dem Werthe π nähert. Im allgemeinen lassen sich, da die unabhängigen Variabeln λ und μ beide eine bestimmte mechanische Bedeutung haben, die charakteristischen Eigenschaften der Bewegung aus den obigen Gleichungen unschwer ermitteln.

Die Grenzen der Flüssigkeit werden dargestellt durch die Flächen $\psi = 0$ und $\psi = \pi$, deren jede, wie man aus dem Ausdruck (18) für ψ unmittelbar erkennt, in die beiden

Theile: $\lambda = 0$ und $\operatorname{tg}\mu = 0$ zerfällt. Während die letztere dieser Bedingungen den beiden Stücken der X-Axe entspricht, welche als feste Wand auftreten: ($\mu = 0$ oder $\mu = \pi$, d. h. Strömungsrichtung parallel der positiven oder der negativen X-Axe) liefert die erste ($\lambda = 0$, d. h. Strömungsgeschwindigkeit = 1) die Gleichungen der freien Oberfläche des Strahles. Nehmen wir beispielsweise $\lambda = 0$ und $\mu < \pi/2$ an, so erhalten wir den auf der Seite der negativen x gelegenen Theil dieser freien Oberfläche. Hierfür ist nach den obigen Gleichungen:

$$\psi = 0, \qquad \varphi = -\log\cos\mu,$$
$$x = -\cos\mu - \frac{\pi}{2}, \qquad y = -\sin\mu + \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\mu}{1-\sin\mu}.$$

Durch Elimination von μ würde man aus den beiden letzten Gleichungen die Gleichung der freien Grenze in x und y erhalten. Drückt man x und y anstatt durch μ, durch φ aus, mittelst der drittletzten Gleichung, so erhält man:

$$x = -e^{-\varphi} - \frac{\pi}{2}, \qquad y = -\sqrt{1-e^{-2\varphi}} + \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-e^{-2\varphi}}}{1-\sqrt{1-e^{-2\varphi}}},$$

wobei die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, da $\sin\mu > 0$.

Diese Gleichungen sind, bis auf unwesentliche Abweichungen, die auf der Bezeichnung beruhen, identisch mit den Kirchhoff'schen Gleichungen für den nämlichen Fall.

München, Januar 1884.

XI. *Die Bestimmung der Schallstärken des Schallpendels; von K. Vierordt.*

Zur Erregung von Schallen und Tönen von innerhalb breiter Grenzen veränderlicher Stärke kann, ausser schwingungsfähigen Platten, die durch Fallkugeln in tönende Schwingungen versetzt werden, auch das Schallpendel als sehr bequemer Apparat mit grossem Vortheil verwendet werden. — Die hier mitzutheilenden Versuche — ich arbeite bei meinen phonometrischen Studien mit Apparaten von

verschiedener Grösse — sind mit einem grossen Schallpendel angestellt, das verhältnissmässig starke Schalle hervorbringt. Ich habe mit demselben u. a. auch die Versuche über die Schwächung, welche der Schall bei seiner Leitung in der Luft auf grosse Entfernungen erleidet, ausgeführt.[1]) Der aus Eichenholz gefertigte und zugleich als Schallquelle dienende Träger hat die Form eines langen, sehr dicken Lineales; die stählerne Pendelstange ist in die Mitte eines kleinen cylindrischen Hammers von Messing senkrecht eingeschraubt, dessen Anschlag an das eine Ende des Trägers die Schalle erregt. Um letztere abzuschwächen, ist das untere Ende des Hammers mit einem dünnen Leder überzogen. Die Pendellänge (Abstand der Pendelaxe vom cylindrischen Hammer) beträgt 284,2 mm; das Gewicht des Pendels (Axe + Pendelstange + Hammer) ist 25,47 g, der auf die Unterlage geübte statische Druck des Hammers 14,43 g. Die Elevationswinkel des Pendels können an einem grossen Quadranten abgelesen werden. Ein Senkel am freien Ende des Quadranten führt die richtige wagrechte Stellung des Trägers, mit der ich ausschliesslich experimentire.

Nach der herkömmlichen Ansicht sollte sich die Schallstärke verhalten 1) bei wagrechter Lage der schwingungsfähigen Platte wie die Sinus der Elevationswinkel des Schallpendels, und 2) bei senkrechter Lage der schwingungsfähigen Platte wie 1 minus Cosinus der Elevationswinkel des Schallpendels. In seiner Psychophysik I. 181. gibt Fechner für den letzteren Fall im Sinne der herrschenden Theorie eine kleine Tabelle „über die Abhängigkeit der Schallstärken von der Elevation des Schallpendels".

Da jedoch die Schallstärke, entgegen der üblichen auf rein theoretische Erwägungen gestützten Ansicht beim Erschüttern einer Platte durch eine Fallkugel, wie das Experiment darthut, sehr viel langsamer wächst, als die Fallhöhe, so müssen auch die Schallstärken des Schallpendels anders berechnet werden, als das bisher geschehen ist.

Bei den Phonometerplatten wird die Bestimmung des

1) Zeitschr. f. Biologie 1882. p. 387.

Exponenten der Fallhöhe dadurch ermöglicht, dass man auf die Platte ein grösseres Gewicht P durch eine kleineren Höhe h herabfallen lässt und dasselbe mit einem kleineren Gewicht p und einer durch den Versuch zu findenden grösseren Fallhöhe H so lange wiederholt, bis beide Schalle gleich stark sind. Der gesuchte Exponent ist dann nach der Oberbeck'schen Formel:

$$= \frac{\log \frac{P}{p}}{\log \frac{H}{h}}.$$

Beim Schallpendel lässt sich aber der Versuch in analoger Weise absolut nicht ausführen, d. h. zur Herstellung der Gleichheit der zwei Vergleichsschalle ein schwererer Hammer, dessen Pendel weniger elevirt wird, und ein leichterer Hammer, mit grösseren Pendelelevationen verwenden.

Schon bei den verschieden schweren Fallkugeln desselben Materiales kann die Timbreverschiedenheit der beiden Schalle einige Schwierigkeiten, namentlich dem wenig Geübten bereiten; benutze ich aber zwei sonst vollständig gleich gearbeitete Schallpendel, von denen jedoch das eine mit einem schwereren Hammer versehen wird, als das andere, so erhalte ich zwei Schalle von solcher Timbreverschiedenheit, dass ihre Intensität unmöglich miteinander verglichen werden kann. Gleichwohl gelang es mir, den Werth des Exponenten der Fallhöhe zu bestimmen mittelst eines abgeänderten Verfahrens, das übrigens ziemlich lange Vorübungen verlangte.

Die beiden, zu dem Versuche dienenden Schallpendel sind vollständig gleich, also auch deren Hämmer von gleichem Gewicht, Dimensionen u. s. w. Der eine Schall wird dadurch hergestellt, dass man beide Hämmer genau gleichzeitig durch dieselbe Fallhöhe auf ihre schwingungsfähigen Platten aufschlagen lässt, wobei ein einziger Schall entsteht. Sodann wird dem Pendel blos eines dieser Apparate eine solche grössere Elevation gegeben (was durch Probiren bald gefunden ist), dass der durch das Aufschlagen seines Hammers entstehende Schall dieselbe Stärke hat, wie der durch das Doppelpendel hervorgebrachte. Man hat also das Gewichts-

verhältniss $2P:P$, d. h. im Zähler der Oberbeck'schen Formel blos log 2. Somit ist der gesuchte Exponent:

$$\varepsilon = \frac{0{,}301}{\log \frac{H}{h}},$$

wobei H und h den Sinus der Elevationswinkel ausdrücken.

Die nachfolgenden Versuche zur experimentellen Bestimmung des Exponenten bedürfen nach dem Gesagten keiner weiteren Erläuterung. Man sieht, dass der Exponent ε gleich bleibt bei sämmtlichen Elevationen des Pendels, also im wesentlichen dasselbe Resultat, was ich in meiner Arbeit über Schallstärkemessung[1]) an verschiedenen Phonometern gefunden habe.

Kleinere Elevation beider Pendel		Grössere Elevation eines Pendels		$\frac{b'}{a'}$	$\log \frac{b'}{a'}$	ε
Elevationswinkel a	Sinuswerth a'	Elevationswinkel b	Sinuswerth b'			
3	0,0523	9	0,1564	2,990	0,47577	0,633
5	0,0871	16	0,2756	3,164	0,50024	0,601
10	0,1736	33	0,5446	3,138	0,49665	0,606
12	0,2079	40	0,6428	3,091	0,49010	0,614
15	0,2588	53	0,7986	3,086	0,48940	0,615
18	0,3090	70	0,9397	3,041	0,48302	0,623
					Mittel	0,615

Bei der Berechnung der Schallstärken in meinen Versuchen über die Schwächung des Schalles in der freien Luft habe ich, ohne besondere Prüfung, den Exponenten der Fallhöhe zu 0,59 angenommen; die experimentelle Prüfung hat diese Zahl nunmehr in die richtigere 0,615 corrigirt, wodurch übrigens die aus den Versuchen sich ergebenden Resultate über die Schallschwächung in der Luft keine wesentliche Aenderung erleiden. Die an einem und demselben Schallpendel erregten Schalle können zunächst in Bezug auf ihre Stärke natürlich nur unter sich selbst verglichen werden; die relative Schallstärke ist somit ausgedrückt durch *Num* $(0{,}615 \log \sin x)$, wobei x den Elevationswinkel des Pendels

1) Wied. Ann. 18. p. 471. 1883.

bei wagrecht gehaltener Schallplatte bedeutet. Wie diese Werthe auf Grund von Vergleichungen mit Schallen von bekannter absoluter Stärke in absolute Zahlen umgerechnet werden können, braucht vorerst nicht erörtert zu werden; zur Ermittelung der Gesetze, von welchen die Schwächung des Schalles bei dessen Durchgang durch Leiter abhängt, genügt in der That die Kenntniss der relativen Schallstärken.

XII. *Kleine akustische Versuche;* *von Dr. Fr. Fuchs,*

Professor der Jatrophysik in Bonn.

I. Zur Beobachtung der die Vocalklänge bestimmenden Resonanztöne der Mundhöhle nach der Methode von Helmholtz ist eine ganze Reihe von Stimmgabeln erforderlich, welche Laien und Lehrern im allgemeinen nicht zur Verfügung stehen. Es dürfte diesen daher vielleicht die Mittheilung des folgenden, zu demselben Zwecke dienenden Verfahrens nicht ganz unwillkommen sein, welches sich bequem mit Hülfe eines jeden musikalischen Instrumentes von genügendem Tonumfange ausführen lässt. Man versehe einen kleinen Kautschukschlauch mit einem in den Gehörgang passenden Ansatzstücke von Glas oder Horn, stecke dieses in das Ohr und das andere Ende des Schlauches in den Mund. Das andere Ohr werde, wenn man es nicht vorzieht, den zu beobachtenden Resonanzton durch einen verzweigten Schlauch beiden Ohren zuzuleiten, durch einen angefeuchteten Pfropfen von Seidenpapier verstopft. Man gebe jetzt der Mundhöhle die dem Vocale *A* entsprechende Configuration und schlage, mit den höchsten Tönen der Scala beginnend, die verschiedenen Tasten eines gut gestimmten Klavieres an.

Die Mundhöhle functionirt alsdann wie ein an das eigene Ohr gesetzter Resonator. Kommt man beim Fortgange von den höheren zu den tieferen Klängen zu einer Saite, deren

erster Partialton mit dem Eigentone der Mundhöhle übereinstimmt oder ihm genügend nahe liegt, so hebt sich dieser, durch Resonanz verstärkt, gesondert von der übrigen Klangmasse ab. Geht man dann weiter in der Scala fort, so tritt die Verstärkung successive für die höheren Partialtöne der Saiten in der Reihenfolge ihrer Rangordnung ein. Die Beobachtung wird erleichtert, wenn man, während die Saite klingt, die Mundstellung ändert, als wenn man Papa sagen wollte oder den Schlauch in die auf *A* gestellte Mundhöhle erst einführt, nachdem man die Saite angeschlagen hat.

Die Erregung der Resonanz durch den ersten Partialton trat bei einem Piano für die Mundstellung des *A* in dem Intervall *b″* bis *g″* ein, stark bei *gis″* und *a″*, schwach bei *g″* und *b″*; in der eingestrichenen Octave machte sie sich am deutlichsten bemerkbar bei *a′*, dessen zweiter, und bei *d′*, dessen dritter Partialton *a″* ist. In der ungestrichenen und noch mehr in der grossen Octave sind die Maxima und Minima der Resonanz schwieriger zu unterscheiden. Denn die tieferen Saitenklänge haben ausnahmslos einen oder mehrere Partialtöne, welche dem Eigentone der Mundhöhle genügend nahe liegen, um die Resonanz merklich erregen zu können. Sie nehmen daher durch Verstärkung jener Partialtöne sämmtlich die Klangfarbe des Vocales *A* an.

An einem zweiten Piano fand ich das Maximum der Resonanz in Uebereinstimmung mit den Untersuchungen von v. Helmholtz bei *b″*, an einem dritten ununterscheidbar bei *a″* und *b″*.

Für diejenigen, welche die Versuche nachmachen wollen, sind in der folgenden Zeile die Saitenklänge zusammengestellt, deren erster, zweiter, *n*ter Partialton die Resonanz im Maximo erregen wird, wenn der Eigenton der Mundhöhle mit dem ersten Tone der Reihe übereinstimmt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b″	*b′*	*dis′*	*b*	*fis*	*dis*	(—)	*B*	*Gis*	*Fis*	(—)	*Dis*

Liegt der Eigenton der Mundhöhle um ein gewisses Intervall, z. B. um einen halben Ton, höher oder tiefer, so sind die

sämmtlichen Tonhöhen der Reihe um das gleiche Intervall zu erhöhen oder zu vertiefen.

II. Versuche dieser Art lassen sich auch leicht am Monochord anstellen, wo man die Schwingungszahlen der Partialtöne direct mit Hülfe einer Stimmgabel bestimmen kann.

Man verschiebe z. B. unter einer stark gespannten, dünnen Stahlsaite, von dem einen Ende her, einen Steg, bis das zwischen ihm und jenem Ende liegende Saitenstück (l_1), in der Mitte angerissen, die Resonanz der Mundhöhle möglichst kräftig erregt, was bei successiver Verlängerung des anzureissenden Saitenstückes zunächst wieder durch den ersten Partialton geschieht. Dann führe man den Stiel einer angeschlagenen Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl s vom Stege her über die Saite bis zu dem Punkte, welcher, von dem Stimmgabelstiel berührt, das zwischen ihm und dem Stege liegende Saitenstück (l_2) zum Mittönen bringt. Aus den Daten l_1, l_2, s ergibt sich dann die Schwingungszahl x des Eigentones der Mundhöhle:

$$x = \frac{l_2}{l_1} s.$$

So fand sich bei einem Versuche, in dem eine Stimmgabel von 444,5 Schwingungen angewendet wurde:

$$l_1 = 18{,}5; \quad l_2 = 38{,}5.$$

Mithin war:

$$x = \frac{38{,}5}{18{,}5} 444{,}5 = 925 \text{ (nahezu } b''\text{)}.$$

III. Für den Laien dürfte der folgende Versuch einigermassen überraschend sein, in welchem der Klang einer fremden Stimme durch Resonanz der eigenen Mundhöhle abgeändert wird. Man stecke wiederum das eine Ende des Kautschukschlauches in das Ohr, das andere in den Mund; der Mundhöhle gebe man abwechselnd die verschiedenen Stellungen des *a*, *o*, *ä*, während eine andere Person einen bestimmten Vocal, z. B. *a*, singt oder gedehnt spricht. Man hört dann bei geeigneter Tonhöhe der sprechenden Stimme je nach der Stellung des eigenen Mundes abwechselnd die Vocale *a*, *o*, *ä*.

IV. Ein anderes Mittel, um die Klangfarbe einer Stimme zu verändern, besteht darin, dass man den Stimmklang mit Hülfe des Quincke'schen Interferenzrohres dem Ohre auf zwei Wegen von ungleicher Länge zuleitet. Hr. Wirtz, Fabrikant musikalischer Instrumente in Bonn, hat mir ein Interferenzrohr hergestellt, welches sich bequem nach Art einer Posaune ausziehen lässt. Die beiden Wege vereinigen sich in zwei kurzen Ansatzstücken, wovon das eine zur Aufnahme des Schalles mit einem Trichter, das andere durch einen Kautschukschlauch mit dem Ohre verbunden wird. Das letztere ist ein Doppelrohr, welches so eingerichtet ist, dass man den einen der Wege absperren und dem Ohre folglich abwechselnd den unveränderten und den durch Interferenz veränderten Stimmklang zuführen kann. Lässt man, während der eine Schallweg langsam verlängert oder verkürzt wird, den Vocal *O* in den Apparat singen, so bemerkt man eine continuirliche Veränderung des Stimmklanges. Bei einem Gangunterschiede von 36 cm, welcher bei einer Temperatur von 15° C. der halben Wellenlänge des eingestrichenen *b* entspricht, ist der specifische Charakter des *O* fast gänzlich verschwunden, da alsdann der Partialton, der die Klangfarbe dieses Vocales bedingt, durch Interferenz nahezu beseitigt ist. In analoger Weise kann auch die Klangfarbe der anderen Vocale geändert werden.

XIII. *Bemerkungen zu der zweiten Abhandlung des Hrn. C. Bohn „Ueber absolute Maasse“* [1]*; von Paul Volkmann.*

Im Interesse der so vielfach in Anspruch genommenen Annalen präcisire ich meine Entgegnung in folgende Punkte:

1) Die Nothwendigkeit der Homogeneität der Gleichungen zu bestreiten, ist mir nie eingefallen. Bestritten habe ich —

1) C. Bohn, Wied. Ann. **20.** p. 690. 1883.

und darin befinde ich mich im Gegensatz zu Hrn. Bohn — die Nothwendigkeit, dass Naturgesetze schon allein ohne Hinzufügung von Constanten (mit Dimensionswerthen) auf homogene Gleichungen führen.

2) Ich constatire einen Widerspruch zwischen dem Ausspruch pag. 691: „Die sogenannte Dimensionsermittelung einer Grösse hat mit dem Begriff dieser gar nichts zu thun" — und der Benutzung des Dimensionswerthes des Widerstandes als Geschwindigkeit, um das electromagnetische Maasssystem als ungültig hinzustellen.

3) Der Begriff des Widerstandes ist in bekannter Weise als Rechnungsgrösse zu fassen.[1]) Aus dem Verzögerungswerth einer Entladung folgt überhaupt keine Definition des Widerstandes, indem z. B. für ein und denselben Draht der Verzögerungswerth der Entladung infolge des Extrastromes ein ganz anderer ist, je nachdem der Draht der Länge nach gespannt oder zu einer Spirale gewunden ist.

4) Die Auffassung pag. 700: „Es widerstreitet der Erfahrung, Körper, grosse und kleine zu denken, welche jeweils mit einer magnetischen Polarität begabt sind", ist wohl in einer anderen Auffassung der Elementargesetze, resp. Elementarwirkungen (im Gegensatz zu Totalwirkungen) begründet, aber nicht zwingend.

5) Die Dimension, ein übersichtliches Symbol, gestattet in sehr anschaulicher Weise einen Einblick in die Zusammensetzung des Begriffes — damit ist vollkommen verträglich, dass in vielen Fällen über den Dimensionswerth eines und desselben Begriffes in verschiedener Weise verfügt werden kann. Kennen wir in der reinen Mechanik z. B. die Masse eines Körpers und den Weg, welchen derselbe gleichförmig in einer gegebenen Zeit zurücklegt, so gibt uns die Theorie der Dimensionen sofort an die Hand, dass wir die Grösse für die Energie des Körpers nach dem Schema $[ML^2T^{-2}]$, für die Bewegungsquantität nach dem Schema $[MLT^{-1}]$ zu berechnen haben. Hr. Bohn kann mit Hülfe seiner Dimensionen dieses nicht mehr. Es hat keinen Zweck, die für die

1) Cfr. Kirchhoff, ges. Abh. p. 67. 1882.

theoretische Astronomie ganz richtige Dimensionsbestimmung $M = [L^3 T^{-2}]$ in die allgemeine Mechanik einzuführen. Was wäre weiter damit gewonnen, wenn Hr. Bohn — wozu er die principielle Möglichkeit zugesteht — die Dimensionen aller Begriffe z. B. als Potenzen der Zeit darstellen würde?

Königsberg i. Pr., 18. Januar 1884.

XIV. *Ueber die Dimension der magnetischen Masse im electrostatischen absoluten Maasssystem; von Paul Volkmann.*

Die Bestimmung der Dimension der magnetischen Masse im electrostatischen absoluten Maasssystem hat durch die an Maxwell's[1]) Darstellung geknüpfte Controverse zwischen Helmholtz[2]) und Clausius[3]) ein erhöhtes Interesse gewonnen. Vielleicht gewährt die in dieser Notiz gewählte Form der Darstellung einen neuen Gesichtspunkt.

Man spricht heute in der Regel nur von zwei absoluten Maasssystemen in der Electricität, dem electrostatischen und electromagnetischen. Man unterschied früher noch zwischen dem electromagnetischen System (im engeren Sinne), anknüpfend an die Wechselwirkung zwischen Magneten und Strömen — herrührend von W. Weber — und dem electrodynamischen, anknüpfend an die Wechselwirkung von Strömen und herrührend von F. E. Neumann. Da indes beide Systeme, das electromagnetische und electrodynamische, zu denselben Dimensionen führen, hat man sie im weiteren Verlaufe der Wissenschaft nicht mehr getrennt.

Für den vorliegenden Zweck erscheint es wesentlich, diese Systeme wieder zu trennen; ich will aber, um die lästigen Unterschiede der beiden Systeme in Zahlenfactoren (Potenzen von $\sqrt{2}$) zu vermeiden, abweichend von dem Ur-

1) Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism 2.

2) v. Helmholtz, Wied. Ann. 17. p. 42. 1882.

3) Clausius, Wied. Ann. 16. p. 529. 1882; 17. p. 713. 1882.

heber die electrodynamische Stromeinheit derart definiren, dass sie mit der electromagnetischen Stromeinheit quantitativ übereinstimmt.

Als den Ausgangspunkt für die Dimensionsbestimmung in den drei Systemen, dem electrostatischen, electromagnetischen und electrodynamischen, können wir die mechanischen Arbeitswerthen $[ML^2T^{-2}]$ äquivalenten Potentiale wählen:

1) Für das electrostatische System das electrostatische Potential:

$$\sum \frac{ee_1}{r} = \left[\frac{e^2}{L}\right] = [ML^2T^{-2}].$$

2) Für das electromagnetische System das electromagnetische Potential:

$$im\int \frac{do\cos(nr)}{r} = [im] = [ML^2T^{-2}].$$

3) Für das electrodynamische System das electrodynamische Potential:

$$-ii_1\iint \frac{ds\,ds_1}{r}\cos\varepsilon = [i^2L] = [ML^2T^{-2}].$$

Für die Definition der zu Grunde gelegten Einheiten in Werthen liefern eine bequemere Ausdrucksweise die (wenn anch bestrittenen so doch) für diesen Fall gleichwerthigen Elementargesetze:

1) Für das electrostatische System das Coulomb'sche Gesetz:

$$\frac{ee_1}{r^2} = \left[\frac{e^2}{L^2}\right] = [MLT^{-2}].$$

2) Für das electromagnetische System das Biot-Savart'sche Gesetz:

$$\frac{imds\sin(rds)}{r^2} = [imL^{-1}] = [MLT^{-2}].$$

3) Für das electrodynamische System das Gesetz von Ampère:

$$\frac{ii_1\,ds\,ds_1}{r^2}(2\cos\varepsilon - 3\cos\vartheta\cos\vartheta_1) = [i^2] = [MLT^{-2}].$$

In dieser Weise ist zunächst die Dimension des für das System bestehenden Grundbegriffes bestimmt; für das electrostatische System die Electricitätsmenge e, für das electro-

dynamische die Stromstärke i. Für das electromagnetische System verhält es sich anders, dieses System basirt auf zwei Grundbegriffen, der Stromstärke i und der Magnetismusmenge m. Es ergibt sich daraus die Nothwendigkeit, für das electromagnetische System noch weiter das magnetische Potential:

$$\sum \frac{m m_1}{r} = \left[\frac{m^2}{L}\right] = [ML^2T^{-2}],$$

oder das Coulomb'sche Gesetz für magnetische Massen zu Grunde zu legen:

$$\frac{m m_1}{r^2} = \left[\frac{m^2}{L^2}\right] = [MLT^{-2}].$$

Die Dimensionen aller anderen electrischen Begriffe fliessen nun in bekannter Weise aus den Definitionen:

Stromstärke i ist die in der Zeit t einen Querschnitt passirende Electricitätsmenge $e[i] = [e/T]$.

Electromotorische Kraft E eines Stromelementes ds ist die für die Enden von ds bestehende Differenz der electrischen Potentialfunction $[Ee] = [ML^2T^{-2}]$.

Widerstand ist das Verhältniss aus electromotorischer Kraft und Stromstärke $[W] = [E/i]$.

Noch fehlen die Dimensionsbestimmungen der magnetischen Begriffe für das electrostatische und electrodynamische Maasssystem. Ebenso wie nun das electromagnetische Maasssystem auf zwei Naturgesetzen (resp. zwei Potentialen) basirt werden musste, ergibt sich hier die Nothwendigkeit, das electrostatische und electrodynamische Maasssystem in seiner Vollständigkeit (mit Rücksicht auf die magnetischen Begriffe nämlich) auch auf zwei Naturgesetzen (resp. zwei Potentialen) zu basiren.

Während aber im electromagnetischen Maasssystem die Wahl der beiden Naturgesetze gar nicht in Frage steht, können wir im electrostatischen, wie im electrodynamischen Maasssystem der Einführung der magnetischen Begriffe, sowohl das Coulomb'sche Gesetz für magnetische Massen, wie das Biot-Savart'sche zu Grunde legen. Im electrostatischen Maasssystem hat das erstere v. Helmholtz gethan, das zweite führt zu den von Maxwell gegebenen

Dimensionswerthen. Im electrodynamischen Maasssytem führen beide Gesetze zu denselben Dimensionswerthen:

$$[i^2] = \left[i\frac{m}{L}\right] = \left[\frac{m^2}{L^2}\right].$$

Darauf beruht die Gleichheit der Dimensionswerthe im electromagnetischen und electrodynamischen System und demnach die Berechtigung, als nur von einem System überhaupt zu reden.

Der Unterschied der von Maxwell, v. Helmholtz und Clausius vertretenen Standpunkte lässt sich jetzt in folgender Weise formuliren:

1) Maxwell, v. Helmholtz. Zu einer vollständigen Begründung irgend eines electrischen Maasssystemes erscheinen zwei Naturgesetze geboten.

2) Clausius. Zu einer vollständigen Begründung irgend eines electrischen Maasssystemes genügt ein Naturgesetz und die der Ampère'schen Theorie entnommene Relation $[m] = [iL]$, welche zu den drei Definitionen von i, E, W p. 520 hinzuzutreten hätte.

Der erste Standpunkt entspricht wohl am meisten den bisher bei Aufstellung absoluter Systeme leitend gewesenen Gesichtspunkten. Die electrostatischen Dimensionswerthe für magnetische Massen:

$$[m] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}] \text{ nach v. Helmholtz},$$

$$[m] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}] \text{ nach Maxwell},$$

sind dann gleichberechtigt. Von diesem Standpunkte aus hätte man zu sagen, dass die von Clausius für das electrostatische Maasssystem herbeigezogene Relation $[m] = [iL]$ einem Maasssystem entnommen ist, in dem noch andere Beziehungen zwischen Stromstärke und Magnetismus obwalten — Beziehungen, die für das electrostatische Maasssystem nicht maassgebend sind.

Der zweite Standpunkt von Clausius führt zu der Dimension der magnetische Masse:

$$[m] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Die von mir gewählte Form der Darstellung mag weiter zeigen, dass die Dimensionen in den electrischen Maasssystemen wenig mit Vorstellungen über electrische Phänomene zu thun haben. Die Bedeutung der Dimensionen, die eine mehr formelle, als materielle ist, ist wohl überhaupt bisher vielfach überschätzt.

Königsberg i. Pr., 24. Januar 1884.

XV. *Das G. Kirchhoff'sche Princip und die Theorie der Reflexion und Brechung an der Grenze circularpolarisirender Medien; von W. Voigt.*

Hr. G. Kirchhoff hat in einer Arbeit: „Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel“ [1]) ein neues Princip in die Optik eingeführt, welches von allgemeinster Bedeutung zu werden verspricht. Bekanntlich hatte der Lösung desselben Problems, ausser den gewöhnlich in der Elasticität benutzten Grenzgleichungen für die Verschiebungscomponenten, seinerzeit Hr. F. Neumann [2]) das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft der Aetherschwingungen als ein „nur auf Grund der Erfahrung anzunehmendes“ [3]) zum Grunde gelegt. Dies Princip hat ausser dem hierin liegenden Nachtheil den anderen ebenfalls schon von Hrn. Neumann hervorgehobenen, dass es nicht in allen Fällen zur Lösung des Problemes führt, z. B. bei der totalen Reflexion durch das andere ersetzt werden musste, dass die auf die Grenze wirkende Moleculardruckcomponente, welche senkrecht zur Einfallsebene liegt, auf beiden Seiten der Grenze gleichen Werth hat.[4]) Ueberdies ist es in jedem

1) G. Kirchhoff, Abh. der Berl. Acad. **73.** 1876. speciell p. 75. Gesammelte Abhandl. p. 368.

2) F. Neumann, Abh. der Berl. Acad. **33.** 1836. p. 1.

3) F. Neumann, l. c. p. 11.

4) F. Neumann, Pogg. Ann. **40.** p. 510. 1837. auch Zech, Pogg. Ann. **109.** p. 76. 1860.

Falle nur so lange brauchbar, als man von den direct von den ponderablen Massen auf die Aetherschwingungen ausgeübten Wirkungen absieht.

Dem gegenüber bietet das neue Princip des Hrn. G. Kirchhoff, dahin lautend, „dass in der Grenze eine gewisse Arbeit der von den ponderablen auf die Aethertheile wirkenden Kräfte verschwindet", bedeutende Vortheile.

Erstlich erscheint es als eine Folge des allgemeinen Principes der Energie[1]) und gründet sich daher nicht nur auf einen kleinen Kreis von Beobachtungen, deren Deutung überdies nicht ganz unzweifelhaft ist, zweitens ist es umfassender, als das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft — löst z. B. ohne weiteres das Problem der totalen Reflexion —, und drittens gestattet es, wie ich an einem anderen Orte gezeigt habe[2]), mit Leichtigkeit die Verallgemeinerung auf den Fall, dass die directe Einwirkung der ponderablen auf die Aethermassen in Betracht gezogen wird.

Indessen scheint es in der durch die letztere Verallgemeinerung aus der ursprünglichen Kirchhoff'schen zunächst erhaltenen Fassung immer noch nicht alle möglichen Fälle zu umfassen. Wie ich im Folgenden mir zu zeigen erlauben werde, führt es bei der Anwendung auf die Grenze eines circularpolarisirenden Körpers auf einen Widerspruch. Es wird in diesem Falle (in welchem auch das Princip der lebendigen Kraft versagt) nöthig, jene in der Grenze stattfindende Arbeit nicht gleich Null, sondern gleich einem vollständigen Differentialquotienten nach der Zeit zu setzen. Diese allgemeinste Fassung habe ich früher[3]) als ebenfalls mit dem Princip der Energie vereinbar erwiesen. Freilich leidet dieselbe an einer gewissen Unbestimmtheit wegen der Willkürlichkeit der einzuführenden Function, die noch eine Hülfsannahme erforderlich macht.

Ich beschränke mich zur Darlegung des im Vorstehenden Angedeuteten auf die Behandlung unkrystallinisch

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 700. 1883.
2) l. c. p. 700.
3) l. c. p. 701.

circularpolarisirender Mittel. Die Verallgemeinerung auf krystallinische bietet keine principiellen Schwierigkeiten.

In einer früheren Abhandlung über „die Theorie des Lichtes für vollkommen durchsichtige Media“[1]) habe ich gezeigt, dass die Arbeit der in der Grenze zwischen zwei Medien wirkenden Kräfte, von der das Princip der Energie verlangt, dass sie ein vollkommener Differentialquotient nach der Zeit sein muss, die Form hat:[2])

$$S = \left[(\overline{X_n} + \overline{A_n})\frac{\overline{\partial u}}{\partial t} + (\overline{Y_n} + \overline{B_n})\frac{\overline{\partial v}}{\partial t} + (\overline{Z_n} + \overline{C_n})\frac{\overline{\partial w}}{\partial t}\right]_h + \left[(\overline{X_n} + \overline{A_n})\frac{\overline{\partial u}}{\partial t} + (\overline{Y_n} + \overline{B_n})\frac{\overline{\partial v}}{\partial t} + (\overline{Z_n} + \overline{C_n})\frac{\overline{\partial w}}{\partial t}\right]_k.$$

Hierin sind $u\,v\,w$ die Verschiebungscomponenten, X_n Y_n Z_n die Druckcomponenten der Molecularwirkungen von Aether auf Aether, A_n B_n C_n gewisse ähnlich gebildete Grössen für die Wechselwirkung zwischen Aether und Materie; die Indices h und k zeigen an, dass die Werthe der Klammern für das h. und k. Medium zu nehmen sind.

Wählt man als Trennungsfläche zweier Medien (0) und (I) die XY-Ebene, so wird:

$$\left.\begin{aligned} S = &\left[(\overline{X_z} + \overline{A_z})_0\frac{\overline{\partial u_0}}{\partial t} + (\overline{Y_z} + \overline{B_z})_0\frac{\overline{\partial v_0}}{\partial t} + (\overline{Z_z} + \overline{C_z})_0\frac{\overline{\partial w_0}}{\partial t}\right] \\ &- \left[(\overline{X_z} + \overline{A_z})_I\frac{\overline{\partial u_I}}{\partial t} + (\overline{Y_z} + \overline{B_z})_I\frac{\overline{\partial v_I}}{\partial z} + (\overline{Z_z} + \overline{C_z})_I\frac{\overline{\partial w_I}}{\partial t}\right] \\ &= S_0 - S_I. \end{aligned}\right| \quad 1.$$

Ich bestimme den Werth S für den Fall, dass das erste der zwei in Betracht kommenden Medien ein gewöhnliches isotropes, das zweite ein circularpolarisirendes isotropes ist.

S_I lässt sich dann in zwei Theile zerlegen, da $(A_z)_I(B_z)_I(C_z)_I$ in je zwei Theile zerfällt, von denen der erste $(\mathfrak{A}_z, \mathfrak{B}_z, \mathfrak{C}_z)$ die in einem gewöhnlichen isotropen Medium von der Wirkung der Materie auf den Aether abhängenden Glieder enthält, der zweite (A_z, B_z, Γ_z) die durch die Umstände, welche die

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 873. 1883.
2) l. c. p. 901.

Circularpolarisation bedingen, noch hinzukommenden. Diese beiden Theile von S_I seien $\mathfrak{S}_I$ und Σ_I.

Nach dem von mir Entwickelten[1]) gibt die erste Gattung Grössen folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} X_z + \mathfrak{A}_z &= -\frac{e+a}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{a'}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ Y_z + \mathfrak{B}_z &= -\frac{e+a}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{a'}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ Z_z + \mathfrak{C}_z &= -(e+a)\frac{\partial w}{\partial z} - a'\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \quad 2.$$

Setzt man voraus, dass $u\,v\,w$ lineare Functionen von $\sin 2\pi t/T$ und $\cos 2\pi t/T$ sind, so wird ($T/2\pi$ kurz $= \tau$ gesetzt):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{u}{\tau^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{v}{\tau^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{w}{\tau^2}.$$

Führt man noch die Abkürzung ein:

$$\tfrac{1}{2}\left(e + a - \frac{a'}{\tau^2}\right) = \varepsilon, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u'' \text{ etc.},$$

so wird für beide Medien:

$$\mathfrak{S} = -\varepsilon\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)u' + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)v' + 2\frac{\partial w}{\partial z}w'\right). \quad 3.$$

Nun sollen sich in demselben Medium zwei ebene Wellen in verschiedener Richtung und mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, welche entweder als einfallende und reflectirte oder als gleichzeitig gebrochene zusammengehören. Es sei demnach:

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

und seien die Theile mit dem Index 1 und 2 resp. Functionen von $t - \varrho_1/\omega_1$ und $t - \varrho_2/\omega_2$, worin $\omega_1\,\omega_2$ die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind und:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= \alpha_1 x + \gamma_1 z, \\ \varrho_2 &= \alpha_2 x + \gamma_2 z \text{ ist;} \end{aligned}\right\} \quad 4.$$

beide Wellennormalen liegen also in der XZ-Ebene, und $\alpha\gamma$ sind ihre Richtungscosinus gegen die X- und Z-Axe. Da

1) W. Voigt, l. c. p. 884, auch p. 901 u. 903.

nach der Bedingung der Incompressibilität die Schwingungen transversal sind, so folgt aus (4):

$$0 = \alpha_1 u_1 + \gamma_1 w_1, \quad 0 = \alpha_2 u_2 + \gamma_2 w_2. \quad | \; 5.$$

Endlich sei noch die Schwingungscomponente r in der Einfallsebene eingeführt durch die Formeln:

$$r_1 = \gamma_1 u_1 - \alpha_1 w_1, \quad r_2 = \gamma_2 u_2 - \alpha_2 w_2. \quad | \; 6.$$

Dann schreibt sich in Rücksicht auf (5) und auf die Relation:

$$\frac{\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\alpha_2}{\omega_2}$$

für das untere Medium (I) die Arbeit:

$$\left| \begin{aligned} \mathfrak{S}_I = + \varepsilon \Big[& \frac{\gamma_1}{\omega_1}(r_1'^2 + v_1'^2) + \frac{\gamma_2}{\omega_2}(r_2'^2 + v_2'^2) \\ & + \Big(\frac{\gamma_1}{\omega_1} + \frac{\gamma_2}{\omega_2}\Big)\Big((\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2) r_1' r_2' + v_1' v_2'\Big)\Big]. \end{aligned} \right| \quad 7.$$

Für das obere, gewöhnlich isotrope Medium (0) gehören die beiden Wellen als einfallende und reflectirte zusammen; es ist daher dort $\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, also wenn dafür noch:

$$r_1 = r_e, \qquad r_2 = r_r, \qquad v_1 = v_e, \qquad v_2 = v_r,$$

gesetzt wird:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{\varepsilon_0 \gamma}{\omega}(r_e'^2 + v_e'^2 - r_r'^2 - v_r'^2). \quad | \; 8.$$

Die Werthe der Grössen $A_z B_z \Gamma_z$, welche in circularpolarisirenden Medien auftreten, sind nach meinen bezüglichen Untersuchungen[1]) in der allgemeinsten Form zu erhalten:

$$\begin{aligned} -A_z &= \gamma^2\Big[q\Big(\alpha\frac{\partial v'}{\partial x} + \gamma\frac{\partial v'}{\partial z}\Big) + q_1\Big(\alpha\frac{\partial v'''}{\partial x} + \gamma\frac{\partial v'''}{\partial z}\Big)\Big] \\ -B_z &= \alpha\gamma\Big[q\Big(\alpha\frac{\partial w'}{\partial x} + \gamma\frac{\partial w'}{\partial z}\Big) + q_1\Big(\alpha\frac{\partial w'''}{\partial x} + \gamma\frac{\partial w'''}{\partial z}\Big)\Big] \\ & \quad -\gamma^2\Big[q\Big(\alpha\frac{\partial u'}{\partial x} + \gamma\frac{\partial u'}{\partial z}\Big) + q_1\Big(\alpha\frac{\partial u'''}{\partial x} + \gamma\frac{\partial u'''}{\partial z}\Big)\Big] \\ -\Gamma_z &= -\alpha\gamma\Big[q\Big(\alpha\frac{\partial v'}{\partial x} + \gamma\frac{\partial v'}{\partial z}\Big) + q_1\Big(\alpha\frac{\partial v'''}{\partial x} + \gamma\frac{\partial v'''}{\partial z}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Dies lässt sich einfacher schreiben, da $u\,v\,w$ Functionen von $t - (\alpha x + \gamma z)/\omega$ sind:

---

1) W. Voigt, l. c. p. 881 u. 882 auch p. 891.

$$A_z = \frac{\gamma^2}{\omega}\left(q - \frac{q_1}{\tau^2}\right)v'',$$

$$B_z = \frac{\gamma}{\omega}\left(q - \frac{q_1}{\tau^2}\right)(\alpha w'' - \gamma u'') = -\frac{\gamma}{\omega}\left(q - \frac{q_1}{\tau^2}\right)r'',$$

$$\Gamma_z = -\frac{\alpha\gamma}{\omega}\left(q - \frac{q_1}{\tau^2}\right)v''.$$

Diese Werthe sind für beide Wellen in die Formel:

$$\Sigma_I = \bar{A}_z\bar{u}' + \bar{B}_z\bar{v}' + \bar{\Gamma}_z\bar{w}'$$

einzusetzen. Unter Einführung der Abkürzung:

$$q - \frac{q_1}{\tau^2} = \vartheta$$

erhält man dann:

$$\Sigma_I = \vartheta\left[\frac{\gamma_1}{\omega_1}(r_1'v_1'' - v_1'r_1'') + \frac{\gamma_2}{\omega_2}(r_2'v_2'' - v_2'r_2'')\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1}r_2'v_2'' + \frac{\gamma_2}{\omega_2}r_1'v_2''\right)(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2) - \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1}r_1''v_2' + \frac{\gamma_2}{\omega_2}r_2''v_1'\right)\right].$$

Dies gewinnt eine einfachere Form, wenn man gemäss der bezüglichen früheren Betrachtungen[1]) einführt, dass bei so bestimmten A_z, B_z, Γ_z circulare Schwingungen eintreten, und zwar gilt:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= D_1 \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\varrho_1}{\omega_1} + \delta_1\right)\\ v_1 &= -D_1 \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\varrho_1}{\omega_1} + \delta_1\right)\\ r_2 &= D_2 \sin\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\varrho_2}{\omega_2} + \delta_2\right)\\ v_2 &= D_2 \cos\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{\varrho_2}{\omega_2} + \delta_2\right), \end{aligned}\right| \quad 9.$$

wo die erste Welle die links, die zweite die rechts rotirende ist.

Hiernach ist nämlich:

$$r_1'' = -\frac{1}{\tau}v_1', \quad r_2'' = +\frac{1}{\tau}v_2', \qquad 10.$$
$$v_1'' = +\frac{1}{\tau}r_1', \quad v_2'' = -\frac{1}{\tau}r_2', \text{ also:}$$

$$\Sigma_I = \frac{\vartheta}{\tau}\left[\frac{\gamma_1}{\omega_1}(r_1'^2 + v_1'^2) - \frac{\gamma_2}{\omega_2}(r_2'^2 + v_2'^2)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} - \frac{\gamma_2}{\omega_2}\right)\left((\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)r_1'r_2' + v_1'v_2'\right)\right]. \qquad 11.$$

1) W. Voigt, l. c. p. 892.

Durch die Werthe (1), (7), (8) und (11) wird schliesslich:

$$S = \frac{\varepsilon_0 \gamma}{\omega}(r_e'^2 + v_e'^2 - r_r'^2 - v_r'^2)$$
$$- \frac{\gamma_1}{\omega_1}(\varepsilon + \vartheta)\left(r_1'^2 + v_1'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2'(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)\right)$$
$$- \frac{\gamma_2}{\omega_2}(\varepsilon - \vartheta)\left(r_2'^2 + v_2'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2'(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)\right)$$

Nun ist in unkrystallinischen gewöhnlichen Medien[1]):

$$\frac{\varepsilon_0}{\omega} = \omega(m_0 + r_0 - n_0\tau^2) \text{ kurz} = \omega\mu_0$$

und in circularpolarisirenden[2]) für die linksrotirende Welle:

$$\frac{\varepsilon + \vartheta}{\omega_1} = \omega_1\left(m + r - n\tau^2 + \tau\left(p - \frac{p_1}{t^2}\right)\right) \text{ kurz} = \omega_1(\mu + \pi),$$

für die rechtsrotirende:

$$\frac{\varepsilon - \vartheta}{\omega_2} = \omega_2\left(m + r - n\tau^2 - \tau\left(p - \frac{p_1}{t^2}\right)\right) \text{ kurz} = \omega_2(\mu - \pi),$$

also, da zudem: $\frac{\alpha}{\omega} = \frac{\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\alpha_2}{\omega_2}$ ist:

$$\frac{\alpha}{\omega} S = \mu_0 \alpha\gamma(r_e'^2 + v_e'^2 - r_r'^2 - v_r'^2)$$
$$- \alpha_1\gamma_1(\mu + \pi)\left(r_1'^2 + v_1'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2'(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)\right)$$
$$- \alpha_2\gamma_2(\mu - \pi)\left(r_2'^2 + v_2'^2 + v_1' v_2' + r_1' r_2'(\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2)\right). \quad 12.$$

Mit diesem Ausdruck sind die Gleichungen der Continuität zu combiniren. Sie liessen sich für zwei unkrystallinische Medien schreiben[3]):

$$v_e + v_r = v_1 + v_2 \qquad 13_a.$$
$$\gamma(r_e - r_r) = \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2 \qquad 13_b.$$
$$\mu_0\alpha(r_e + r_r) = \mu(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2) \qquad 13_c'.$$

Ich werde zeigen, dass wahrscheinlicher als der Factor μ bei circularpolarisirenden Medien $\mu + \pi$ ist, also die letzte Formel in der Gestalt benutzen:

$$\mu_0\alpha(r_e + r_r) = (\mu + \pi)(\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2). \qquad 13_c.$$

Das Product der differentiirten letzten beiden gibt:

1) W. Voigt, l. c. p. 884.

2) W. Voigt, l. c. p. 892; dabei ist zu berücksichtigen, dass hier oben der allgemeinste Werth der Componenten eingeführt ist, dort bereits ein vereinfachter. Vgl. p. 878 u. 882.

3) W. Voigt, l. c. p. 904.

$$0=\mu_0\alpha\gamma(r_e'^2-r_r'^2)-(\mu+\pi)\big(\alpha_1\gamma_1 r_1^2+\alpha_2\gamma_2 r_2^2+r_1' r_2'(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)\big)$$

und von Formel (12) abgezogen:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\omega}S &= \mu_0\alpha\gamma(v_e'^2-v_r'^2)\\ &-u\big[\alpha_1\gamma_1 v_1'^2+a_2\gamma_2 v_2'^2+v_1' v_2'(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)\\ &+r_1' r_2'\big((\alpha_1\alpha_2+\gamma_1\gamma_2)(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)-(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)\big)\big]\\ &-\pi\big[\alpha_1\gamma_1 v_1'^2+\alpha_2\gamma_2(2r_2'^2+v_2'^2)+v_1' v_2'(\alpha_1\gamma_1-\alpha_2\gamma_2)\\ &+r_1' r_2'\big((\alpha_1\alpha_2+\gamma_1\gamma_2)(\alpha_1\gamma_1-\alpha_2\gamma_2)-(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)\big)\big]\end{aligned}\quad 14.$$

Wollte man nun das Kirchhoff'sche Princip anwenden und $S=0$ setzen, so bekäme man für die gesuchten Amplituden der reflectirten und gebrochenen Wellen eine quadratische Gleichung, was keinen Sinn gäbe.[1])

Man kann aber eine Form erhalten, welche sich durch die Gleichung (13_a) dividiren und also linear machen lässt, wenn man S nicht zu Null macht, sondern, entsprechend der allgemeinsten zulässigen Fassung des Princips, gleich einem Differentialquotienten nach der Zeit.

Wegen der bei circularpolarisirten Wellen geltenden Relationen:

$$\tau r_1' = -v_1, \quad \tau r_2' = v_2, \quad \tau v_1' = r_1, \quad \tau v_2' = r_2$$

sind nämlich folgende vier Ausdrücke vollständige Differentialquotienten:

$$r_1'^2 - v_1'^2 = -\frac{1}{\tau}\frac{\partial v_1 r_1}{\partial t}, \quad r_2'^2 + v_2'^2 = \frac{1}{\tau}\frac{\partial v_2 r_2}{\partial t},$$

$$r_1' r_2' = \frac{1}{\tau}\frac{\partial (v_2 r_1 - v_1 r_2)}{\partial t}, \quad v_1' v_2' = \frac{1}{\tau}\frac{\partial (v_2 r_1 + r_2 v_1)}{\partial t}.$$

Man kann daher durch geeignete Bestimmung von S die folgende Form aus (14) erhalten:

$$\mu_0\alpha\gamma(v_e'^2-v_r'^2)=(\mu+\pi)\big(\alpha_1\gamma_1 v_1'^2+\alpha_2\gamma_2 v_2'^2+(\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)v_1' v_2'\big).$$

Dies gibt durch (13_a) dividirt:

$$\mu_0\alpha\gamma(v_e'-v_r')=(\mu+\pi)(\alpha_1\gamma_1 v_1'+\alpha_2\gamma_2 v_2'). \quad 15.$$

Freilich liegt hierin eine doppelte Willkür. Erstlich

1) Ebensowenig führte es zum Ziele, wenn man statt S selbst etwa einen Mittelwerth von S während einer Schwingungsdauer gleich Null setzen wollte.

die Einführung von $\mu + \pi$ an Stelle von μ in der Gleichung, welche voraussetzt, dass diese Grenzbedingung durch die circularpolarisirenden Kräfte modificirt wird. Dass es indess nach der Eigenschaft dieser Kräfte nicht undenkbar ist, dass dieselben von den ponderabeln Theilen ausgehen, habe ich früher erörtert.[1]) Die Einführung gewährt den Vortheil, die Gleichungen (15) in symmetrischer Form zu liefern. Behält man ($13_c'$) bei, so wird in (15) die rechte Seite: $(\mu + 2\pi)\,\alpha_1\,\gamma_1\,v_1' + \mu\,\alpha_2\,\gamma_2\,v_2'$, was offenbar unwahrscheinlicher ist.

Bedenklicher ist, dass über S nicht nur diese eine Verfügung möglich ist, um zu einer durch (13_a) divisibeln Form zu gelangen. Hierzu dürfte nämlich ein Ausdruck von der Form:

$$(v_1' + v_2')(Av_1' + Bv_2' + Cr_1' + Dr_2')$$

nicht ein Differentialquotient nach der Zeit sein. Aber dies ist nicht der Fall, denn macht man:

$$A = B = 0, \quad C = D,$$

so kommt:

$$C(v_1' + v_2')(r_1' + r_2') = \frac{C}{2}\,\frac{\partial (r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2)}{\partial t},$$

es ist also mit dem Princip in seiner weitesten Form auch die Gleichung:

$$\mu_0 \alpha \gamma (v_e' - v_r') = (\mu + \pi)(\alpha_1 \gamma_1 v_1' + \alpha_2 \gamma_2 v_2') + C(r_1' + r_2')$$

statt (15) verträglich. Ueber diese Constante C kann man jedenfalls aussagen, dass sie mit verschwindendem ϑ und π selbst verschwinden, und ausserdem für verschwindendes α mit α^2 proportional werden müsste, da im ersteren Falle die Gleichungen für gewöhnliche unkrystallinische Medien erscheinen, im letzteren die Gleichungen für die r und die v Componenten identisch werden müssen. Streng zu zeigen, dass $C = 0$ sein muss, ist mir nicht gelungen, und ich muss daher diese Verfügung als eine willkürliche Annahme bezeichnen. Die auf unseren Fall anwendbare allgemeinste Form des Kirchhoff'schen

1) W. Voigt, l. c. p. 900—904. Es bleibt übrigens immer die Möglichkeit, $\pi = 0$ und $\mu = \mu_0$ zu setzen, um die Gleichungen (13) genau in der Neumann'schen Form zu erhalten. Etwas Wesentliches wird dadurch nicht geändert. Ich habe vorgezogen, so allgemein wie möglich zu gehen.

Principes scheint also nicht hinreichend präcis, um die letzte nöthige Grenzgleichung eindeutig zu bestimmen.

Noch seien aus den Gleichungen (13_{a-c}) und (15) die Amplituden des reflectirten und gebrochenen Lichtes vollständig berechnet. Ich setze:

$$
\begin{aligned}
r_e &= E_p \sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho}{\omega}\right)\\
v_e &= E_s'\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho}{\omega}\right)+E_s''\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho}{\omega}\right)\\
r_r &= R_p'\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_r}{\omega}\right)+R_p''\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_r}{\omega}\right)\\
v_r &= R_s'\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_r}{\omega}\right)+R_s''\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_r}{\omega}\right)\\
r_1 &= D_1'\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_1}{\omega_1}\right)+D_1''\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_1}{\omega_1}\right)\\
v_1 &= D_1''\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_1}{\omega_1}\right)-D_1'\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_1}{\omega_1}\right)\\
r_2 &= D_2'\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_2}{\omega_2}\right)+D_2''\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_2}{\omega_2}\right)\\
v_2 &= -D_2''\sin\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_2}{\omega_2}\right)+D_2'\cos\frac{1}{\tau}\left(t-\frac{\varrho_2}{\omega_2}\right).
\end{aligned}
\qquad 16.
$$

Dadurch zerfallen die vier Gleichungen (13) und (15) in folgende acht:

$$
\begin{aligned}
\gamma(E_p-R_p) &= \gamma_1 D_1' + \gamma_2 D_2'\\
\alpha\varkappa(E_p-R_p') &= \alpha_1 D_1' + \alpha_2 D_2'\\
-\gamma R_p'' &= \gamma_1 D_1'' + \gamma_2 D_2''\\
\alpha\varkappa R_p'' &= \alpha_1 D_1'' + \alpha_2 D_2''\\
E_s' + R_s' &= D_1'' - D_2''\\
E_s'' + R_s'' &= -D_1' + D_2'\\
\alpha\gamma\varkappa(E_s'-R_s') &= \alpha_1\gamma_1 D_1'' - \alpha_2\gamma_2 D_2''\\
\alpha\gamma\varkappa(E_s''-R_s'') &= -\alpha_1\gamma_1 D_1' + \alpha_2\gamma_2 D_2',
\end{aligned}
\qquad 17.
$$

worin gesetzt ist: $\frac{\mu_0}{\mu+\pi}=\varkappa.$

Löst man diese Gleichungen auf und setzt kurz:

$$
\begin{aligned}
\alpha\gamma_1\varkappa+\alpha_1\gamma &= V_1, & \alpha\gamma_2\varkappa+\alpha_2\gamma &= s_2\\
\alpha\gamma_1\varkappa-\alpha_1\gamma &= d_1, & \alpha\gamma_2\varkappa-\alpha_2\gamma &= d_2\\
\alpha\gamma\varkappa+\alpha_1\gamma_1 &= \sigma_1, & \alpha\gamma\varkappa+\alpha_2\gamma_2 &= \sigma_2\\
\alpha\gamma\varkappa-\alpha_1\gamma_1 &= \delta_1, & \alpha\gamma\varkappa-\alpha_2\gamma_2 &= \delta_2
\end{aligned}
$$

so erhält man unter Rücksicht auf $s_2 d_1 - s_1 d_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
N D_1'' &= 2\alpha\gamma\varkappa E_s' s_2 \\
N D_2'' &= -2\alpha\gamma\varkappa E_s' s_1 \\
N D_1' &= 2\alpha\gamma\varkappa (E_p \sigma_2 - E_s'' s_2) \\
N D_2' &= 2\alpha\gamma\varkappa (E_p \sigma_1 + R_s'' s_1) \\
N R_p'' &= 0 \\
N R_p' &= E_p (\sigma_1 \delta_2 - \delta_1 \sigma_2) + E_s'' (s_1 \delta_2 + s_2 \delta_1) \\
N R_s' &= -E_p (\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1) \\
N R_s' &= E_s' (s_1 \delta_2 + s_2 \delta_1), \text{ dabei:} \\
N &= s_1 \sigma_2 + \sigma_2 s_1 .
\end{aligned} \qquad 18.$$

Nimmt man noch in Rücksicht auf die Beobachtungen, welche dies wahrscheinlich zu machen scheinen: $\varkappa = 1$, d. h. $p' = p_1 = 0$, so werden obige Werthe unter Einführung der Winkel φ φ_1 φ_2 der einfallenden und der beiden gebrochenen Wellennormalen:

$$\begin{aligned}
D_1'' &= +E_s' \frac{\sin 2\varphi}{(\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi-\varphi_2))\sin(\varphi+\varphi_1)} \\
D_1' &= -\frac{(E_s''-E_p\cos(\varphi-\varphi_2))\sin 2\varphi}{(\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi-\varphi_2))\sin(\varphi+\varphi_1)} \\
D_2'' &= -E_s' \frac{\sin 2\varphi}{(\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi-\varphi_2))\sin(\varphi+\varphi_2)} \\
D_2' &= +\frac{(E_s''+E_p\cos(\varphi-\varphi_1))\sin 2\varphi}{(\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi-\varphi_2))\sin(\varphi+\varphi_2)} \\
R_s'' &= +E_s'' \frac{(\cos(\varphi+\varphi_1)+\cos(\varphi+\varphi_2))\sin(\varphi-\varphi_2)}{(\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi-\varphi_2))\sin(\varphi+\varphi_2)} \\
&\quad + E_p \frac{(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)\sin 2\varphi}{(\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi-\varphi_2))\sin(\varphi+\varphi_1)\sin(\varphi+\varphi_2)} \\
R_s' &= +E_s' \frac{(\cos(\varphi+\varphi_1)+\cos(\varphi+\varphi_2))\sin(\varphi-\varphi_2)}{(\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos(\varphi-\varphi_2))\sin(\varphi+\varphi_2)} \\
R_p'' &= 0 \\
R_p' &= -E_p \frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\sin(\varphi+\varphi_1)} = -E_p \frac{\sin(\varphi-\varphi_2)}{\sin(\varphi+\varphi_2)} .
\end{aligned} \qquad 19.$$

Verschwindet der Unterschied zwischen φ_1 und φ_2, so muss im reflectirten Licht auch die Wirkung der Circularpolarisation verschwinden. Man erhält in der That:

$$R_s'' = E_s'' \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1)}, \qquad R_s' = E_s' \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_1)},$$

$$R_p'' = 0, \qquad R_p' = -E_p \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\varphi + \varphi_1)}.$$

Zugleich wird: $D_1'' + D_2'' = 0$

und: $$D_1' + D_2' = E_p \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_1)} = D_p,$$

d. h. die Amplitude der gebrochenen Welle parallel der Einfallsebene, aber:

$$D_1'' - D_2'' = E_s \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi + \varphi_1)} = D_s',$$

$$-D_1' + D_2' = E_s'' \frac{\sin 2\varphi}{\cos(\varphi - \varphi_1)\sin(\varphi + \varphi_1)} = D_s''$$

die Amplituden der beiden senkrecht zur Einfallsebene schwingenden um $\lambda/4$ gegeneinander verzögerten Componenten. Alles ist in Uebereinstimmung mit den für zwei isotrope Medien direct ableitbaren Resultaten, wodurch eine gewisse Prüfung der erhaltenen Formeln (19) gegeben ist.

Diese selbst zeigen, dass das an circularpolarisirenden Medien reflectirte Licht elliptisch polarisirt ist, und zwar dadurch, dass die einfallende Welle, welche parallel zur Einfallsebene schwingt, im reflectirten Lichte eine Componente normal zur Einfallsebene hervorruft, die gegen die einfallende Welle um $\lambda/4$ verzögert oder beschleunigt ist. Diese Ellipticität ist daher am grössten, wenn das einfallende Licht parallel der Einfallsebene schwingt, verschwindet aber, wenn es normal dazu schwingt. Die Rotationsrichtung hängt davon ab, ob die Substanz die Polarisationsebene des senkrecht hindurchgehenden Lichtes links oder rechts dreht, d. h. $\varphi_2 \gtrless \varphi_1$ ist.

Die Vergleichung der Resultate mit der Beobachtung dürfen bei der ausserordentlichen Kleinheit, welche die Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ bei allen bekannten Körpern besitzt, nicht ohne Schwierigkeiten sein.

Göttingen, December 1883.

XVI. *Duplik gegen Hrn. E. Ketteler; von W. Voigt.*

Hr. Ketteler hat auf meine Kritik[1]) der Grundgleichungen seiner Lichttheorie ausführlich geantwortet.[2]) Seine Erwiderung veranlasst mich, auf einige Punkte zurückzukommen, über welche ich mich früher vielleicht zu kurz oder undeutlich geäussert habe. Zur Aufgabe irgend eines meiner Bedenken sehe ich mich indess nicht veranlasst.

1. Ich habe Elasticitätstheorie die Anwendung der allgemeinen Dynamik auf diejenigen Massensysteme genannt, welche wir „gebräuchlicher Weise" als elastische Körper ansehen.[3]) Hr. Ketteler monirt die Unklarheit dieses Ausdruckes[4]), ich bemerke daher zur Erläuterung Folgendes. Die „gebräuchliche" Anschauung ist die atomistische im weitesten Sinne des Wortes, nach welcher die Körper aus kleinsten Theilchen bestehen, die nicht etwa materiell miteinander verbunden sind, sondern sich durch ihre Wechselwirkungen im

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 691. 1883.

2) E. Ketteler, Wied. Ann. **21.** p. 178. 1884. In dieser Replik sind einige persönliche Bemerkungen des Hrn. Ketteler — so über das Ueberraschende meines Angriffs, über meine frühere Billigung seiner Theorie (die durch ein unvollständiges Citat belegt wird), über meine wiederholten „plötzlichen" und „eiligen" Stellungswechsel — in hohem Grade geeignet, eine irrige Auffassung der Sachlage zu veranlassen. Ich beschränke mich ihnen gegenüber auf die Bemerkungen, dass ich mit der (Hrn. Ketteler zuvor angekündigten) Publication meiner Kritik erst vorgegangen bin, nachdem eine private Mittheilung meiner Bedenken lange Zeit unbeantwortet geblieben war, und dass ich von der ersten bis zur letzten darauf bezüglichen Publication meine Ansichten unverändert beibehalten habe, was aus diesen selbst zur Genüge hervorgehen dürfte.

3) W. Voigt, l. c. p. 691. Von einer Beschränkung auf feste Körper ist nicht die Rede. Die ganze Elasticitätstheorie gilt auch für Flüssigkeiten und Gase, aber mit speciellen Werthen der Constanten. Nur sind solche Verschiebungen auszuschliessen, welche die Theilchen aus dem Bereich ihrer stabilen Ruhelagen herausführen, denn diese gehören in die Hydrodynamik.

4) E. Ketteler, l. c. p. 181 u. f.

Gleichgewicht halten. Dieser gebräuchlichen Anschauung widersprechen die Theorien der Hrn. Lommel und Ketteler, indem sie in den bewegten Molecülen ruhende Massen annehmen, gegen welche eine Reibung proportional mit der absoluten Geschwindigkeit und eine Anziehung proportional mit der absoluten Verschiebung stattfindet. Ruhen könnten nur Massen, die gegenüber den bewegten unendlich gross sind, und diese lässt innerhalb eines Molecüles die Chemie nicht zu.

2. Meinen Nachweis, dass seine Hauptgleichungen mit der Anwendung der Dynamik auf ein solches Massensystem nicht übereinstimmen, beantwortet Hr. Ketteler mit der Behauptung[1]), dass die von mir hierfür aufgestellten Formeln:

$$(1) \qquad m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = X + A, \quad m'\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} = X' - A \text{ etc.}$$

unrichtig wären und lauten müssten:

$$(2) \qquad m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = X + A, \quad m'\frac{\partial^2\xi'}{\partial t^2} = X' + A' \text{ etc.}$$

Was damit für seine Theorie gewonnen sein soll, ist mir unerfindlich, denn seine Gleichungen stimmen hiermit ebenso wenig wie mit den vorigen. Ueberdies ist der Beweis von Hrn. Ketteler falsch, denn er beruht darauf, dass $X = A = X'$ werden könnte. Nun aber sind A die Wechselwirkungen der ponderabeln und Aethermassen desselben Volumenelementes — wie ich ausdrücklich eingeführt habe, um von den auch von mir aufgestellten allgemeinsten Formeln (2) zu den specielleren (1) zu kommen, und wie Hr. Ketteler selbst wörtlich anführt — und X und X' die Wirkungen der das Volumenelement umlagernden gleichartigen Massen; die Ketteler'sche Annahme $X = A = X'$ ist also unmöglich.

Dass die Annahme $A = -A'$ die allgemeinste wäre, ist nicht zu behaupten, aber sie entspricht genau der Vorstellung, dass zwischen Aether und Materie Reibungskräfte wirken, wie sie Hr. Lommel und auch Hr. Ketteler —

1) E. Ketteler, l. c. p. 183.

denn seine nirgends eingeführten Wechselwirkungen, welche analog der Wirkung einer Flüssigkeit auf eingetauchte Körper gedacht sind, können am Ende keine anderen sein — einführt. Die Bemerkung des Hrn. Ketteler hat mich aber darauf aufmerksam gemacht, dass die Basirung meiner Lichtheorie für durchsichtige Media[1]) noch etwas allgemeiner stattfinden kann, als bisher geschehen; man kann nämlich in den Ausdrücken (5)—(8) für die Wechselwirkungen[2]) die Coëfficienten der Verschiebungen der ponderabeln und Aethermassen UVW und uvw verschieden wählen. Auf die Resultate hat dies aber keinen Einfluss, da die UVW verschwindend klein gesetzt werden.

3. Ich habe es als falsch bezeichnet, dass Hr. Ketteler die Wechselwirkungen zwischen Materie und Aether nirgends einführt und doch die Methode der Elasticitätstheorie benutzen will. Hr. Ketteler nennt das „schulmässige Sonderung von Elasticität und Hydrodynamik". Ich muss meine Ansicht daher ausführlicher erörtern.

Wenn Hr. Ketteler die betr. Wechselwirkungen nicht in die Hauptgleichungen einführt (was die Methode der Elasticitätstheorie wäre), so müssten sie statt dessen (wie in der Hydrodynamik) in Grenzgleichungen für die Oberfläche der ponderabeln Molecüle Ausdruck gewinnen, welche die Undurchdringlichkeit der Molecüle und die Folge der an deren Oberfläche stattfindenden Reibung aussprechen. Wenn aber Hr. Ketteler überhaupt diese Wechselwirkungen nirgends einführt, so geht er gar nicht auf den Grund der ganzen Erscheinung zurück, liefert also keine Theorie, sondern stellt einfach Differentialgleichungen auf, welche von ihm gewünschte Integrale geben. Darauf deuten auch die Verwandlungen hin, welche die Ketteler'schen Grundgleichungen im Laufe der Zeit erfahren haben. Ueberdies scheint dies Hr. Ketteler neuerdings trotz scheinbaren Fussens auf dem d'Alembert'schen Princip eingestehen zu wollen, wenigstens klingen die Worte seiner Replik auf p. 187—188, p. 197 (oben)

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 873. 1883.
2) W. Voigt, l. c. p. 881 u. f.

und p. 199 sehr anders als die „zwingenden Beweise“ und „directen Ableitungen aus der Elasticitätstheorie“ in den „Optischen Controversen“.[1])

4. Ich habe die Ketteler'sche Grenzgleichung für die Normalcomponente der Verschiebung $\zeta_h \gtrless \zeta_k$ mit der Annahme der gleichen Dichte und der Incompressibilität des Aethers unvereinbar genannt. Hr. Ketteler hat dafür nur die Worte: „Das ist doch in der That eine eigenthümliche Deutung der aus der analytischen Formulirung dieses Principes sich ergebenden Consequenzen“. Hiernach scheint es, als wollte Hr. Ketteler das Princip der Incompressibilität nicht überall anerkennen (ob mit Nebengedanken über seine strenge Gültigkeit oder nicht, ist gleichgültig), sondern nur wo es ihm passt. In jedem Falle sehe ich mich genöthigt, den Nachweis der richtigen Grenzgleichungen nachträglich beizubringen.

Construirt man über einem Element der Grenzfläche nach beiden Seiten hin einen sehr niedrigen Cylinder von der Grundfläche o, der sich mit den ponderabeln Massen der Grenze zugleich bewegen mag, so erfordert das Princip der Incompressibilität, dass gleichviel Aether in diesen Cylinder ein- und austritt, d. h. (falls man die Grösse der ponderabeln Molecüle gegen ihre Zwischenräume vernachlässigen kann):

$$o m_h (\bar{\zeta}_h - \bar{\zeta}_h') = o m_k (\bar{\zeta}_k - \bar{\zeta}_k'),$$

wo m_h und m_k die Dichtigkeit des Aethers auf beiden Seiten der Grenze bezeichnet. Da für zwei zusammenhängende ponderable Körper $\zeta_h' = \zeta_k'$ ist, und Hr. Ketteler $m_h = m_k$ setzt, so folgt also:

$$\bar{\zeta}_h = \bar{\zeta}_k.$$

Aus Hrn. Ketteler's Grenzgleichungen folgt $n_h \bar{\zeta}_h = n_k \bar{\zeta}_k$, wo n_h, n_k die Brechungscoëfficienten beider Medien sind. Dies ist nicht zu rechtfertigen. Kleine Abweichungen von der an-

1) E. Ketteler, Wied. Ann. 18. p. 404 u. 631. 1883.

gegebenen Formel erklären sich, wenn man die Volumina der ponderabeln Molecüle inclusive der an ihnen condensirten Aetherhülle nicht gegen die Intervalle vernachlässigt. Dann wird m_h und m_k nicht das ganze Quantum Aethers in der Volumeneinheit, sondern nur das an der Schwingung theilnehmende, kann also bei gleicher Dichtigkeit verschieden, ja selbst von der Schwingungsdauer abhängig sein, wie ich dies in meiner Theorie des Lichtes benutzt habe.[1])

5. Hr. Ketteler hat, obwohl er schwingende ponderable Massen einführt, für dieselben keine Grenzbedingungen. Er erwidert meine bezügliche Einwendung (ähnlich wie unter Nr. 2) nur mit der Behauptung, dass die von mir postulirten falsch seien.[2]) Wie in jenem Falle wäre seiner Theorie damit nicht aufgeholfen und ist überdies seine Behauptung unrichtig. Er sagt, die Bedingungen:

$$\overline{\xi_h}' = \overline{\xi_k}', \quad \overline{\eta_h}' = \overline{\eta_k}', \quad \overline{\zeta_h}' = \overline{\zeta_k}'$$

würden an der freien Oberfläche ergeben:

$$\overline{\xi_h}' = 0, \quad \overline{\eta_h}' = 0, \quad \overline{\zeta_h}' = 0.$$

Bekanntlich verlieren dort die Gleichungen ihre Bedeutung, die Verrückungscomponenten ξ_k', η_k', ζ_k' werden unbestimmt; ich habe sie aber auch ausdrücklich nur für zusammenhängende Körper aufgestellt.

6. Hr. Ketteler adoptirt den Kirchhoff'schen Grundsatz in der etwas unklaren Form, „dass in der Grenze keine Arbeit geleistet wird, welche als solche für die Wellenbildung verloren ginge", und bezieht sich dabei auf das Princip der Energie. Ich habe nachgewiesen, dass seine bezügliche Formel dem Princip der Energie widerspricht und nicht das ausdrückt, was er in seinen Worten sagt, weil sie nur einen Theil der in der Grenze geleisteten Arbeit enthält. Hr. Ketteler replicirt hierauf, dass er jene Formel ausdrücklich nicht „mit", sondern „nach" Kirchhoff aufgestellt

1) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 902 u. 904. 1883.
2) E. Ketteler, Wied. Ann. **21.** p. 195. 1884.

hätte, — was meines Erachtens kein Unterschied ist, da er den Inhalt des Principes ausdrücklich adoptirt, — und sucht seine Gleichung durch eine ganz neue und eigenthümliche Hülfsannahme zu rechtfertigen. Er denkt sich nämlich im Körper unendlich viele parallele Schichten freien Aethers mit solchen abwechseln, die ponderable Materie enthalten. Ich verliere kein Wort über diese Annahme selbst und ihr Verhältniss zu den übrigen Hauptgleichungen Hrn. Ketteler's, weise vielmehr nur darauf hin, dass sie den Zweck nicht erfüllt, zu welchem sie ersonnen ist. Wendet man nämlich das Princip der Energie[1]) auf alle Oberflächen der körperlichen Schichten, auch die im Inneren des ganzen Körpers liegenden an, so heben sich die auf letztere bezüglichen Theile der Arbeit gegenseitig hinweg, und es bleibt ebendieselbe Gleichung übrig, die ich der Ketteler'schen gegenübergestellt habe.

Gegen diese selbst macht Herr Ketteler einmal geltend, dass ich zu ihrer Ableitung vier Druckseiten brauche(!), und schliesst hieran die durch nichts gestützten Behauptungen, dass ich die Ableitung nicht streng zu Ende geführt habe und die ponderabeln Theile ruhend annähme.

7. Gegen meine Kritik der Willkür, diejenigen Grenzgleichungen, welche unter der Annahme entwickelt sind, dass einfallende Schwingungen parallel oder senkrecht zur Einfallsebene nur eben solche erregen, auf krystallinische Medien anzuwenden, führt Herr Ketteler p. 636—642 seiner „optischen Contraversen" an; ich kann nicht finden, dass an jener Stelle irgend etwas diesen Schritt Begründendes enthalten ist.

Das Vorstehende genüge, um die an die Spitze dieses Artikels gestellte Bemerkung zu begründen, dass ich meine Einwände gegen Hrn. Ketteler's Replik sämmtlich aufrecht erhalte.

Weitere Wandelungen der Ketteler'schen Theorie, wie

1) Es ist merkwürdig, dass Hr. Ketteler so oft das Princip der Energie citirt, aber nie wirklich bildet, um die angeblichen Folgerungen daraus abzuleiten.

sie sich bereits wieder ankündigen [1]), Schritt für Schritt kritisch zu verfolgen, halte ich mich nicht für verpflichtet.

Wenn ich mich dem Standpunkte des Hrn. Ketteler gegenüber ablehnend verhalte und an einer anderen Stelle gesagt habe [2]), dass ich nach dem Stand der Molecularmechanik die Zeit für eine strenge Theorie der Absorptionserscheinungen des Lichtes (im weitesten Sinne des Wortes) noch nicht für gekommen halte, so ist das selbstverständlich nicht so zu verstehen (wie Herr Ketteler durchblicken lässt [3]) als hielte ich jene Gebiete überhaupt nicht für Arbeitsfelder der Physik. Von der Beobachtung ganz abgesehen, welche diese Gebiete, soviel es ihr möglich ist, aufzuklären hat, ist es gewiss von grosser Wichtigkeit, die empirischen Resultate in Gesetze und Formeln zu fassen, und dass ich dies vollständig anerkenne, zeigen wohl am klarsten die zur Prüfung auch des Ketteler'schen Dispersionsgesetzes angestellten neuen Beobachtungen des Hrn. Johst [4]), welche ich veranlasst habe. Ebenso ist es von Interesse, diejenigen Differentialgleichungen aufzusuchen, welche auf bestimmte empirische Gesetze führen. Aber man darf die so errathenen Differentialgleichungen nun nicht als eine strenge Theorie der betreffenden Erscheinungen hinstellen, am wenigsten wenn sie sich mit erprobten allgemeineren Gesetzen im Widerspruch befinden. Und eben dies ist das von mir bekämpfte Verfahren des Hrn. Ketteler.

Göttingen, Januar 1884.

---

1) E. Ketteler, Wied. Ann. **21.** p. 199. 1884.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **19.** p. 873. 1883.
3) E. Ketteler, Wied. Ann. **21.** p. 198. 1884.
4) W. Johst, Wied. Ann. **20.** p. 47. 1883.

XVII. *Ueber den Apparat zur Untersuchung und Brechung des Lichtes von Ibn al Haitam; von Eilhard Wiedemann.*

Von den ältesten Instrumenten, die zur Bestimmung der Brechung im Wasser benutzt wurden, sind uns von denjenigen von Ptolemäus und Al Hazen (Ibn al Haitam) Beschreibungen erhalten; dieselben unterscheiden sich voneinander etwas, wenn auch nicht wesentlich. Von dem Apparat des Ibn al Haitam enthält der schon mehrfach citirte Codex in Leyden Abbildungen, die ich mir mitzutheilen erlaube. Die erste Figur gibt die Vorder-, die zweite die Hinteransicht.

Die Erklärung der Figur ergibt sich aus der Beschreibung des Instrumentes, wie ich dieselbe in etwas gekürzter Form nach der lateinischen Uebersetzung von Risner[1]) wiedergebe, der arabische Text stimmt vollkommen mit derselben überein. Bei der Zeichnung ist zu beachten, dass die ausserhalb des Kreises mit dem Durchmesser جح gelegenen Theile senkrecht auf der Ebene der Zeichnung stehen, ebenso wie das Trapez bei *e* mit der Oeffnung *d*.

Die Beschreibung lautet:

Man nimmt eine runde, ziemlich starke Scheibe aus Kupfer von wenigstens einer Elle Durchmesser. Sie muss einen Rand haben, der senkrecht auf ihrer Oberfläche steht und wenigstens drei Finger breit ist. In der Mitte des Rückens der Scheibe muss sich eine kleine runde Säule (Fig. 2 *b*) von wenigstens drei Finger Länge befinden, die senkrecht auf der Oberfläche der Scheibe steht.

(In der Figur ist die Scheibe der innere Kreis, der Rand der an diesen sich nach aussen anschliessende Theil.)

Dieses Instrument befestigen wir so auf der Drehbank, auf der die Drechsler ihre Kupfergeräthe drehen, dass die eine Spitze derselben auf die Mitte der Scheibe, die andere auf die Mitte der kleinen Säule kommt, und drehen den Apparat so lange ab, bis die Ränder innen und aussen

1) Opticae thesaurus Al Hazen. Arabis libri septum nunc primum edita a. F. Risnero, Basileae 1572. p. 231—233.

vollständig kreisrund und glatt sind, und die kleine Säule auch kreisrund ist. Hierauf ziehen wir auf der inneren Oberfläche des Instrumentes zwei aufeinander senkrechte Durchmesser, dann bezeichnen wir einen Punkt auf der Basis des Randes des Instrumentes, dessen Abstand vom Ende eines der beiden Durchmesser eine Fingerbreite beträgt. Von diesem Punkte aus ziehen wir einen dritten

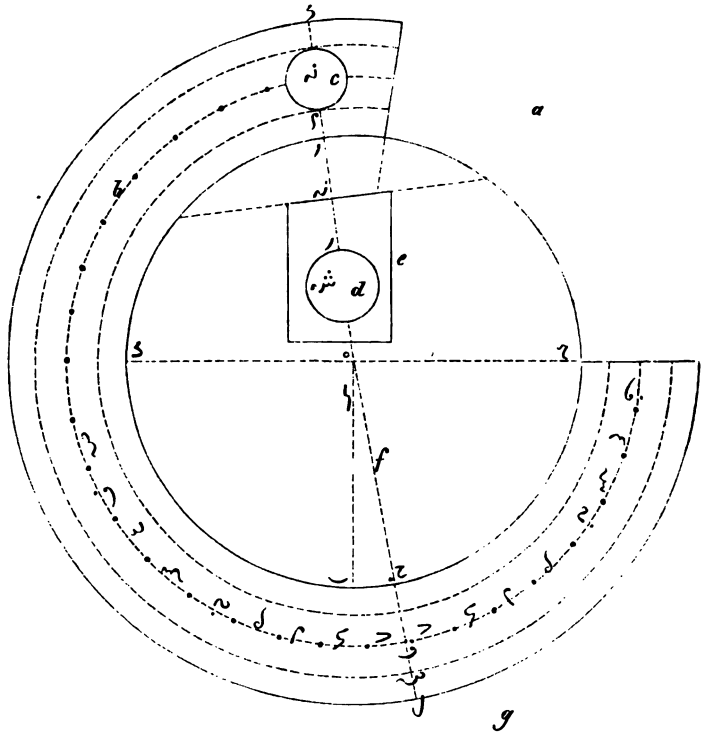


Fig. 1.

Durchmesser durch die Mitte der Scheibe. Dann ziehen wir von den beiden Enden dieses Durchmessers aus zwei Linien auf dem Rande, senkrecht zur Oberfläche der Scheibe. Auf der einen dieser beiden Linien bezeichnen wir von der Scheibe aus drei etwa um die Länge eines halben Gerstenkornes voneinander abstehende Punkte und ziehen auf der

Drehbank durch diese Punkte drei voneinander gleichweit abstehende Kreise, die natürlich die gegenüberliegende kurze Linie gleichfalls in drei gleichweit voneinander abstehenden Punkten schneiden. Dann theilt man den mittleren Kreis in 360 Grade und womöglich noch in Minuten. In den Rand bohrt man ein kreisförmiges Loch, dessen Mittelpunkt der mittlere der obigen drei Punkte ist, und dessen Durchmesser gleich dem Abstand der beiden äussersten ist. Nun nehmen wir ein mässig dünnes, genau rechteckiges ebenes Stück Blech *d* von der Höhe des Randes und etwa gleicher Breite. Von der Mitte der einen Seite ziehen wir eine zu

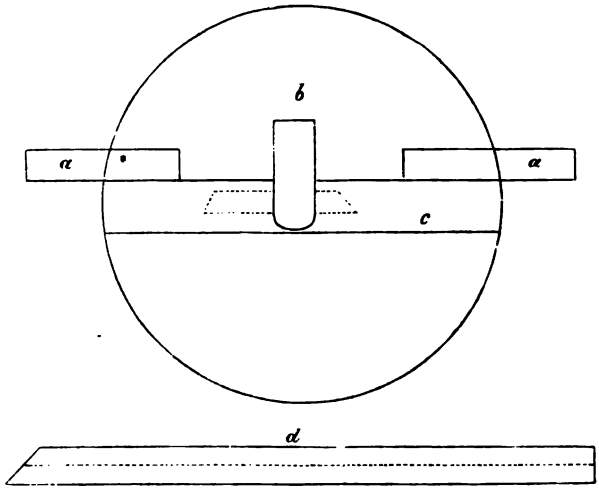


Fig. 2.

dieser senkrechte Linie, auf der wir drei Punkte, die gleichweit voneinander abstehen, bezeichnen. Ihr Abstand *a* sei dabei gleich den Abständen je zweier der Kreise auf dem Rande. Wir bohren dann in die Platte ein rundes Loch, dessen Mittelpunkt dem mittleren der obigen Punkte entspricht, und dessen Radius gleich dem Abstande *a* ist. Wir erhalten so ein Loch, das vollkommen mit dem im Rande des Instrumentes correspondirt. Darauf sucht man den

Mittelpunkt des Radius, welcher den Mittelpunkt der Scheibe mit der Linie auf dem Rande verbindet, auf welcher sich das Loch befindet, und zieht durch ihn eine Senkrechte zu dem Radius; längs dieses befestigt man nun vollkommen fest das kleine Blech, sodass die Mitte desselben genau auf den Radius zu liegen kommt, die kleine Oeffnung in ihr liegt dann genau derjenigen auf dem Rande gegenüber. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden Oeffnungen liegt in der Ebene des mittleren der beiden Kreise auf dem Rand, liegt parallel zu dem Durchmesser auf der Scheibe und verhält sich wie die Absehe beim Astrolab. Hierauf schneidet man aus dem Rande des Instrumentes dasjenige Viertel aus, welches an das Viertel sich anschliesst, in welchem sich das Loch befindet, und welches durch die zwei ersten Durchmesser bestimmt ist, und gleicht den Rand genau ab. Hierauf nimmt man ein quadratisches Stück Metall von eher mehr als einer Elle Länge und feilt die Flächen desselben möglichst senkrecht zu einander ab. In der Mitte derselben bohrt man ein Loch senkrecht zu der einen Fläche, sodass sich der obenerwähnte säulenförmige Theil schwierig in demselben drehen lässt. In dieses Loch setzt man den säulenförmigen Theil ein. Von dem Metallstück schneidet man soviel ab, dass es gleich steht mit dem Rande der Scheibe, und legt die beschnittenen Enden auf die Enden des Metallstückes und verbindet sie mit denselben.[1]) Zweckmässig ist es, durch das Ende der kleinen Säule, die aus der Oeffnung im quadratischen Stück hervorragt, einen kleinen Stift zu treiben.

Die Messungen werden so angestellt, dass man das Instrument bis zum Mittelpunkt ins Wasser taucht, der Verbindungslinie der beiden Oeffnungen verschiedene Neigungen gegen den Horizont gibt und den Mittelpunkt des Bildes unter dem Wasser bestimmt, wenn die Sonnenstrahlen eben die beiden Oeffnungen durchsetzen.

1) Dies dient dazu, damit man beim Einsenken des Apparates in ein Gefäss voll Wasser das Niveau desselben mit einem Durchmesser zusammenfallen lassen kann.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1884. ANNALEN № 4.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XXI.

I. *Ueber die Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand; von Gustav Hansemann.*

(Hierzu Taf. VI Fig. 1 u 2.)

Die Versuche, über welche hier berichtet werden soll, hatten den Zweck, die Theorie der Diffusion von Gasen durch poröse Diaphragmen zu prüfen, welche von Hrn. Stefan[1]) entwickelt worden ist. Derselbe behandelt die Theorie der Bewegung von Gasen durch poröse Körper als einen speciellen Fall der in seiner Abhandlung entwickelten, allgemeinen Theorie der Bewegung von Gasgemengen, indem er die poröse Substanz als ein Gas betrachtet, dessen Theilchen unbeweglich sind[2]), und gelangt dadurch für ein einzelnes, durch ein Diaphragma diffundirendes Gas zu denselben Gleichungen, welche früher schon von Hrn. Bunsen[3]) aufgestellt wurden, für zwei verschiedene, gleichzeitig diffundirende Gase dagegen zu wesentlich anderen Resultaten.

Zur Prüfung der Theorie für ein einzelnes Gas, namentlich in Bezug auf die von derselben geforderte Proportionalität zwischen der Diffusionsgeschwindigkeit und der Druckdifferenz auf den beiden Seiten der porösen Wand, sind schon vielfach Versuche gemacht worden; so von Hrn. G. Hüfner[4]), Hrn. Stefan[5]) und insbesondere von Hrn. Bunsen[6]). Dabei hat sich im allgemeinen die Richtigkeit des Proportionalitätsgesetzes innerhalb gewisser Grenzen der Druckdifferenzen ergeben; da indess die bei diesen Versuchen in Anwendung

1) Stefan, Wien. Ber. **63.** p. 111 u. f. 1871.
2) Siehe auch: Maxwell, Phil. Mag. (4) **20.** p. 21. 1860.
3) Bunsen, Gasometrische Methoden 2. Aufl. p. 267 u. f.
4) G. Hüfner, Wied. Ann. **16.** p. 253 u. f. 1882.
5) Stefan, l. c. p. 120.
6) Bunsen, l. c. p. 275.

gekommenen Druckdifferenzen nur sehr gering waren, so schien mir eine Prüfung durch Versuche, welche die Anwendung grösserer Druckdifferenzen gestatteten, geboten.[1])

Das Bunsen'sche Diffusiometer, welches meistens entweder in seiner ursprünglichen, oder in einer mehr oder weniger modificirten Gestalt benutzt worden ist, besteht bekanntlich aus einer Glasröhre, deren oberer Theil die poröse Substanz enthält, und deren anderes, offenes Ende durch Quecksilber oder durch eine andere Flüssigkeit abgesperrt wird. Während der Diffussion verändert sich das Gasvolumen beständig, der Druck soll aber constant erhalten werden; um dies zu erreichen, wird der Apparat continuirlich so gehoben oder gesenkt, dass die Höhendifferenz der Sperrflüssigkeit, aussen und innen, ungeändert bleibt. Die Schwierigkeiten dieser Operation wachsen in starkem Maasse mit der Vergrösserung der Druckdifferenz; ein Uebelstand, welcher der Anwendung grösserer Druckdifferenzen entgegensteht. Diffundiren gleichzeitig zwei verschiedene Gase durch das Diaphragma, so gesellt sich hierzu noch die Ungewissheit darüber, ob das Mischungsverhältniss der Gase auch in jedem Momente in den verschiedenen Theilen der Diffusionsröhre gleich ist, wie es die Theorie voraussetzt. Diese Umstände waren es hauptsächlich, welche mich veranlassten, ein Diffusiometer zu construiren, bei welchem das Gasvolumen constant blieb, während die sich verändernden Drucke gemessen wurden, und in dessen Räume Rührvorrichtungen zum Mischen der Gase angebracht waren.

Das in meiner mechanischen Werkstätte, vom Mechaniker Hrn. Schwarz, in vortrefflicher Ausführung hergestellte Diffusiometer ist auf Fig. 1 in ein Drittel der wirklichen Grösse und, ein Theil davon, in Fig. 2 in natürlicher Grösse abgebildet. Die Fig. 1 zeigt dasselbe theilweise, rechts, in der Vorderansicht, und zum anderen Theile, links, in einem Horizontalquerschnitte durch die Mitte. Zwischen den beiden

1) Die älteren Versuche von Graham (Pogg. Ann. 28. p. 353. 1833), bei denen die Druckdifferenzen bis zu einer Atmosphäre betrugen, bestätigen das Proportionalitätsgesetz nicht; sie waren aber in ihrer ganzen Anordnung nicht besonders geeignet zur Prüfung desselben.

gleichen und symmetrisch zu einander gelegenen Kammern, *A'* und *A''*, Fig. 1, liegt der Diffusionshahn *h*, dessen Durchlassöffnung bis auf zwei kleine, auf den beiden Seiten gelegene Räume, *o* auf der linken Seite, mit einem in der Oeffnung erhärteten und gut getrockneten Gypsdiaphragma *g* ausgefüllt war. Bei geöffnetem Diffusionshahne stehen also die Kammern *A'* und *A''* in Verbindung miteinander durch das poröse Diaphragma; bei dem Drehen des Hahnes um 90° gegen die in der Figur dargestellte Lage wird diese Verbindung aufgehoben und dagegen eine Verbindung durch das Diaphragma hergestellt zwischen den beiden mit den Hähnen *b* und *c* verschliessbaren Röhrenstücken *B* und *C*. Da die übrigen Theile des Apparates auf den beiden Seiten, links und rechts, gleich sind und symmetrisch liegen, so gilt alles, was hier weiter bei der Beschreibung von einer dieser beiden Seiten gesagt wird, in gleicher Weise für die andere.

Die aus der Fig. 1 ersichtliche Rührvorrichtung besteht aus einer vom aufgeschraubten Deckel der Kammer und einem Bügel getragenen, leicht drehbaren Axe mit vier Flügeln und einem Magnetstabe *m*. Diesem gegenüber, an der Aussenseite des Deckels, befindet sich auf einer anderen Axe ein ebensolcher Magnetstab *n*, welcher durch Drehung des Flügelrades *p* rotirt und dadurch die Rührvorrichtung im Inneren der Kammer in Thätigkeit setzt, ohne dass eine Verbindung der beiden Axen, bei der der nöthige luftdichte Verschluss der Kammer kaum zu bewerkstelligen gewesen wäre, besteht. In dem Deckel der Kammer ist ein Glasfensterchen angebracht, durch welches das Functioniren der Rührvorrichtung controlirt werden kann. Das Flügelrad *p* wurde durch ein Wassergebläse bewegt.

Ich will hier gleich bemerken, dass sich bei Diffusionsversuchen mit Wasserstoff und Sauerstoff, welche angestellt wurden, um den Einfluss des Rührens kennen zu lernen, wo daher einmal die Rührvorrichtung in Thätigkeit war und das andere mal nicht, unter sonst möglichst gleichen Umständen keine wesentlichen Unterschiede ergaben.

Jede der beiden Kammern ist mit einem Thermometer *q* versehen. Zur Messung des Druckes in den Kammern diente

der in Fig. 2 im Verticaldurchschnitte abgebildete Theil des Apparates. Die Kammer ist unten verschlossen durch die gewellte Stahlblechscheibe *v* mit dem Ansatze *w*. An diesem befindet sich, durch eine Schraube festgeklemmt, das obere Ende eines sehr feinen Stahlbandes *t*, dessen unteres Ende in ähnlicher Weise verbunden ist mit dem stärkeren und breiteren Stahlbande *u* und dem Spiegel *r*. Das Stahlband *t* ist ein Stück der Unruhfeder, das andere, *u*, ein Stück der Triebfeder einer Taschenuhr. Das federnde, an dem eisernen Träger *D* befestigte Stahlband *u* war so gestellt, dass das andere, *t*, bei den grössten stattfindenden Senkungen der Druckplatte *v* noch gespannt blieb, sodass *u* wie ein in einem Gelenke beweglicher kleiner Hebelarm wirkte.[1]) Die bei Druckveränderungen entstehenden Bewegungen von *v* wurden durch diese Einrichtung in vergrössertem Maassstabe auf den Spiegel *r* übertragen und dann in bekannter Weise an einer sich spiegelnden, in Millimeter getheilten, von dem Spiegel 2,8 m entfernten verticalen Scala mit einem Fernrohre beobachtet. Für jede Kammer war ein Fernrohr und eine Scala

1) Die Uebertragung der Bewegung der Druckplatte auf den Spiegel hat bei der Construction des Apparates die grössten Schwierigkeiten gemacht. Bei allen mir bekannten Einrichtungen dieser Art wirkt an irgend einer Stelle der eine Theil des Uebertragungsapparates nur durch lose Berührung auf den nächstfolgenden ein. Die sehr umfangreichen Vorversuche, welche ich mit solchen Einrichtungen anstellte, ergaben, dass die nach stattgefundenen Bewegungen der Druckplatte sich zeigenden Verrückungen der Gleichgewichtslage des Spiegels, d. i. diejenige Lage desselben, bei welcher die Druckplatte auf ihren beiden Seiten unter dem gleichen Drucke steht, weniger durch elastische Nachwirkung und dauernde molecuiare Veränderungen, als durch Verschiebungen der sich nur lose berührenden Theile des Apparates entstehen. Hierdurch veranlasst, wurde schliesslich die oben beschriebene Uebertragungseinrichtung angefertigt, bei welcher zwischen Druckplatte und Spiegel keine Discontinuität stattfindet. Sie functionirt ungleich besser, als eine der bekannten Einrichtungen dies bei meinen Versuchen gethan hatte. Bei Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage der Druckplatte, welche an der Scala, durch das Fernrohr gesehen, 250 mm betrugen und mehrere Stunden dauerten, trat unmittelbar nach Herstellung der Druckgleichheit auf den beiden Seiten der Platte die ursprüngliche Gleichgewichtslage meist bis auf 0,2 mm, höchstens bis auf 0,3 mm wieder ein.

aufgestellt, sodass die Drucke in den beiden Kammern von zwei Beobachtern gleichzeitig bestimmt werden konnten.

Es zeigte sich, dass die Regelmässigkeit im Gange des beschriebenen Apparates zum Messen der Drucke durch die kleinen Erschütterungen bei den Bewegungen der Rührvorrichtung befördert wurde, ohne wesentlichen Nachtheil für die Ablesungen. Infolge hiervon ist bei allen Diffusionsversuchen die Rührvorrichtung in Thätigkeit gesetzt worden, trotzdem dies, nach dem vorhin Gesagten, zur Mischung der Gase nicht durchaus erforderlich war.

Das Diffusiometer wurde in seinen Haupttheilen aus Messing angefertigt und auf einer Gypssäule mit eingegypsten Schrauben befestigt.

Die Röhre *d*, Fig. 1, und die entsprechende der anderen Kammer standen in Verbindung mit einem Quecksilbermanometer, welches zunächst dazu diente, die Reductionsfactoren zur Umrechnung der an den Scalen beobachteten Drucke in Quecksilberdruck zu bestimmen, und sodann den Zweck hatte, auf indirectem Wege die direct nicht gut zu messenden Volumen der Kammern zu finden. Zu dem letzteren Zwecke war zwischen dem Diffusiometer und dem Manometer noch ein grösseres Glasgefäss, mit einem Glashahn auf der Seite des Diffusiometers, angebracht und das Volumen zwischen diesem Glashahn und einem Striche der auf den Glasröhren des Manometers befindlichen Theilung mit Quecksilber ausgemessen worden. Zur Bestimmung des Druckes am Manometer diente ein in einer Entfernung von 2,5 m aufgestelltes Kathetometerfernrohr.

Die Röhrenstücke *B* und *C*, sowie die vorderen an den Kammern angebrachten, mit Hähnen versehenen Röhren *e'* und *e''*, Fig. 1, standen in Verbindung mit Trocken- Reinigungs- und Gasentwickelungsapparaten, mit einer Stiefelluftpumpe, einer Quecksilberluftpumpe und einer Druckpumpe, und das System der Röhrenverzweigungen und Hähne war so eingerichtet, dass jede der Kammern *A'* und *A''*, sowie das Gypsdiaphragma, einzeln mit diesen Apparaten in Communication gesetzt werden konnten. Die verschiedenen Röhren waren

untereinander, soweit die Theile des Apparates vollkommen luftdicht schliessen mussten, mit Guttapercha verbunden.

Mit Hülfe der beschriebenen Einrichtungen war es leicht, die beiden Kammern und das poröse Diaphragma des Diffusiometers mit Gasen unter verschiedenem Drucke zu füllen, durch Drehen des Diffusionshahnes zu einer bestimmten Zeit die Diffusion zwischen den beiden Kammern anfangen zu lassen, und die dann sich verändernden Drucke der Zeit nach zu bestimmen, während die Gasvolumina constant blieben.[1])

Was nun die Theorie der hierbei in Betracht kommenden Diffusionsvorgänge betrifft, so hat Hr. Kirchhoff[2]), von den Differentialgleichungen des Hrn. Stefan ausgehend, das Integral dieser Gleichungen aufgestellt für den Fall, dass nur ein Gas durch das Diaphragma diffundirt und letzteres im Anfange mit dem gleichen Gase, unter gleichem Drucke gefüllt war, wie eine der beiden Kammern. Sodann hat derselbe, für den Fall zweier Gase, auf Grund der Theorie des Hrn. Stefan, Gleichungen entwickelt, aus denen, mit Hülfe der Diffusionscoëfficienten der beiden Gase gegen das Gypsdiaphragma, der Diffusionscoëfficient für die freie Diffusion der beiden Gase unter einander bestimmt werden kann. Diese Gleichungen sind zur Prüfung der Theorie durch die angestellten Versuche benutzt worden.

Vor den eigentlichen Diffusionsversuchen mussten die in den Gleichungen vorkommenden Constanten des Diffusiometers, sowie die Factoren zur Reduction der Spiegelablenkungen in Quecksilberdruck bestimmt werden. Diese Constanten sind:

V', das Volumen der Kammer A',
V'', „ „ „ „ A'',

beide gemessen durch die Länge einer Röhre, welche das Volumen von A', resp. A'' besitzt, und deren Querschnitt gleich dem Querschnitte des Diaphragmas ist; sodann:

1) Die Veränderung des ungefähr 138 ccm betragenden Volumens einer Kammer durch die Bewegungen der Druckplatte betrug bei den Versuchen nicht über 0,03 ccm und durfte daher vernachlässigt werden.

2) Kirchhoff, Wied. Ann. 21. p. 563. 1884.

α, der Bruchtheil des Volumens des porösen Körpers, den die Poren einnehmen, und

Δ, die Länge des cylinderförmigen Diaphragmas.

Um die Volumina der Kammern zu finden, war vorher der Rauminhalt des Röhrensystemes zwischen dem Diffusiometer und dem an dem Glasgefässe des Quecksilbermanometers befindlichen Glashahn zu bestimmen. Dies geschah, indem zunächst das Röhrensystem und zugleich der durch den Glashahn damit communicirende, mit Quecksilber ausgemessene Raum des Manometers möglichst luftleer gemacht, hierauf der Glashahn geschlossen und das Röhrensystem mit Luft unter dem Drucke der Atmosphäre gefüllt wurde. Nachdem der Barometer- und Manometerstand, sowie die nöthigen Temperaturen gemessen waren, wurde das Röhrensystem durch die hinteren Hähne des Diffusiometers von diesem abgeschlossen, alsdann der zum Manometer führende Glashahn geöffnet und aufs neue Druck und Temperatur bestimmt. Aus diesen Messungen liess sich in bekannter Weise der Rauminhalt des Röhrensystemes berechnen. Drei Bestimmungen ergaben dafür:

51,209, 51,030, 51,068 ccm,

also im Mittel: 51,102 ccm.

Mit Hülfe dieses Werthes konnten die Volumina der Kammern in derselben Weise gefunden werden. Ich erhielt bei drei Bestimmungen das Volumen der Kammer A':

135,77, 135,88, 135,52, im Mittel: 135,72 ccm

und das der Kammer A'':

139,02, 139,04, 139,12, im Mittel: 139,06 ccm.

Die vorstehenden Messungen waren gemacht bei Temperaturen zwischen 18,5 und 19,5° C., wogegen bei den Diffusionsversuchen die Temperaturen nur 13—14° C. betrugen. Durch eine kleine hierfür angebrachte Correction, und nach Berücksichtigung der bei dem Oeffnen des Diffusionshahnes zu den gemessenen Volumina hinzutretenden kleinen Räume in der Oeffnung dieses Hahnes, *o* Fig. 1 für A', werden die obigen Werthe um 0,10 ccm vergrössert, und es folgen alsdann aus denselben und aus dem Querschnitte des Diaphragmas, welcher 0,6081 qcm beträgt, die Werthe der Constanten:

$V' = 223{,}35$ cm, $V'' = 228{,}84$ cm.

Durch directe Messung ergab sich die Constante:

$$\Delta = 2{,}485 \text{ cm},$$

und aus dem in ähnlicher Weise, wie das Volumen der Kammern bestimmten Volumen der Poren des Diaphragmas und den angegebenen Dimensionen desselben die Constante:

$$\alpha = 0{,}46.$$

Die letztere kann keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit machen. Bei Anwendung von Sauerstoff ergab sich schon ein um ungefähr acht Procent grösserer Werth, als bei Anwendung von Wasserstoff, was auf eine Mitwirkung von Absorptionserscheinungen schliessen lässt. Indess spielt die Constante α bei der Berechnung der Versuche mit zwei Gasen gar keine, und bei einem einzelnen Gase nur eine so geringe Rolle, dass noch grössere als acht Procent betragende Abweichungen keinen wesentlichen Einfluss auf die Resultate haben.

Die Factoren zur Reduction der Spiegelablenkungen in Quecksilberdruck erhielt ich, indem gleichzeitig jene Ablenkungen für die beiden Kammern und der Druck am Quecksilbermanometer gemessen wurden, während in den Kammern und der mit denselben communicirenden Röhre des Manometers verschiedene Drucke, zwischen 0 und 1000 mm Quecksilberhöhe, hergestellt waren. Aus diesen Messungen ergaben sich alsdann, durch Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, die Constanten μ und ν der Gleichung:

$$H = \mu d + \nu d^2,$$

in welcher H die auf 0^0 C. reducirte Höhe der die Druckdifferenz zwischen dem Gase in den Kammern und der äusseren Atmosphäre messenden Quecksilbersäule, und d die entsprechende Spiegelablenkung bedeutet. Die Messungen wurden bei annähernd der gleichen Temperatur vorgenommen, welche während der Diffusionsversuche bestand. Es ergab sich für die Kammer A', bei negativen Werthen von d:

$$H = 3{,}0947\, d + 0{,}000\,092\,02\, d^2,$$

mit Abweichungen der berechneten von den am Quecksilbermanometer beobachteten Drucken zwischen:

$$-1{,}0 \text{ und } +0{,}6 \text{ mm},$$

und bei positiven Werthen von d:

$$H = 3{,}1173\,d - 0{,}000\,317\,8\,d^2,$$

mit Abweichungen zwischen:

$$-0{,}3 \text{ und } +0{,}2 \text{ mm};$$

sodann für die Kammer A'', bei negativen Werthen von d:

$$H = 2{,}2546\,d + 0{,}000\,000\,202\,0\,d^2,$$

mit Abweichungen zwischen:

$$-0{,}6 \text{ und } +0{,}5 \text{ mm},$$

und bei positiven Werthen von d:

$$H = 2{,}2564\,d - 0{,}000\,097\,50\,d^2,$$

mit Abweichungen zwischen:

$$-0{,}3 \text{ und } +0.2 \text{ mm}.$$

Die vorstehenden Werthe von H dienten dazu, aus den Spiegelablenkungen und dem Barometerstande die Drucke in den Kammern des Diffusiometers zu berechnen.

Es wurden Diffusionsversuche angestellt mit den Gasen, Wasserstoff und Sauerstoff; sie fanden statt in einem Souterrainraume meines Laboratoriums, in welchem die Temperatur durch Regulirung einiger Gasflammen leicht innerhalb ziemlich enger Grenzen constant erhalten werden konnte. Sie betrug zwischen 13,4 und 13,8° C.

Der Wasserstoff wurde dargestellt aus käuflichem, sogenanntem chemisch reinen Zink und verdünnter Schwefelsäure unter Zusatz einiger Tropfen Platinchlorid behufs besserer Entwickelung des Gases; der Sauerstoff aus übermangansaurem Kali und Wasserstoffhyperoxyd. Jedes der Gase wurde in Waschflaschen gereinigt und vor dem Einströmen in das Diffusiometer in U-förmig gebogenen, abwechselnd mit wasserfreier Phosphorsäure und dünnen Schichten Glaswolle gefüllten Röhren getrocknet. Vor jedem der beiden Trockenapparate befand sich ein Dreiweghahn von Glas, welcher, je nach seiner Stellung, das aus der Entwickelungsflasche kommende und gereinigte Gas entweder in den Trockenapparat eintreten oder, diesen absperrend, unter Wasser in die Luft entweichen liess. Letzteres geschah stets ein bis zwei Stunden lang, bevor das Gas zum Diffusionsversuche gebraucht wurde. Die schliessliche Füllung eines der Räume des Diffusiometers mit einem der Gase

fand alsdann statt, indem der betreffende Raum und alle übrigen nicht durch Hähne auszuschliessenden Räume des Apparates bis zu dem oben erwähnten Dreiweghahn, mit den Luftpumpen dreimal möglichst leer gemacht und wieder mit dem Gase gefüllt wurden.

Ein am Trockenapparat angebrachtes Rohr mit Glaswolle gestattete, durch Oeffnen eines Hahnes, den bei der Füllung einer der Kammern oder des Gypsdiaphragmas mit Gas in diesen Räumen entstandenen Ueberdruck mit der äusseren Atmosphäre auszugleichen, ohne Gefahr des Eindringens von atmosphärischer Luft in das Diffusiometer.

19. November 1883.

Versuch mit Wasserstoff. Gypsdiaphragma mit Wasserstoff gefüllt. Temperatur in der Kammer A' } unverändert
„ „ „ „ A'' } 13,8° C.

Zeit	Auf 0° red. Barometerstand	Spiegelablesungen d. Kammern A'	A''	Spiegelablenkungen d'	d''	Drucke P'	P''	Constante z. Controle	Red. Zeit, in Min. t	$P'' - P'$	Diffusionscoëff. k
Ganzer Apparat mit Wasserstoff gefüllt unter dem Druck der Atmosphäre.											
10h 24′	—	465,3	511,7	—	—	—	—	—	—	—	—
Kammer A'' luftleer gemacht.											
10h 31′	759,1	465,5	175,3	0,0	−336,4	759,1	0,7	—	—	—	—
32	759,1	Diffusionshahn geöffnet				759,1	1,5	764,5	0	−757,6	—
35	759,1	434,1	218,5	− 31,4	−293,2	662,0	97,9	764,2	3	−564,1	27,54
37	759,1	417,7	240,5	− 47,8	−271,2	611,4	147,6	764,5	5	−463,8	27,53
40	759,0	398,3	266,6	− 67,2	−245,1	551,4	206,3	764,7	8	−345,1	27,60
46	759,0	378,0	300,3	− 92,5	−211,4	473,5	282,4	764,7	14	−191,1	27,65
53	758,9	357,4	321,2	−108,1	−190,5	425,5	329,4	764,9	21	− 96,1	27,63
11h 1′	758,9	348,7	332,8	−116,8	−178,9	398,5	355,4	764,5	29	− 43,1	27,77
12	758,8	344,1	339,1	−121,4	−172,6	384,4	369,7	765,1	40	− 14,7	27,70
Die Kammern mit der Atmosphäre in Verbindung gesetzt.											
15′	—	465,5	511,7	—	—	—	—	—	—	—	—
										Mittel	27,63

Nachdem die Räume des Diffusiometers in der für den beabsichtigten Versuch geeigneten Weise vorbereitet waren, wurde zu einer bestimmten Zeit der Diffusionshahn geöffnet, und dann, ausser den Thermometer- und Barometerständen,

die Spiegelablenkungen, und zwar diese gleichzeitig von zwei Beobachtern, sowie die Zeitspunkte dieser Beobachtungen bestimmt. Um die Beschreibung des Versuches zu vervollständigen, möge das vorstehende Protocoll (p. 554) eines solchen dienen.

Die Barometerstände sind nur zum Theil direct gemessen, die übrigen interpolirt. Die Spiegelablenkungen d' und d'' ergeben sich aus den Spiegelablesungen mit Hülfe derjenigen für die Gleichgewichtslage der Druckplatten, welche im Anfang und am Ende des Versuches notirt sind. Die Drucke P' und P'' folgen aus den durch die vorhin aufgestellten Reductionsformeln sich ergebenden Werthen von H und den Barometerständen. Die Constante, welche zur Controle des luftdichten Verschlusses während des Versuches dient, folgt aus der dabei stattfindenden Constanz der Summe aller in den Räumen des Diffusiometers enthaltenen Gasmengen. Sie ist in dem obigen Falle für die Zeit Null:

$$P_0' + \frac{V''}{V'} P_0'' + \frac{v}{V'} P_0',$$

und für die übrigen Zeiten:

$$P' + \frac{V''}{V'} P'' + \frac{v}{V'} \frac{P' + P''}{2},$$

wo v das Volumen der Poren des Diaphragmas bedeutet. Die kleinen Abweichungen untereinander, welche diese Werthe zeigen, überschreiten nicht die Fehlergrenzen bei der Reduction der Spiegelablenkungen.

Die Werthe von P' und P'' für die Zeit Null, also P_0' und P_0'' ergeben sich aus den unmittelbar vorher gemachten Messungen. Für diejenige Kammer, welche das Gas unter dem gleichen Drucke enthält, wie das Gypsdiaphragma und der kleine Raum des Diffusionshahnes, o Fig. 1, findet im Augenblicke des Oeffnens dieses Hahnes keine Druckänderung statt; in die leergepumpte Kammer strömt dagegen sofort das Gas aus dem entsprechenden kleinen Raume ein und erzeugt dadurch eine Druckerhöhung, welche noch nicht von der Diffusion herrührt. Sie beträgt in dem obigen Falle 0,8 mm.

Die letzte Columne enthält die aus den verschiedenen Druckdifferenzen $P'' - P'$ und entsprechenden Zeiten t sich ergebenden Werthe des Diffusionscoëfficienten k. Sie sind berechnet mit Hülfe der Gleichung:

$$k = \frac{\log (P_0'' - P_0') - \log (P'' - P') - 0{,}0004}{0{,}001\,545\, t},$$

welche aus der Gleichung (19) des Hrn. Kirchhoff folgt, wenn man darin nur das erste Glied der Summe berücksichtigt.[1]) Es wird dadurch:

$$P' - P'' = 2 (P_0' - P_0'') \frac{1}{N \sqrt{\lambda^2 + \beta'^2}} \left(\frac{\beta'}{\sqrt{\lambda^2 + \beta'^2}} + \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda^2 + \beta''^2}} \right) e^{-\frac{\lambda^2 a^2}{\Delta^2} t},$$

worin:

$$N = 1 + \frac{\beta'}{\lambda^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda^2 + \beta''^2},$$

$$a^2 = \frac{k}{\alpha}; \quad \beta' = \frac{\alpha}{V'} \Delta; \quad \beta'' = \frac{\alpha}{V''} \Delta$$

und $\lambda = 0{,}10063$, die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\left(\lambda - \frac{\beta' \beta''}{\lambda} \right) \operatorname{tg} \lambda = \beta' + \beta''$$

ist. Mit Benutzung der schon angeführten Werthe der Constanten V', V'', Δ und α ergibt sich hieraus die obige zur Berechnung von k benutzte Gleichung, in der die Logarithmen Briggische sind.

Die für Druckdifferenzen zwischen 564 und 15 mm gefundenen Werthe von k bei dem mitgetheilten Versuche sind so wenig voneinander verschieden, dass dadurch das Gesetz der Proportionalität von Diffusionsgeschwindigkeit und Druckdifferenz bestätigt wird. Das Gleiche zeigte sich bei einem zweiten Versuche mit Wasserstoff. Derselbe wurde so ausgeführt, wie der erste, nur war statt der Kammer A' die andere A'' mit Wasserstoff gefüllt. Ich erhielt aus demselben bei Temperaturen der Kammern zwischen 13,8 und 13,7° C. für die

Zeiten:	3	5	8	14	21	29	40 Min.
und Druck-differenzen:	561,1	460,0	341,7	187,8	93,4	42,3	13,9 mm
$k =$	27,86	27,88	27,87	27,96	27,99	27,96	28,06

im Mittel $k = 27{,}94$,

1) Das zweite Glied ist schon kleiner wie $1/10^{80}$ des ersten.

also aus beiden Versuchen zusammen im Mittel:

$$k = 27{,}78,$$

welcher Werth bei der Berechnung der späteren Versuche mit Wasserstoff und Sauerstoff als Diffusionscoëfficient des ersteren gegen das Gypsdiaphragma benutzt wurde.

In der Gleichung (19) des Hrn. Kirchhoff ist die anfängliche Gasvertheilung im Gypsdiaphragma berücksichtigt. Um ein Urtheil zu gewinnen über den Einfluss dieses Umstandes auf die Resultate, habe ich aus dem zweiten Versuche mit Wasserstoff die Werthe von k ebenfalls nach der Gleichung (8) des Hrn. Kirchhoff berechnet, bei welcher keine Rücksicht auf das Diaphragma genommen ist. Die Gleichung heisst:

$$P' - P'' = (P_0' - P_0'')\, e^{-\frac{k}{VJ}t},$$

wo:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V'} + \frac{1}{V''}.$$

Es ergeben sich damit die Werthe:

$k =$	27,92	27,90	27,88	27,94	27,97	27,94	28,05
gegen $k =$	27,86	27,88	27,87	27,96	87,99	27,96	28,06
für die Zeiten:	3	5	8	14	21	29	40 Minuten,

also nur sehr geringe Unterschiede.

Aus zwei Versuchen mit Sauerstoff, der erste bei Temperaturen zwischen 13,4 und 13,6° C., der zweite bei der Temperatur von 13,7° C. und ganz analog denjenigen mit Wasserstoff angestellt, folgte für die:

Zeiten:	3	8	16	28	44	64	89	119 Min.
und Druck-differenzen:	690,1	592,8	463,5	320,9	196,3	106,4	49,6	19,6 mm
$k =$	8,696	8,600	8,622	8,618	8,622	8,618	8,610	8,636

im Mittel $k = 8{,}628$.

und für die:

Zeiten:	3	8	16	28	44	64	89	119 Min.
und Druck-differenzen:	691,7	594,7	466,3	323,8	198,3	107,6	50,2	19,7 mm
$k =$	8,523	8,504	8,523	8,531	8,561	8,572	8,574	8,622

im Mittel $k = 8{,}551$,

daher aus beiden Versuchen:

im Mittel $k = 8{,}590$

als Diffusionscoëfficient für Sauerstoff. Auch diese Versuche bestätigen das Proportionalitätsgesetz.

Nachdem so die Diffusionscoëfficienten der beiden Gase gegen das Gypsdiaphragma gefunden waren, konnte zu Versuchen geschritten werden, bei denen beide Gase gleichzeitig von den beiden Seiten des Diaphragmas her durch dasselbe diffundirten. Sie fanden in ganz ähnlicher Weise statt, wie die mit den einzelnen Gasen, nur dass dabei beide Kammern mit Gas unter dem Drucke der Atmosphäre gefüllt wurden.

Bei dem ersten dieser Versuche war die Kammer A' mit Wasserstoff, A'' mit Sauerstoff und das Gypsdiaphragma mit Wasserstoff gefüllt. Die Temperatur blieb constant in beiden Kammern 13,7° C. Es ergab sich für die

Zeiten:	0	1	2	3	4	5	7	9 Min.
der Druck P':	749,9	744,0	739,4	735,0	730,7	727,0	720,5	714,6 mm
„ „ P'':	749,9	755,3	760,3	765,0	768,9	772,5	779,2	784,6 „
Zeiten:	12	16	22	33	40	46	59	74 Min.
der Druck P':	707,5	700,7	694,7	690,6	691,2	692,5	697,1	703,2 mm
„ „ P'':	791,4	798,2	804,3	808,5	808,3	807,0	802,6	796,8 „
Zeiten:	104	149	209	269	329	389 Min.		
der Druck P':	715,0	727,6	738,1	744,1	746,3	748,5 mm		
„ „ P'':	785,3	772,8	763,0	757,5	754,1	752,6 „		

Bei einem zweiten Versuche war die Kammer A' mit Sauerstoff, A'' mit Wasserstoff und das Gypsdiaphragma mit Sauerstoff gefüllt. Die Temperaturen schwankten zwischen 13,6° und 13,8° C. Ich fand für die:

Zeiten:	0	1	2	3	4	5	7	Minuten
den Druck P':	755,4	760,7	765,4	769,7	773,7	777,8	784,5	mm
„ „ P'':	755,4	750,0	745,5	741,2	737,0	733,2	726,9	„
Zeiten:	9	12	16	21	26	30	34	Minuten
den Druck P':	790,7	798,2	805,0	810,6	813,7	815,0	815,6	mm
„ „ P'':	721,0	714,3	707,6	702,2	699,1	697,7	697,3	„
Zeiten:	35	36	40	46	60	90	120	Minuten
den Druck P':	815,6	815,6	815,3	813,7	809,3	796,8	786,4	mm
„ „ P'':	697,3	697,3	697,7	699,1	704,0	715,6	725,9	„
Zeiten:	180	240	300	370 Minuten				
den Druck P':	772,6	764,7	760,4	758,7 mm				
„ „ P'':	739,0	747,1	751,0	753,4 „				

Zur Berechnung des Diffusionscoëfficienten k für die freie Diffusion der beiden Gase aus diesen Versuchen diente die Gleichung (21) des Hrn. Kirchhoff:

$$ln \frac{(P_2'' v_1 - P_1'' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)}{(P_2' v_1 - P_1' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)} = \frac{v_1 + v_2}{k} \Delta$$

in welcher, für $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$:

$$P_1' = \Pi - \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V'} \left(\frac{V}{k_2} U + \frac{W}{\Delta}\right);$$

$$P_2' = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V'} \left(\frac{V}{k_1} U + \frac{W}{\Delta}\right);$$

$$P_1'' = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V''} \left(\frac{V}{k_2} U + \frac{W}{\Delta}\right);$$

$$P_2'' = \Pi - \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) V''} \left(\frac{V}{k_1} U + \frac{W}{\Delta}\right);$$

$$v_1 = \frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) p_0} \left(\frac{V}{k_2} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{\Delta}\right);$$

$$v_2 = -\frac{k_1 k_2}{(k_2 - k_1) p_0} \left(\frac{V}{k_1} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{\Delta}\right)$$

ist. Hierin bedeutet:

Π den in beiden Kammern gleichen Druck zur Zeit Null;

$p_0 = 760$ mm den Normalluftdruck;

k_1, k_2 die Diffusionscoëfficienten der Gase in den Kammern A' und A'' gegen das Gypsdiaphragma;

V', V'', V und Δ die schon bei den Versuchen mit den einzelnen Gasen benutzten Constanten;

U die Differenz der Drucke in den Kammern, d. i. $P' - P''$ für irgend eine Zeit t, und

W das bestimmte Integral $\int_0^t U dt$.

U ergibt sich für die Beobachtungszeiten unmittelbar aus den entsprechenden Drucken, für dazwischen liegende Zeiten durch Interpolation, dU/dt mit Hülfe von Interpolationsformeln und W durch mechanische Quadratur.

Für die Zeit Null, wo $U = 0$ und $W = 0$ sind, folgt aus der transcendenten Gleichung zur Berechnung von k die Gleichung (28) des Hrn. Kirchhoff:

$$\frac{1}{p_0 k} V \Delta \frac{dU}{dt} = ln \frac{p_0 k + \Pi k_2}{p_0 k + \Pi k_1},$$

sowie für die Zeit des Maximums von U, die in beiden Versuchen 35 Minuten war, und bei welcher $dU/dt = 0$ ist, die Gleichung (30):

$$\frac{1}{k p_0}\left(\Pi + \frac{V''-V'}{V''+V'}\frac{U}{2}\right) U + \frac{W}{V\Delta} + \left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)U - \left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Pi = 0.$$

Vermittelst der wie vorhin erwähnt zu berechnenden und der schon früher bestimmten Werthe, ergab sich aus den angeführten Gleichungen für:

die Zeiten $t =$	0	8	9	16	35	59	104 Min.
aus d. ersten Vers. $kp_0 =$	3434;	3378;	3153;	3006;	2816;	2725;	2615
„ „ zweiten „ $kp_0 =$	3193;	3200;	3238;	3000;	2807;	2744;	2652
im Mittel $kp_0 =$	3314;	3289;	3196;	3003;	2812;	2734;	2634.

Die grösseren Abweichungen bei den für die ersten Zeiten aus den beiden Versuchen gefundenen Werthe von kp_0 rühren wahrscheinlich von dem Umstande her, dass bei der Entwickelung der Gleichung für k keine Rücksicht auf den Anfangszustand des Gypsdiaphragmas genommen wurde. Das Diaphragma und die kleinen Räume im Diffusionshahn sind einmal ganz mit Wasserstoff und das andere mal ganz mit Sauerstoff gefüllt worden, um so durch Anwendung der beiden extremen Fälle die beiden entgegengesetzten Grenzen des Fehlers jener Vernachlässigung zu erhalten.

In dem obigen Resultate zeigt sich nun zunächst, dass kp_0 keine constante Grösse ist. Die Werthe für dieselbe in den verschiedenen Stadien des Diffusionsversuches weichen viel mehr voneinander ab, als dies bei Versuchen über die freie Diffusion von Gasen schon gefunden wurde.[1]) Sodann ist selbst der grösste der obigen Werthe von kp_0 noch immer unvergleichlich kleiner als derjenige, welchen Hr. Loschmidt[2]) für die Gase, Wasserstoff und Sauerstoff, bei nahe der glei-

1) K. Waitz, Wied. Ann. 17. p. 201. 1882. und A. v. Obermayer, Wien. Ber. 85. p. 748. 1882. 87. p. 188. 1883.

2) Loschmidt, Wien. Ber. 61. p. 376. 1870.

chen Temperatur, 13° C., durch directe Versuche erhalten hat. Bei dem von ihm für $p_0 = 744{,}6$ mm gefundenen Werthe:

$$k = 0{,}2966$$

liegen Meter und Stunde als Einheiten zu Grunde. Wird derselbe auf die hier gewählten Einheiten, Centimeter und Minute, reducirt, also mit $100^2/60$ multiplicirt, so folgt:

$$k = 49{,}43 \text{ und } kp_0 = 36786,$$

mithin noch mehr wie zehnmal so gross als der grösste der oben angeführten Werthe.

Die Theorie des Hrn. Stefan für die Diffusion zweier Gase durch eine poröse Wand ist hiernach durch meine Versuche nicht bestätigt worden. Sie involvirt die Voraussetzung, dass die freie Diffusion zweier Gase in den sehr kleinen Räumen des porösen Körpers gerade so vor sich gehe, wie in grossen Räumen. Es scheint dies, nach den erhaltenen Resultaten, nicht der Fall zu sein.

Die beiden Diffusionsversuche mit Wasserstoff und Sauerstoff wurden fortgesetzt, der erste bis zur Zeit $t = 389$ Minuten, der zweite bis zur Zeit $t = 370$ Minuten. Durch mechanische Quadratur erhält man, abgesehen vom Vorzeichen:

$$W_{389} = \int_0^{389} U dt = 16480 \text{ für den ersten}$$

und

$$W_{370} = \int_0^{370} U dt = 16390 \text{ für den zweiten Versuch.}$$

Nach Hrn. Kirchhoff ist das zwischen der Zeit t und der Zeit ∞ fehlende, durch Beobachtung nicht zu ermittelnde Stück der Fläche W für grosse Werthe von t annähernd:

$$W_\infty - W_t = \frac{U_t}{\lambda_1},$$

und hierin:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{V\Delta}{2}\left\{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{\Pi}{kp_0} + \sqrt{\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)^2 + \frac{\Pi^2}{k^2 p_0^2} - 2\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)\frac{\Pi}{kp_0}\frac{V' - V''}{V' + V''}}\right\}.$$

Mit Hülfe von $kp_0 = 2500$, welchem Werthe sich kp_0 mit wachsender Zeit nähert, folgt aus diesen Gleichungen jenes relativ nur kleine Stück der Fläche für die Versuche:

$$\begin{array}{rll} & \text{I} & \text{II} \\ W_\infty - W_t = & 440 & 570 \\ \text{und dann } W_\infty = \int_0^\infty U dt = & 16920 & 16960, \end{array}$$

während diese Werthe nach der Theorie, der Gleichung (31) des Hrn. Kirchhoff gemäss:

$$W_\infty = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) \Pi V \Delta = 16939 \text{ und } 17063$$

sind.

Die Annahme von $kp_0 = 2500$ in der Gleichung für $1/\lambda_1$ ist eine mehr oder weniger willkürliche; bei einem anderen, wesentlich davon verschiedenen Werthe, z. B. $kp_0 = 2814$ werden die Zahlen für W_∞ um 40, resp. 50 Einheiten verkleinert. Eine weitere Unsicherheit liegt in der Annahme von U_t. Es sind bei der obigen Berechnung die grössten beobachteten, d. h. die letzten Zeiten zu Grunde gelegt worden. Werden statt dessen die vorletzten genommen, so ergibt sich für den ersten Versuch ein um 40 Einheiten grösseres und für den zweiten ein um 74 Einheiten kleineres W_∞. Da diese Differenzen indes relativ klein sind, so wird immerhin eine gute Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und theoretisch gefundenen Werthen der Fläche W_∞ bestehen bleiben. Hierbei handelt es sich freilich nur um einen speciellen Fall der Theorie, bei dem gerade das charakteristische derselben, der Einfluss von k, dem Coëfficienten der freien Diffusion, verschwindet. Auch die ältere Theorie, welche Hr. Bunsen benutzte, führt zu der Gleichung:

$$W_\infty = \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) \Pi V \Delta.$$

Bei dieser Theorie ist aber gar keine Rücksicht genommen auf die Widerstände, welche die beiden Gase im Inneren des porösen Körpers bei ihrer Durchdringung einander entgegensetzen, während die hier mitgetheilten Versuche ergeben haben, dass diese Widerstände noch sehr viel grösser sein müssen, als sie die Theorie des Hrn. Stefan voraussetzt.

II. *Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand; von Gustav Kirchhoff.*

Hr. Stefan hat in seiner Abhandlung „über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen“[1]) für die Diffusion zweier Gase durch eine poröse Wand die folgenden Gleichungen aufgestellt:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_2 v_1 - p_1 v_2) + \frac{\alpha p_0}{k_1} v_1 = 0, \\ \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_1 v_2 - p_2 v_1) + \frac{\alpha p_0}{k_2} v_2 = 0, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0.$$

Sie beziehen sich auf eine Bewegung der beiden Gase nach der Richtung der x-Axe im Inneren der Wand oder des „Diaphragmas“. p_1 ist der Druck, den die zur Zeit t, an dem durch den Werth von x bestimmten Orte in der Volumeneinheit befindliche Menge des ersten Gases ausüben würde, wenn sie allein in diesem Volumen vorhanden wäre. Ist P_1 der Partialdruck des ersten Gases ausserhalb des Diaphragmas, so ist für die Oberfläche dieses $p_1 = \alpha P_1$; es bezeichnet nämlich α den Bruchtheil des Volumens des porösen Körpers, den die Poren einnehmen, und es ist vorausgesetzt, dass eine Condensation des Gases in diesen nicht stattfindet. v_1 ist das bei dem beliebig zu wählenden Normaldruck p_0 und der Temperatur des Versuches gemessene Volumen der Menge des ersten Gases, welche durch eine auf der Richtung von x senkrechte Flächeneinheit, zur Zeit t, an dem durch x bestimmten Orte, in der Zeiteinheit, nach der Seite, nach der x wächst, hindurch tritt. Die analoge Bedeutung haben p_2 und v_2 für das zweite Gas. k_1 und k_2 sind die Diffusionscoeëfficienten des ersten und des zweiten Gases gegen das Diaphragma, k ist der Diffusionscoëfficient der beiden Gase gegeneinander beim Normaldruck k_0.

Zu diesen partiellen Differentialgleichungen kommen zunächst gewisse Bedingungen hinzu, die sich auf die Ober-

1) Stefan, Wien. Ber. **63.** p. 63. 1871.

fläche des Diaphragmas beziehen. Es seien dieses die Ebenen $x = 0$ und $x = \Delta$. Auf jeder Seite befinde sich ein abgeschlossener Raum, eine Kammer, in der die beiden Gase gleichmässig durcheinander gemischt sind. Die Kammer, die an die Fläche $x = 0$ stösst, habe das Volumen V', die andere das Volumen V''; ein jedes von diesen soll gemessen sein durch die Länge einer Röhre, die dasselbe Volumen besitzt, und deren Querschnitt gleich dem Querschnitt des Diaphragmas ist. Bezeichnen dann P_1', P_2', P_1'', P_2'' die Partialdrucke der beiden Gase in den beiden Kammern zur Zeit t, so muss:

$$(3)\quad \begin{cases} \text{für } x = 0: & v_1 = -\frac{1}{p_0}\frac{d(V'P_1')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1', \\ & v_2 = -\frac{1}{p_0}\frac{d(V'P_2')}{dt}, \quad p_2 = \alpha P_2', \\ \text{für } x = \Delta: & v_1 = \frac{1}{p_0}\frac{d(V''P_1'')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1'', \\ & v_2 = \frac{1}{p_0}\frac{d(V''P_2'')}{dt}, \quad p_2 = \alpha P_2'' \end{cases}$$

sein.

Noch setze man:

$$P_1' + P_2' = P', \qquad P_1'' + P_2'' = P'',$$

sodass P' den Gesammtdruck in der ersten, P'' den in der zweiten Kammer bedeutet. Bei den Diffusionsversuchen, welche Bunsen in seinen „Gasometrischen Methoden" beschrieben hat, waren P' und P'' constant; hier ist der Fall ins Auge zu fassen, dass V' und V'' constant sind.

Endlich sind diejenigen Gleichungen zu erfüllen, die ausdrücken, dass die Anfangsvertheilung der Gase eine gegebene sei.

2. Man kommt auf den einfacheren Fall der Diffusion eines Gases durch ein Diaphragma, wenn man $p_2 = 0$ und $v_2 = 0$ setzt. Die Gleichungen (1) und (2) ergeben dann:

$$(4)\qquad \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\alpha p_0}{k_1} v_1 = 0, \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

und die Gleichungen (3):

$$(5)\quad \begin{cases} \text{für } x = 0: & v_1 = -\frac{1}{p_0}\frac{d(V'P_1')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1' \\ \text{für } x = \Delta: & v_1 = \frac{1}{p_0}\frac{d(V''P_1'')}{dt}, \quad p_1 = \alpha P_1''. \end{cases}$$

Für den Fall, dass P_1' und P_1'', d. h. die Drucke in den beiden Kammern constant erhalten werden, kann man diesen Gleichungen bei der Annahme genügen, dass p_1 und v_1 von der Zeit unabhängig sind, der Vorgang in dem Diaphragma also ein stationärer ist; es muss dann v_1 auch von x unabhängig, also:

$$p_1 = \text{const.} - \frac{\alpha p_0}{k_1} v_1 x \tag{6}$$

sein. Sogleich nach dem Beginne der Diffusion kann der stationäre Zustand nur eintreten, wenn die Anfangsvertheilung des Gases dieser Gleichung gemäss ist; ist das nicht der Fall, so wird aber der Einfluss der Anfangsvertheilung bei den Verhältnissen, die bei den Versuchen verwirklicht zu sein pflegen, sehr schnell abnehmen, und der Zustand der Strömung von diesem stationären bald nur unmerklich verschieden sein.

Sind nicht die Drucke P_1', P_1'', sondern die Volumina V', V'' constant, so ist, genau genommen, ein stationärer Zustand (ausser dem der Ruhe) nicht möglich; näherungsweise wird man aber in jedem Augenblicke die Strömung im Diaphragma als derjenigen stationären Strömung gleich annehmen dürfen, die stattfinden würde, wenn die Drucke P_1', P_1'' hinreichend lange die Werthe, die sie augenblicklich besitzen, gehabt hätten. Auch für den Fall, dass V' und V'' constant sind, darf man dann aus den Gleichungen (4) die Gleichung (6) folgern, mit deren Hülfe die Gleichungen (5) dann ergeben:

$$\frac{d(P_1' - P_1'')}{dt} = -\frac{k_1}{V\Delta}(P_1' - P_1''), \quad \text{wo:}$$

$$\frac{1}{V'} + \frac{1}{V''} = \frac{1}{V} \tag{7}$$

gesetzt ist, also:

$$P_1' - P_1'' = B e^{-\frac{k_1}{V\Delta} t}, \tag{8}$$

wo B eine Constante bedeutet, und zwar den Anfangswerth von $P_1' - P_1''$.

Der Fehler dieser Gleichung lässt sich theoretisch beurtheilen, da für den Fall, dass V' und V'' constant sind, sich die genaue Lösung der Gleichungen (4) und (5) finden

lässt, bei welcher für $t = 0$ der Druck p_1 einer beliebig gegebenen Function von x gleich wird.

Setzt man:

$$a^2 = \frac{k_1}{\alpha}, \quad b' = \frac{\alpha}{V'}, \quad b'' = \frac{\alpha}{V''}, \tag{9}$$

so gibt die Elimination von v_1 aus den beiden Gleichungen (4):

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \tag{10}$$

und die Gleichungen (5) geben die Grenzbedingungen:

$$\text{(11) für } x = 0 \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = a^2 b' \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \text{für } x = \Delta \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = -a^2 b'' \frac{\partial p_1}{\partial x},$$

die sich auch schreiben lassen:

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = b' \frac{\partial p_1}{\partial x}, \qquad \text{für } x = \Delta \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -b'' \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht auf diejenigen zurückführen, die ein bekanntes Problem der Wärmeleitung aussprechen. Macht man nämlich:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \vartheta, \tag{12}$$

so werden sie

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2},$$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = b' \vartheta, \qquad \text{für } x = \Delta \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -b'' \vartheta,$$

und das sind die Gleichungen, denen die Temperatur ϑ in einem Körper genügen muss, der durch die Ebenen $x = 0$ und $x = \Delta$ begrenzt ist und in diesen Ebenen, denen eine verschiedene äussere Leitungsfähigkeit zukommt, seine Wärme an eine Umgebung von der Temperatur Null abgibt. Die Gleichungen werden erfüllt durch:

$$\vartheta = \Sigma A_n X_n e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\Delta^2} t}, \tag{13}$$

wo die Summe so zu bilden ist, dass für n alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ gesetzt werden, A_n eine willkürliche Constante bezeichnet:

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\cos \frac{\lambda_n x}{\Delta} + \frac{\beta'}{\lambda_n} \sin \frac{\lambda_n x}{\Delta} \right) \tag{14}$$

ist, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ die ihrer Grösse nach geordneten, positiven Wurzeln der Gleichung:

(15) $$\left(\lambda - \frac{\beta'\beta''}{\lambda}\right) \operatorname{tg} \lambda = \beta' + \beta''$$

bedeuten, und:

(16) $$\beta' = b' \Delta, \qquad \beta'' = b'' \Delta$$

gesetzt ist.

Die Constanten A_n bestimmen sich, wenn ϑ für $t = 0$ als Function von x gegeben ist. Es sei diese Function ϑ_0, so muss die Gleichung:

$$\vartheta_0 = \Sigma A_n X_n$$

erfüllt werden. Es ist aber:

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} = -\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2} X_n$$

und für $x = 0$ $\frac{dX_n}{dx} = \frac{\beta'}{\Delta} X_n$, für $x = \Delta$ $\frac{dX_n}{dx} = -\frac{\beta''}{\Delta} X_n$.

Aus der Differentialgleichung für X_n folgt bei Benutzung des Werthes, den diese Function für $x = 0$ hat:

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 + \frac{\lambda_n^2}{\Delta^2} (X_n)^2 = \frac{1}{\Delta^2};$$

daraus weiter

für $x = \Delta$ $(X_n)^2 = \frac{1}{\lambda_n^2 + \beta''^2}$, während

für $x = 0$ $(X_n)^2 = \frac{1}{\lambda_n^2 + \beta'^2}$

ist. Aus derselben Differentialgleichung folgt ferner:

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2} \int_0^\Delta X_n X_m \, dx = -\left[X_m \frac{dX_n}{dx}\right]_0^\Delta + \int_0^\Delta \frac{dX_n}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx.$$

Hieraus ist zu schliessen, dass, wenn n und m zwei verschiedene ganze, positive Zahlen sind:

$$\int_0^\Delta X_n X_m \, dx = 0,$$

und dass:

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2} \int_0^\Delta (X_n)^2 dx - \int_0^\Delta \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2 + \beta''^2}\right)$$

ist; da aber:

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2} \int_0^\Delta (X_n)^2 dx + \int_0^\Delta \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{\Delta}$$

ist, so ergibt sich:

$$2\lambda_n^2 \int_0^A (X_n)^2 dx = A\left(1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2 + \beta''^2}\right).$$

Daraus findet man für A_n die Gleichung:

$$(17) \quad A_n A\left(1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2 + \beta''^2}\right) = 2\lambda_n^2 \int_0^A \vartheta_0 X_n dx.$$

Damit ist der für ϑ in (13) aufgestellte Ausdruck vollständig bestimmt.

Um nun mit Hülfe von (12) p_1 zu berechnen, wenn dieses für $t = 0$ eine gegebene Function von x ist, hat man zu benutzen, dass nach (14):

$$\int X_n dx = \frac{A}{\lambda_n^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\lambda_n \sin \frac{\lambda_n x}{A} - \beta' \cos \frac{\lambda_n x}{A}\right).$$

Daraus folgt:

$$(18) \quad p_1 = A + \sum \frac{A_n A}{\lambda_n^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\lambda_n \sin \frac{\lambda_n x}{A} - \beta' \cos \frac{\lambda_n x}{A}\right) e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{A^2} t},$$

wo A eine von x unabhängige Grösse bedeutet. Es muss dieselbe auch von t unabhängig sein, da p_1 der partiellen Differentialgleichung (10) genügen soll und dieser durch jedes Glied der in dem Ausdruck von p_1 vorkommenden Summe genügt wird. Für $t = 0$ möge $p_1 = \pi_0$ sein; es ist dann:

$$\vartheta_0 = \frac{\partial \pi_0}{\partial x}$$

zu setzen, und mit diesem Werthe von ϑ_0 sind nach (17) die Coëfficienten A_n zu berechnen. Die Grösse A findet man durch die folgende Ueberlegung. Die Gleichungen (10) und (11) geben, wenn man die erste mit dx multiplicirt, zwischen den Grenzen 0 und A integrirt und mit p_1', p_1'' die Werthe von p_1 für diese Grenzen bezeichnet:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_1'}{b'} + \frac{p_1''}{b''} + \int_0^A p_1 dx\right) = 0,$$

eine Gleichung, die ausspricht, dass die vorhandene Gasmasse mit der Zeit sich nicht ändert. Führt man auch hier die durch (16) definirten Zeichen β' und β'' ein, so hat man also:

$$\frac{p_1'}{\beta'} + \frac{p_1''}{\beta''} + \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} p_1\, dx = \text{const.}$$

Setzt man die Werthe einander gleich, welche dieser Ausdruck für $t = 0$ und $t = \infty$ annimmt, und beachtet dabei, dass nach (18) für $t = \infty$:

$$p_1' = p_1'' = p_1 = A$$

wird, so erhält man zur Bestimmung von A:

$$A\left(\frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\beta''} + 1\right) = \frac{\pi_0'}{\beta'} + \frac{\pi_0''}{\beta''} + \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} \pi_0\, dx.$$

Von besonderem Interesse für den Versuch ist der Fall, der sehr nahe verwirklicht werden kann, dass π_0 für alle endlichen Werthe von x zwischen 0 und Δ den einen Werth π_0'', für $x = 0$ den anderen π_0' hat; für jeden endlichen Werth von x ist dann $\vartheta_0 = 0$, für unendlich kleine Werthe von x wird ϑ_0 unendlich, aber so, dass, wenn ε eine beliebig kleine, positive, endliche Grösse bedeutet:

$$\int_0^{\varepsilon} \vartheta_0\, dx = \pi_0'' - \pi_0'$$

ist. Die Gleichung (17) gibt dann:

$$\frac{A_n \Delta}{\lambda_n^2}\left(1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta''^2}\right) = 2\,\frac{\pi_0'' - \pi_0'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}}.$$

Der hieraus folgende Werth von A_n soll in die Gleichung (18) substituirt und in dieser x einmal $= 0$, dann $= \Delta$ gesetzt werden. Für den letzteren ist das Quadrat von X_n bereits berechnet, aber das Vorzeichen dieser Grösse ist unbestimmt geblieben. Mit Hülfe von (15) folgt aus (14), dass für $x = \Delta$:

$$X_n = \sin \lambda_n \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}}{\lambda_n(\beta' + \beta'')},$$

X_n also von demselben Vorzeichen, wie $\sin \lambda_n$ ist. Aus der Gleichung (15) ersieht man aber, wenn man sie durch $\operatorname{tg} \lambda$ dividirt hat, dass ihre Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ resp. in den Intervallen 0 bis π, π bis 2π, 2π bis 3π, .. liegen, das Vorzeichen von $\sin \lambda_n$ also das von $(-1)^{n+1}$ ist, woraus dann folgt, dass für $x = \Delta$:

$$X_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}}$$

und daher:

$$\Delta \frac{dX_n}{dx} \text{ d. h. } \frac{\beta' \cos \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} = (-1)^n \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}}.$$

Bei Benutzung hiervon erhält man aus (18), wenn man noch durch α dividirt, statt der Drucke p_1', p_1'', die sich auf das Innere des Diaphragmas beziehen, die Drucke P_1', P_1'' einführt, die in den angrenzenden Kammern stattfinden, und der Kürze wegen:

$$1 + \frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2 + \beta''^2} = N \quad \text{setzt:}$$

$$P_1' - \frac{A}{\alpha} = 2(P_0' - P_0'') \sum \frac{1}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \frac{\beta'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\Delta^2} t}$$

$$P_1'' - \frac{A}{\alpha} = 2(P_0' - P_0'') \sum (-1)^n \frac{1}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}} e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\Delta^2} t}.$$

Hieraus folgt:

$$(19)\quad P_1' - P_1'' = 2(P_0' - P_0'') \sum \frac{\beta}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\frac{\beta'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} - (-1)^n \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}} \right) e^{-\frac{\lambda_n^2 a^2}{\Delta^2} t}$$

Es wird dieser Ausdruck identisch mit dem in (8) angegebenen, wenn man β' und β'' als unendlich klein annimmt und nur Endliches berücksichtigt; dann wird nämlich:

$$\lambda_1^2 = \beta' + \beta'',$$

und es reducirt sich die hier auftretende Summe auf ihr erstes Glied.

3. Wenn bei einem gegebenen Apparate der hier gedachten Art β' und β'' so klein, also die Volumina der beiden Kammern gegen das Volumen des Diaphragmas so gross sind, dass bei der Diffusion eines Gases die Gleichung (19) sich nicht bemerkbar von der Gleichung (8) unterscheidet, die aus der Annahme hergeleitet ist, dass in jedem Zeitelement die Strömung im Diaphragma als eine stationäre angesehen werden kann, so wird man berechtigt sein, dieselbe Annahme auch für die Diffusion zweier Gase zu machen. Infolge derselben darf man dann in den Gleichungen (1) und

(2) v_1 und v_2 als unabhängig von x betrachten, wodurch die Gleichungen (1) leicht integrabel werden. Indem man sie einmal direct addirt, dann, nachdem sie mit $-v_2$ und v_1 multiplicirt waren, findet man durch Integration:

$$p_1 + p_2 = -\alpha p_0 \left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2}\right) x + \text{const.}$$

und: $$p_2 v_1 - p_1 v_2 + \frac{\alpha k p_0 v_1 v_2}{v_1 + v_2}\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) = e^{\frac{v_1+v_2}{k}x} \text{ const.}$$

Hier setze man einmal $x = 0$, dann $x = \Delta$, eliminire die beiden mit const. bezeichneten Grössen und führe statt der Werthe von p_1 und p_2 die in den beiden Kammern stattfindenden Drucke ein. Dadurch erhält man:

$$P' - P'' = p_0 \left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2}\right) \Delta, \tag{20}$$

$$\log \frac{(P_2'' v_1 - P_1'' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)}{(P_2' v_1 - P_1' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)} = \frac{v_1 + v_2}{k} \Delta. \tag{21}$$

Diese zwei Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen (3) bestimmen die sechs Zeitfunctionen P_1', P_1'', P_2', P_2'', v_1, v_2, wenn die Anfangswerthe von P_1', P_1'', P_2', P_2'' gegeben sind. Aus den Gleichungen (3) folgt, wenn man v_1 und v_2 eliminirt und dann integrirt:

$$V'(P_1' - \Pi_1) + V'' P_1'' = 0, \quad V' P_2' + V''(P_1'' - \Pi_2) = 0, \tag{22}$$

wo Π_1 und Π_2 zwei Constanten und zwar die Drucke bezeichnen, die die beiden Gase ausüben, wenn das erste Gas ganz in der ersten Kammer, das zweite ganz in der zweiten sich befindet. Aus denselben Gleichungen folgt ferner:

$$v_1 + v_2 = -\frac{V'}{p_0}\frac{dP}{dt}, \qquad = \frac{V'}{p_0}\frac{dP'}{dt},$$

also, wenn man wieder das durch (7) definirte Volumen V einführt und:

$$P' - P'' = U \qquad \text{setzt,} \tag{23}$$

$$v_1 + v_2 = -\frac{V'}{p_0}\frac{dU}{dt}. \tag{24}$$

Man setze ferner:

$$V'\left(\frac{P_1' - \Pi_1}{k_1} + \frac{P_2'}{k_2}\right) = -\frac{1}{\Delta} W, \tag{25}$$

woraus nach (22) folgt:

$$V''\left(\frac{P_1''}{k_1} + \frac{P_2'' - \Pi_2}{k_2}\right) = \frac{1}{\Delta} W.$$

Es wird dann eine einfache Beziehung zwischen den Functionen W und U sich ergeben. In der That ist nach (20):

$$k_0\left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2}\right) = \frac{1}{\Delta} U, \tag{26}$$

und daher ergibt die Differentiation von (25) bei Rücksicht auf (3):

$$\frac{dW}{dt} = U.$$

Man kann hiernach P_1', P_1'', P_2', P_2'', v_1, v_2 durch W und seine beiden ersten Differentialquotienten nach t ausdrücken. Behält man das Zeichen U bei, so findet man aus (22), (23) und (25):

$$27) \begin{cases} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)(P_1' - \Pi_1) = -\frac{1}{V'}\left(\frac{V}{k_2}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\Delta}\right) \\ \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) P_2' = \frac{1}{V'}\left(\frac{V}{k_1}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\Delta}\right) \\ \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) P_1'' = \frac{1}{V''}\left(\frac{V}{k_2}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\Delta}\right) \\ \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)(P_2'' - \Pi_2) = -\frac{1}{V''}\left(\frac{V}{k_1}(U + \Pi_2 - \Pi_1) + \frac{W}{\Delta}\right) \end{cases}$$

und hieraus mit Hülfe von (3), oder aus (24) und (26):

$$\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) v_1 = \frac{1}{p_0}\left(\frac{V}{k_2}\frac{dU}{dt} + \frac{U}{\Delta}\right)$$
$$\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) v_2 = -\frac{1}{p_0}\left(\frac{V}{k_1}\frac{dU}{dt} + \frac{U}{\Delta}\right).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (21), so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für W. Die beiden Constanten der Integration bestimmen sich aus den Anfangswerthen von W und U, die selbst mit Hülfe von (23) und (25) aus den Anfangswerthen von P_1', P_1'', P_2', P_2'' zu berechnen sind, welche auch dazu dienen müssen, um

die in der Differentialgleichung vorkommenden Constanten Π_1 und Π_2 durch die Gleichungen (22) zu ermitteln.

Wenn die gefundene Differentialgleichung auch nicht integrirt werden kann, so lässt sie sich doch benutzen, um die in ihr vorkommende Constante k aus Beobachtungen zu bestimmen und die Theorie, aus der sie hergeleitet ist, zu prüfen. Für beliebige Werthe von t kann man durch die Beobachtung U finden und dann durch mechanische Quadratur W und durch eine Interpolationsformel dU/dt ermitteln. Setzt man irgend welche zusammengehörige Werthe dieser drei Functionen in die Differentialgleichung ein, so kann man aus ihr k berechnen, vorausgesetzt, dass die anderen in ihr vorkommenden Constanten bekannt sind.

4. In Betreff der Anfangswerthe von P_1', P_1'', P_2', P_2'' soll nun angenommen werden, dass für $t = 0$:

$$P_1' = \Pi, \quad P_1'' = 0, \quad P_2' = 0, \quad P_2'' = \Pi$$

ist; nach (22) ist dann:

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi,$$

und nach (23) und (25) für $t = 0$:

$$U = 0 \quad \text{und} \quad W = 0.$$

Bei Rücksicht auf (26) gibt hiernach die Gleichung (21) für $t = 0$:

$$\frac{1}{p_0 k} V \Delta \frac{dU}{dt} = \log \frac{p_0 k + \Pi k_2}{p_0 k + \Pi k_1}. \tag{28}$$

In einem gewissen Augenblick wird der absolute Werth von U ein Maximum; man erhält eine Relation zwischen den Werthen, die U und W in diesem Augenblick haben, wenn man in der Gleichung (21) $dU/dt = 0$ setzt. Bequemer, als aus dieser Gleichung (die eine identische wird, wenn man unmittelbar die genannte Substitution macht), findet man jene Relation aber durch Betrachtungen, die an die Gleichungen (1) zu knüpfen sind. Addirt man diese Gleichungen, nachdem sie mit den Factoren:

$$\frac{p_1 + p_2}{k} + \frac{\alpha p_0}{k_2}, \quad \frac{p_1 + p_2}{k} + \frac{\alpha p_0}{k_1}$$

multiplicirt sind, so erhält man:

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{p_1+p_2}{k}\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial x}+\alpha p_0\left(\frac{1}{k_2}\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{1}{k_1}\frac{\partial p_2}{\partial x}\right) \\ \quad =-(v_1+v_2)\alpha p_0\left(\frac{1}{k}\left(\frac{p_1}{k_1}+\frac{p_2}{k_2}\right)+\frac{\alpha p_0}{k_1 k_2}\right). \end{array}\right.$$

Ist nun $v_1+v_2=0$, wie es der Fall ist, wenn das Maximum oder Minimum von U stattfindet, so ist diese Gleichung integrabel und gibt, wenn man sie zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=\Delta$ integrirt und statt der Drucke im Diaphragma die Drucke in den Kammern einführt:

$$\frac{1}{2kp_0}(P''^2-P'^2)+\frac{P_1''-P_1'}{k_2}+\frac{P_2''-P_2'}{k_1}=0.$$

Nach (27) ist aber:

$$P''+P'=2\Pi+\frac{V''-V'}{V''+V'}U,\quad P''-P'=-U,$$

$$\frac{P_1''-P_1'}{k_2}+\frac{P_2''-P_2'}{k_1}=\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Pi-\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)U-\frac{W}{V\Delta},$$

und daher:

$$(30)\quad \frac{1}{kp_0}\left(\Pi+\frac{V''-V'}{V''+V'}\frac{U}{2}\right)U+\frac{W}{V\Delta}+\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)U-\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Pi=0.$$

Die Summe v_1+v_2 verschwindet auch für $t=\infty$, weil dann jeder der beiden Summanden verschwindet. Auch für diesen Fall gelten also die an die Gleichung (29) geknüpften Schlüsse, besteht also die Gleichung (30). Hier ist aber $U=0$; bezeichnet man durch W_∞ den Werth von W für $t=\infty$, so ist also:

$$(31)\quad W_\infty=\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Pi V\Delta.$$

Diese Gleichung folgt übrigens aus den Gleichungen (27) allein, wenn man benutzt, dass für $t=\infty$:

$$P_1'=P_1''\quad\text{und}\quad P_2'=P_2''$$

ist, ohne dass man die Gleichung (21) oder eine ihr äquivalente zu Hülfe zieht.

Soll die Gleichung (31) an den Beobachtungen geprüft werden, so ist es wünschenswerth, einen Ausdruck der Function W für grosse Werthe der Zeit zu haben, um aus dem Werth von W für ein grosses t seinen Werth für $t=\infty$ berechnen zu können. Man erreicht diesen Zweck leicht mit Hülfe der Gleichung (29). Für ein grosses t sind v_1 und v_2 nur klein,

und nach 1) also auch die Aenderungen nur klein, die p_1 und p_2 innerhalb des Diaphragmas erleiden. Auf der rechten Seite der Gleichung (29) darf man daher p_1 und p_2 als constant betrachten und resp. den Werthen gleichsetzen, die $\alpha P_1'$ oder $\alpha P_1''$ und $\alpha P_2'$ oder $\alpha P_2''$ für $t = \infty$ annehmen, d. h. man darf nach (27) setzen:

$$p_1 = \alpha \Pi \frac{V}{V''}, \qquad p_2 = \alpha \Pi \frac{V}{V'}.$$

Integrirt man dann wieder die Gleichung (29) zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \Delta$, setzt für $v_1 + v_2$ seinen Werth aus (24), vernachlässigt das mit dem Factor U^2 behaftete Glied und führt die durch (31) definirte Grösse W_∞ ein, so erhält man für W die lineare Differentialgleichung:

$$W - W_\infty + a\frac{dW}{dt} + b\frac{d^2W}{dt^2} = 0,$$

wo:

$$a = V\Delta\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{\Pi}{kp_0}\right),$$

$$b = V^2\Delta^2\left(\frac{1}{k_1 k_2} + \frac{\Pi}{kp_0}\frac{\frac{V'}{k_1} + \frac{V''}{k_2}}{V' + V''}\right).$$

Das allgemeine Integral derselben ist:

$$W_\infty - W = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t},$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$1 - a\lambda + b\lambda^2 = 0$$

sind, d. h. $1/\lambda_1$ und $1/\lambda_2$ die Ausdrücke haben:

$$\frac{V\Delta}{2}\left\{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{\Pi}{kp_0} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)^2 + \frac{\Pi^2}{k^2p_0^2} - 2\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)\frac{\Pi}{kp_0}\frac{V' - V''}{V' + V''}}\right\},$$

welche Ausdrücke stets reell und positiv sind, da es k_1, k_2, V', V'' sind. Ist die Zeit gross genug, so wird hiernach:

$$W_\infty - W = C_1 e^{-\lambda_1 t},$$

wo λ_1 die kleinere der beiden Wurzeln ist, also:

$$U = \lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t},$$

mithin:

$$W_\infty = W + \frac{U}{\lambda_1}.$$

III. *Ueber Capillaritätsbestimmungen von Salzlösungen und deren Gemischen;* von Oskar Rother.

(Hierzu Taf. VI Fig. 3 u. 4.)

(Auszug des Verfassers aus der Inauguraldissertation.)

Bei allen bisher veröffentlichten Bestimmungen von Capillaritätsconstanten sind entweder parallel aufgehängte Plattenpaare oder cylindrische Haarröhrchen von kreisförmigem Querschnitt zur Anwendung gekommen. Da jedoch einige Physiker den Beobachtungen mit Platten keine allzu grosse Genauigkeit zuschreiben, und eine genügende Reinigung derselben nur mit der grössten Schwierigkeit zu erlangen ist, andererseits der kreisförmige Querschnitt der Röhren unter dem Mikroskop fast immer schwach elliptisch erscheint, benutzte ich zur Vermeidung eines hieraus entspringenden Fehlers nur Röhren von elliptischem Querschnitt, welcher für die einzelnen Röhrenstücke ausserordentlich constant blieb. Gleichzeitig ergibt sich hierbei noch der Vortheil, dass das Verhältniss des Umfanges zum Querschnitt grösser ist, wodurch die Messung der Steighöhen eine genauere wird.

Um bei den Beobachtungen selbst zu sicheren Resultaten zu gelangen, musste auf die Vorbereitung der Röhren ein grosses Gewicht gelegt werden.

Ein sorgfältiges Reinigungsverfahren gewährt zugleich noch einen weiteren Vortheil. Bei vollkommen benetzenden Flüssigkeiten legt sich nämlich das letzte Flüssigkeitselement unmittelbar an die Wandung an, daher ist hier der constante Randwinkel gleich 0^0.

In den vollkommen benetzten Röhren steigt somit die Flüssigkeit nicht unmittelbar an der festen Wand empor, sondern an einer die Wand umhüllenden Flüssigkeitsschicht, deren Stärke Volkmann für Wasser auf 0,004 mm berechnet hat. Hierbei ist nur die geringe Reibung der Flüssigkeit an ihrer eigenen Schicht zu überwinden, und dieser Einfluss lässt sich dadurch eliminiren, dass man die Ruhelage der tiefsten Stelle des Meniscus durch Fallen und Steigen der

Flüssigkeit in der Röhre beobachtet. Dieses Verfahren ist besonders bei den zäheren concentrirten Lösungen angewandt, und das Mittel aus den gefundenen Ruhelagen in die Rechnung eingeführt worden.

Aus den vorhandenen Capillaren mit elliptischem Querschnitt wählte ich solche Stücke, für welche die Messung der Länge eines eingeführten Quecksilberfadens möglichst übereinstimmende Werthe ergab. Die Hauptaxen der elliptischen Querschnitte wurden unter einem Mikroskop mit Fadenkreuz gemessen, dessen Objectträger vermittelst einer Mikrometerschraube verschoben werden konnte. Die in 100 Theile getheilte Trommel der Schraube gestattete noch Ablesungen von 0,1 Trommeltheilen, wobei 360 Trommeltheile 1 mm entsprechen.

Um geeignete Objecte zu erlangen, sprengte ich von jedem Ende der Röhre zwei kleine Stücke ab. Der Sprung war in den meisten Fällen ein ebener, sodass die Stücke sofort zur Untersuchung mit dem Mikroskop benutzt werden konnten, und die Messungen derselben zu viel besseren Resultaten führten, als es beim Abschleifen dieser Stücke auf Schmirgel möglich war, da hierbei stets kleine Theile aus der Oeffnung des Querschnittes sprangen. Für die Axen jeder Durchschnittsellipse wurden mehrere Messungen ausgeführt und die Mittelwerthe derselben für je zwei zusammengehörige Stücke derselben Röhre wieder combinirt und als Werthe der Durchmesser der Röhre selbst in Rechnung gebracht.

In der folgenden Tabelle stelle ich nun die Werthe der Halbaxen in Millimetern zusammen:

	ξ	η		ξ	η
I.	0,44247	0,15959	IV.	0,30863	0,08808
II.	0,29220	0,08541	V.	0,29671	0,09972
III.	0,27960	0,07157	VI.	0,50125	0,19151

Um nun für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeitssäule einen mathematischen Ausdruck zu erlangen, kann man für diese Röhren die gleichen Betrachtungen anwenden, wie für Röhren mit kreisförmigem Querschnitt, obwohl eine

Integration der hierbei sich ergebenden Differentialgleichungen nicht möglich ist.

Da wir es mit benetzenden Flüssigkeiten zu thun haben, so wird der Meniscus eine nach aussen concave Oberfläche bieten. Wir können diese angenähert als die Hälfte eines dreiaxigen Ellipsoides ansehen, dessen Mittelpunkt bei verticaler Stellung der Röhre in der Axe derselben um den Halbmesser ζ vom tiefsten Punkt entfernt liegt.

Zur Berechnung dieser gehobenen Flüssigkeitssäule zerlegen wir dieselbe durch eine Tangentialebene im tiefsten Punkt des Meniscus, welche der Ebene der Flüssigkeit im umgebenden Gefäss parallel ist, in die zwischen Meniscus und Tangentialebene und die zwischen den parallelen Ebenen befindliche Masse. Die letztere erfüllt einen geraden Cylinder mit elliptischem Querschnitt und einer Höhe h, welche durch den Abstand der Tangentialebene von der äusseren Flüssigkeitsebene angegeben wird, die erstere einen eben solchen Cylinder, dessen Höhe gleich ist der dritten Halbaxe ζ jenes Ellipsoides, welches den Meniscus begrenzt, vermindert um die Hälfte jenes Ellipsoides selbst. Hierbei ist die obere Grundfläche dieses Cylinders ebenfalls als eine ebene Ellipse vorausgesetzt, und diese Annahme wird auch in Wirklichkeit nahezu erfüllt sein. Nach den früheren Bezeichnungen ergibt sich als Gewicht der gehobenen Flüssigkeitsmasse:

$$G = \pi \sigma g \xi \eta (h + \tfrac{1}{3} \zeta) .$$

Die Oberflächenspannung will ich noch durch eine ihr äquivalente Kraft ersetzen. Wie früher schon erwähnt wurde, hält auch die Molecularanziehung des dünnen, die Röhre bekleidenden Flüssigkeitshäutchen dem Gewicht der gehobenen Flüssigkeitssäule das Gleichgewicht. Diese Kraft rührt nun, wie Laplace gezeigt hat, nur von der Molecularanziehung der Flüssigkeitstheilchen im Umfang des Meniscus her. Bezeichnen wir mit F die Wirkung der Längeneinheit und mit u den Umfang der Röhrenöffnung, so muss sein:

$$Fu = \pi \sigma g \xi \eta (h + \tfrac{1}{3} \zeta) .$$

Der Umfang des elliptischen Querschnittes stellt sich dar als ein elliptisches Integral zweiter Gattung:

$$u = 4\xi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\varphi \, d\varphi = 2\pi\xi\nu .$$

wobei: $\nu = \frac{2E}{\pi}$ gesetzt ist.

Dies eingeführt ergibt:

$$2F/\sigma g = \eta(h + \tfrac{1}{3}\zeta)/\nu .$$

Um F durch die in der Capillaritätstheorie gebräuchlichen Grössen auszudrücken, führe ich nach Gauss als Maass der Cohäsion die Grösse α ein, worin α das von 1 mm freier Flüssigkeitsoberfläche getragene Flüssigkeitsgewicht bedeutet, sonach ist:

$$F = \alpha g \quad \text{und} \quad 2\alpha/\sigma = \eta(h + \tfrac{1}{3}\zeta)/\nu .$$

Für $2\alpha/\sigma$ setzt Poisson die Capillaritätsconstante a^2, und daher ist auch:

$$a^2 = \eta(h + \tfrac{1}{3}\zeta)/\nu, \qquad \text{also: } h = \nu/\eta a^2 - \tfrac{1}{3}\zeta .$$

Vergleicht man die Steighöhen in elliptischen Röhren mit denen in kreisförmigen Röhren gleichen Querschnittes, so findet man bei Annahme eines halbkugelförmigen Meniscus in letzteren als Steighöhe:

$$h^1 = 1/r a^2 - \tfrac{1}{3} r ,$$

worin $r = \sqrt{\xi\eta}$ gesetzt ist, also, da die Terme $\frac{1}{3}\zeta$ und $\frac{1}{3}r$ gegen die ersten sehr klein sind:

$$h/h^1 = \nu/\eta : 1/r .$$

Bezeichnet man mit e die Excentricität der Schnittellipse, so ist in erster Näherung:

$$\nu = 1 - \tfrac{1}{4}e^2 = (3 + \mu^2)/4 ,$$

wo $\mu = \eta/\xi$ ist, daher:

$$h/h^1 = (3 + \mu^2)/4\sqrt{\mu} = (3\xi^2 + \eta^2)/4\sqrt{\xi^3\eta} .$$

Da nun bei elliptischen Capillaren der Nenner stets kleiner als der Zähler ist, so folgt:

Die Flüssigkeit steigt in elliptischen Röhren stets höher als in kreisförmigen Röhren gleichen Querschnittes.

Da nun die Röhren mit kreisförmigem Querschnitt unter dem Mikroskop häufig schwach elliptisch erscheinen, so erklärt sich vielleicht hieraus der etwas grössere Werth der Capillaritätsconstanten, welchen einige Physiker mit Röhren

von kreisförmigem Querschnitt gegenüber dem meinigen für dieselben Flüssigkeiten gefunden haben.

Zur numerischen Berechnung von ν bediente ich mich der von Legendre[1]) angegebenen Tabellen für E. Setzt man $e = \sin \Theta$, so ergeben sich folgende Werthe:

Röhre	e^2	Θ	E	ν
I.	0,86988	68° 51′	1,12860	0,71848
II.	0,91456	73 —	1,09265	0,69560
III.	0,93446	75 10	1,07511	0,68445
IV.	0,91858	73 25	1,08922	0,69343
V.	0,88704	70 22	1,11518	0,70993
VI.	0,85402	67 37	1,14049	0,72607

Zu den einzelnen Versuchen sind drei bis vier der Röhren benutzt worden. Da im Lauf der Beobachtungen die Röhren IV und VI dauernd unbrauchbar wurden, mussten statt ihrer die Röhren II und V eingefügt werden.

Wie die abgeleiteten Formeln erkennen lassen, kommt es bei der Bestimmung der Capillaritätsconstanten a^2 auf eine genaue Ablesung der Steighöhe h an.

Zu diesem Zwecke benutzte ich ein Kathetometer, an dessen verschiebbarem Theile in einer Messinghülle horizontal ein Mikroskop ruhte, welchem gegenüber auf der anderen Seite eine graduirte Libelle angebracht war. Am Nonius liessen sich direct 0,05 mm ablesen. Vor jeder Versuchsreihe wurde das Kathetometer mit der Libelle eingestellt.

Dicht hinter dem Kathetometer stand auf einem mit drei Fussschrauben versehenen Brettchen ein kleiner Tisch, dessen Platte durch ein Schraubengewinde gehoben oder gesenkt werden konnte. Diese Platte wurde ebenfalls mit einer Libelle horizontal gestellt. Dieselbe trug einen kleinen Glastrog, welcher mit der zu untersuchenden Flüssigkeit so weit gefüllt war, dass dieselbe über die Ränder des Gefässes ein wenig überragte, doch musste während der Beobachtung ein Ueberfliessen derselben sorgsam verhindert werden. In den Trog tauchte nun die betreffende Capillarröhre, welche in einer Klemmschraube an einem Stativ hing. Durch

1) Legendre, Traité des fonctions elliptiques. 2. Tab. IX.

Visiren nach einem hinter ihr befindlichen frei schwebenden Loth konnte sie in verticale Stellung gebracht werden. Um grössere Helligkeit beim Einstellen des Mikroskopes zu erzielen, befand sich hinter der Röhre ein weisser Schirm. Hierdurch ergab sich zugleich eine gute Beleuchtung der äusseren Flüssigkeit, deren Niveau bei geeigneter Stellung des Troges im Mikroskop als ein heller weisser Streifen erschien, der sich scharf von der dunkeln Luft abhob und so eine genaue Einstellung auf das äussere Niveau erlaubte.

Um den in die Röhrenaxe fallenden dritten Halbmesser des Begrenzungsellipsoids zu bestimmen, wurde die Röhre stets so in die Klemmschraube gespannt, dass die grosse Axe der Durchschnittsellipse dem horizontalen Faden im Mikroskop parallel lief. Indem man denselben auf den tiefsten Punkt des Meniscus einstellte, bildete er die der grossen Axe parallel verlaufende Tangente an das Ellipsoid und fixirte den unteren Grenzpunkt. Den oberen Grenzpunkt erhielt man auf folgende Weise. In der Biegung des Meniscus zeigte sich ein heller Lichtreflex, welcher in der Nähe der tiefsten Stelle desselben beginnend, im Uebergang der Flüssigkeit in die verticale Wandung erlosch. Die Einstellung des Fadenkreuzes auf diesen Punkt ergab den gewünschten oberen Grenzpunkt. Da nun dieser Halbmesser im Verhältniss zur Steighöhe h nur klein ist, und blos ein Drittel seines Werthes in Betracht kommt, so wird eine kleine Ungenauigkeit in dieser Ablesung keinen merklichen Einfluss auf das schliessliche Resultat ergeben. Die Bestimmungen dieser Grösse für destillirtes Wasser wie für die verschiedenen Salzlösungen liessen keinen merklichen Unterschied erkennen, sodass man ζ für jede Röhre als constant ansehen darf. Aus einer Reihe von Messungen ergaben sich für die ζ folgende Werthe:

	ζ	ξ		ζ	ξ
I.	0,45 mm	0,44 mm	IV.	0,30 mm	0,31 mm
II.	0,30	0,29	V.	0,30	0,30
III.	0,27	0,28	VI.	0,50	0,50

Aus dem Vergleich der für ξ und ζ nebeneinander geschriebenen Werthe ergibt sich:

In den benutzten elliptischen Röhren ist der Meniscus nahezu ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe der kleinere Durchmesser der Ellipse des Röhrenquerschnittes ist.

Um den Meniscus vor jeglicher Unreinigkeit zu schützen, wurde die Flüssigkeit vor jedem Versuche in der Röhre aufgesaugt und dann die Ruhelage beobachtet, welche nach fünf bis zehn Minuten eintrat. In den weiteren Röhren I und IV zeigte sich bei den weniger zähen Flüssigkeiten nach dem Fallen noch ein schwaches Steigen, sodass hiernach die Flüssigkeitssäule um die Gleichgewichtslage zu schwingen schien. Bei den concentrirten Lösungen wurde die Ruhelage als Mittel aus den beim Fallen und Aufsteigen erreichten Grenzlagen genommen. Um eventuelle Schwankungen in der Grösse des Querschnittes zu vermeiden, konnte man durch Heben und Senken der Tischplatte die Röhre beliebig weit in die äussere Flüssigkeit tauchen, ohne an der Aufstellung selbst irgend welche Verrückungen vornehmen zu müssen. Hierdurch bildete sich die gehobene Flüssigkeitssäule an verschiedenen Stellen der Röhre unter sonst gleichen Umständen, und das Mittel aus den so beobachteten Steighöhen wird daher von derartigen Unregelmässigkeiten soviel als möglich frei sein.

Dieser ganze Beobachtungsapparat war auf einem in eine Grundmauer des Hauses eingelassenen Tische aufgestellt, wodurch zufällige Schwankungen des Fussbodens vermieden wurden. Die Beobachtung mit dem Mikroskop gestattete ferner, die zu untersuchende Röhre dicht hinter demselben aufzustellen und dadurch Fehlerquellen, welche sich bei grösseren Entfernungen durch Ablesung mittelst Fernrohres infolge der Abweichung der Röhre aus verticaler Lage ergeben, zu umgehen.

Von wesentlichem Einfluss auf die Capillaritätsconstante ist schliesslich noch die Temperatur, welche gemessen wurde mit einem in die äussere Flüssigkeit tauchenden Geissler'schen Thermometer, das $0{,}1^{\circ}$ C. schätzen liess. Um grössere Schwankungen derselben zu vermeiden, wurde die Luft des

Beobachtungszimmers möglichst constant auf 16° C. erhalten, was sich in den Herbst- und Wintermonaten durchführen liess. Die Temperatur der Flüssigkeiten war dabei durchschnittlich 15° und änderte sich während der Versuche höchstens um 0,5°. Zum Vergleich der gewonnenen Resultate untereinander wurden die Capillaritätsconstanten noch auf eine mittlere Temperatur von 15° reducirt unter Benutzung der angenäherten Formel:

$$a^2_{15} = a^2(1 \pm 0{,}029\,t),$$

welche sich aus den Beobachtungen Brunner's und Frankenheim's für Wasser ergibt. Da sich auch bei den Salzlösungen die Temperaturunterschiede nur innerhalb weniger Grade bewegen, und das Wasser als Lösungsmittel die Menge des aufgenommenen Salzes bei weitem überwiegt, so sind auch die Capillaritätsconstanten der Salzlösungen nach dieser Formel reducirt worden.

Zur Kenntniss der wirklichen Cohäsion α wie des Salzgehaltes der einzelnen Lösungen ist eine genaue Angabe der specifischen Gewichte derselben erforderlich. Diese wurden nach der Archimedischen Methode mit einer Kugel bestimmt, welche an einem feinen Draht an einer empfindlichen Wage aufgehangen war. Bei Berechnung der wirklichen Cohäsion α sind die specifischen Gewichte auf Wasser von 4° C. als Einheit bezogen und hierbei die Reductionstabellen aus Kohlrausch: „Praktische Physik" verwendet. Aus den Gerlach'schen Tabellen[1]), in welchen die specifischen Gewichte auf Wasser von 15° C. als Einheit bezogen sind, konnte man den Gehalt an wasserfreiem Salze für die betreffenden Lösungen bestimmen. In allen Fällen fand am Beginn und Schluss jedes Versuches eine solche specifische Gewichtsbestimmung statt. Infolge der Verdunstung des Wassers führte die letztere zu einem etwas grösseren Werthe, der Unterschied bleibt jedoch stets so gering, dass es genügt, das Mittel aus beiden Bestimmungen in Rechnung zu bringen.

---

1) Gerlach, Fres. Zeitschr. f. analyt. Chem. 8.

Versuche mit Wasser.

Von der höchsten Wichtigkeit für die folgenden Untersuchungen ist eine genaue Bestimmung der Capillaritätsconstanten des destillirten Wassers. Denn diese lässt einerseits durch Vergleiche der gewonnenen Resultate mit denen anderer Beobachter einen Schluss auf die Brauchbarkeit des angewandten Apparates zu; andererseits bildet sie den natürlichen Ausgangspunkt für die Untersuchung der Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Concentration der Salzlösungen. Es wurden deshalb zu wiederholten Malen Versuche mit destillirtem Wasser angestellt, aus welchem durch langes Kochen die Luft ausgetrieben war. Allein hierbei trat, wie es auch Volkmann beobachtet hatte, keine definitive Steighöhe ein, sondern nach dem Aufsaugen ein continuirliches langsames Fallen, das sich aus der beständigen Mischung von Wasser und Luft erklären lässt, da ja der Apparat nicht gegen die umgebende Luft abgeschlossen war. Die folgenden Versuche beziehen sich daher auf destillirtes Wasser, welches durch längeres Stehen mit Luft vollständig gesättigt war. Hierbei traten nun auch in kurzer Zeit definitive Grenzlagen ein, die sich während einiger Minuten unverändert erhielten.

In den folgenden Tabellen sind die Mittelwerthe der beobachteten Steighöhen in Millimetern angegeben und mit den daraus berechneten Capillaritätsconstanten zusammengestellt. Die den Steighöhen zugefügten Zahlen ergeben die Abweichungen des Mittelwerthes von der höchsten beobachteten Steighöhe.

Röhre I.

15,35°	14,05°	17°	21,05°
66,08 + 0,02	66,21 + 0,04	65,85 + 0,00	65,25 + 0,00
$a^2 = 14{,}700$	$a^2 = 14{,}740$	$a^2 = 14{,}660$	$a^2 = 14{,}527$

$a_{15}{}^2 = 14{,}710.$

Röhre II.

14,45°	15,75°
119,97 + 0,03	119,65 + 0,05
$a^2 = 14{,}743$	$a^2 = 14{,}704$

$a_{15}{}^2 = 14{,}723$

Röhre III.

16,30°
140,20 + 0,00
$a^2 = 14{,}671$

$a_{15}{}^2 = 14{,}709.$

Röhre IV.

22,2°	17°
114,05 + 0,00	115,35 + 0,05
$a^2 = 14{,}500$	$a^2 = 14{,}666$

$a_{15}^2 = 14{,}708$.

Röhre V.

16°	22°	21°
104,47 + 0,03	103,23 + 0,03	103,35 + 0,05
$a^2 = 14{,}689$	$a^2 = 14{,}501$	$a^2 = 14{,}532$

$a_{15}^2 = 14{,}715$.

Röhre VI.

19,45°	17,3°	18,05°
55,15 + 0,00	55,40 + 0,00	55,30 + 0,05
$a^2 = 14{,}591$	$a^2 = 14{,}657$	$a^2 = 14{,}631$

$a_{15}^2 = 14{,}719$,

also im Mittel aus allen Beobachtungen:

$$a_{15}^2 = 14{,}714.$$

Die aufgeführten Zahlen zeigen eine befriedigende Uebereinstimmung, die kleinen Abweichungen liegen innerhalb der Beobachtungsfehler. Nach der Zusammenstellung dieser Werthe mit denen, welche andere Beobachter gefunden haben:

Frankenheim	$a^2 = 14{,}84$	bei 16,5°
Rodenbeck . .	14,64	„ 17,5°
Volkmann . .	14,53	„ 16°
Quincke . . .	14,70	„ ca. 15°

schliessen sich die meinigen am besten denen von Rodenbeck und Quincke angegebenen an.

Versuche mit Salzlösungen.

Die bei den folgenden Versuchen zur Verwendung gebrachten Salze waren als chemisch rein aus der Apotheke des Hrn. Maschke in Breslau bezogen. Um zu prüfen, ob geringe Verunreinigungen derselben bereits einen merklichen Einfluss auf die Capillaritätsconstante ausüben würden, löste ich 0,25 g Na_2SO_4 und 0,1 g Na_2SO_4 in 100 g destillirten Wassers und beobachtete für diese Lösungen folgende Steighöhen:

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
16,4°	16,2°	16°
65,85 + 0,00	139,85 + 0,00	104,20 + 0,00
$a^2 = 14{,}660$	$a^2 = 14{,}635$	$a^2 = 14{,}651$
	$a_{15}^2 = 14{,}684$,	
16,4°	17,05°	16,6°
66,00 + 0,00	139,90 + 0,00	104,30 + 0,00
$a^2 = 14{,}693$	$a^2 = 14{,}641$	$a^2 = 14{,}665$
	$a_{15}^2 = 14{,}716$.	

Die geringen Abweichungen in den Werthen der Capillaritätsconstanten, welche aus den Steighöhen dieser Lösungen berechnet sind, gegenüber denen des reinen Wassers liegen noch innerhalb der Schwankungen, welche diese Capillaritätsconstanten des Wassers aufweisen. Im Einklang mit Volkmann lässt sich wohl behaupten:

Geringe Verunreinigungen der zu untersuchenden Lösungen können den Werth der Capillaritätsconstanten derselben nicht merklich verkleinern.

Infolge des obigen Resultates konnte daher eine Prüfung der betreffenden Salze rücksichtlich ihrer chemischen Reinheit unterlassen werden.

Ueber die in den folgenden Tabellen benutzte Bezeichnungsweise setze ich fest:

s bedeutet das specifische Gewicht der Lösung bei der Temperatur t^0 bezogen auf Wasser derselben Temperatur als Einheit, σ das specifische Gewicht der Lösung bei der Beobachtungstemperatur, bezogen auf Wasser von 4° als Einheit, S die aus den Gerlach'schen Tabellen berechneten Gewichtstheile wasserfeien Salzes, welche in 100 Gewichtstheilen Wasser gelöst sind, und y die Anzahl von Salzäquivalenten, die mit 100 Aequivalenten Wasser in der Salzlösung verbunden waren.

I. Chlornatrium.

14,65° $s = 1{,}0366$ $S = 5{,}323$ $y = 0{,}8188$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,7°	16,40°	16,20°	16°
64,84 + 0,01	117,26 + 0,04	137,71 + 0,04	113,35 + 0,00
$a^2 = 14{,}427$	$a^2 = 14{,}411$	$a^2 = 14{,}411$	$a^2 = 14{,}411$

$a_{15}^2 = 14{,}446$.

13,65° $s = 1{,}0735$ $S = 11{,}127$ $y = 1{,}7119$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15,25°	15,5°	15,55°
63,83 + 0,02	115,62 + 0,03	135,76 + 0,04
$a^2 = 14{,}211$	$a^2 = 14{,}209$	$a^2 = 14{,}207$

$a_{15}^2 = 14{,}222$.

13,60° $s = 1{,}1120$ $S = 17{,}575$ $y = 2{,}7038$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,2°	16,2°	15°	15°
62,90 + 0,00	113,65 + 0,00	133,93 + 0,02	110,20 + 0,00
$a^2 = 14{,}005$	$a^2 = 13{,}968$	$a^2 = 14{,}019$	$a^2 = 14{,}011$

$a_{15}^2 = 14{,}012$.

13,20° $s = 1{,}152$ $S = 25{,}017$ $y = 3{,}849$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
16°	15,8°	16°	15,9°
61,96 + 0,04	112,30 + 0,05	131,70 + 0,00	108,90 + 0,05
$a^2 = 13{,}796$	$a^2 = 13{,}802$	$a^2 = 13{,}783$	$a^2 = 13{,}801$

$a_{15}^2 = 13{,}820$.

15° $s = 1{,}1954$ $S = 33{,}764$ $y = 5{,}1943$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15,55°	15,95°	16°
61,53 + 0,02	111,35 + 0,00	130,82 + 0,03
$a^2 = 13{,}700$	$a^2 = 13{,}685$	$a^2 = 13{,}690$

$a_{15}^2 = 13{,}716$.

II. Chlorkalium.

15° $s = 1{,}01624$ $S = 2{,}5625$ $y = 0{,}80956$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
13,4°	14°	14°	14°
65,80 + 0,00	115,00 + 0,00	139,70 + 0,00	119,00 + 0,00
$a^2 = 14{,}649$	$a^2 = 14{,}621$	$a^2 = 14{,}621$	$a^2 = 14{,}624$

$a_{15}^2 = 14{,}597$.

15° $s = 1{,}03223$ $S = 5{,}2171$ $y = 0{,}63024$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,05°	14,5°	14,6°	14°
65,10 + 0,00	117,82 + 0,03	138,22 + 0,03	114,10 + 0,00
$a^2 = 14{,}493$	$a^2 = 14{,}479$	$a^2 = 14{,}464$	$a^2 = 14{,}506$

$a_{15}^2 = 14{,}466$.

15° $s = 1{,}04882$ $S = 8{,}05$ $y = 0{,}97248$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,75°	14,85°	15,5°	14,5°
64,45 + 0,00	116,80 + 0,00	136,95 + 0,00	113,00 + 0,00
$a^2 = 14{,}349$	$a^2 = 14{,}354$	$a^2 = 14{,}331$	$a^2 = 14{,}366$

$a_{15}^2 = 14{,}348$.

15° $s = 1{,}06587$ $S = 11{,}124$ $y = 1{,}34378$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	14,3°	15°	14,3°
64,10 + 0,00	115,90 + 0,00	136,00 + 0,00	112,10 + 0,00
$a^2 = 14{,}271$	$a^2 = 14{,}244$	$a^2 = 14{,}232$	$a^2 = 14{,}252$

$a_{15}^2 = 14{,}243$.

15° $s = 1{,}09926$ $S = 17{,}426$ $y = 2{,}10519$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,2°	15,2°	15,2°	15°
63,00 + 0,00	114,10 + 0,00	134,08 + 0,02	110,40 + 0,00
$a^2 = 14{,}027$	$a^2 = 14{,}025$	$a^2 = 14{,}031$	$a^2 = 14{,}049$

$a_{15}^2 = 14{,}032$.

15° $s = 1{,}13600$ $S = 24{,}414$ $y = 2{,}94933$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15°	15°	14,6°
62,07 + 0,03	112,45 + 0,00	132,12 + 0,03	108,90 + 0,00
$a^2 = 13{,}820$	$a^2 = 13{,}818$	$a^2 = 13{,}816$	$a^2 = 13{,}846$

$a_{15}^2 = 13{,}822$.

15° $s = 1{,}15854$ $S = 29{,}929$ $y = 3{,}61559$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,6°	14,7°	15°	15°
61,80 + 0,00	111,60 + 0,00	131,41 + 0,04	108,05 + 0,00
$a^2 = 13{,}760$	$a^2 = 13{,}753$	$a^2 = 13{,}752$	$a^2 = 13{,}738$

$a_{15}^2 = 13{,}746$.

III. Schwefelsaures Natrium.

15° $s = 1{,}02291$ $S = 2{,}581$ $y = 0{,}3272$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15,25°	14,35°	14,10°
65,00 + 0,00	118,05 + 0,00	138,71 + 0,04
$a^2 = 14{,}471$	$a^2 = 14{,}508$	$a^2 = 14{,}515$

$a_{15}^2 = 14{,}485$.

15° $s = 1{,}04564$ $S = 5{,}250$ $y = 0{,}6655$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
14°	14,5°	15°
64,18 + 0,02	116,15 + 0,00	136,30 + 0,00
$a^2 = 14{,}289$	$a^2 = 14{,}275$	$a^2 = 14{,}263$

$a_{15}^2 = 14{,}261$.

15° $s = 1{,}05345$ $S = 6{,}194$ $y = 0{,}7851$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15,60°	15°	15,4°
63,63 + 0,02	115,45 + 0,05	135,41 + 0,04
$a^2 = 14{,}167$	$a^2 = 14{,}188$	$a^2 = 14{,}170$

$a_{15}^2 = 14{,}185$.

15,80° $s = 1{,}05775$ $S = 6{,}7780$ $y = 0{,}8513$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15°	15,6°	16°
63,55 + 0,00	115,00 + 0,00	134,96 + 0,04
$a^2 = 14{,}149$	$a^2 = 14{,}135$	$a^2 = 14{,}124$

$a_{15}{}^2 = 14{,}151.$

14,70° $s = 1{,}06871$ $S = 7{,}939$ $y = 1{,}0063$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,25°	14,8°	15,7°	15,15°
63,00 + 0,00	114,27 + 0,03	133,95 + 0,00	110,35 + 0,00
$a^2 = 14{,}027$	$a^2 = 14{,}044$	$a^2 = 14{,}019$	$a^2 = 14{,}030$

$a_{15}{}^2 = 14{,}036.$

15,40° $s = 1{,}08962$ $S = 10{,}706$ $y = 1{,}3571$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
16,15°	15,30°	15,60°
62,00 + 0,00	112,60 + 0,00	132,15 + 0,00
$a^2 = 13{,}805$	$a^2 = 13{,}838$	$a^2 = 13{,}829$

$a_{15}{}^2 = 13{,}844.$

IV. Schwefelsaures Kalium.

15° $s = 1{,}0148$ $S = 1{,}8381$ $y = 0{,}1901$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,5°	14,5°	14,8°	14,5°
65,55 + 0,00	118,67 + 0,03	139,31 + 0,04	114,80 + 0,00
$a^2 = 14{,}593$	$a^2 = 14{,}584$	$a^2 = 14{,}578$	$a^2 = 14{,}595$

$a_{15}{}^2 = 14{,}575.$

15° $s = 1{,}0224$ $S = 2{,}818$ $y = 0{,}2915$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,9°	15°	15,1°	14,8°
65,10 + 0,05	117,92 + 0,03	138,45 + 0,00	114,10 + 0,00
$a^2 = 14{,}493$	$a^2 = 14{,}491$	$a^2 = 14{,}488$	$a^2 = 14{,}506$

$a_{15}{}^2 = 14{,}493.$

15° $s = 1{,}0297$ $S = 3{,}7630$ $y = 0{,}3893$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,4°	15°	15°	14,9°
64,85 + 0,00	117,35 + 0,05	137,80 + 0,00	113,50 + 0,05
$a^2 = 14{,}438$	$a^2 = 14{,}422$	$a^2 = 14{,}420$	$a^2 = 14{,}430$

$a_{15}{}^2 = 14{,}422.$

15° $s = 1{,}04008$ $S = 5{,}134$ $y = 0{,}5311$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,1°	15,2°	15,1°	15°
64,30 + 0,00	116,35 + 0,00	136,85 + 0,00	112,75 + 0,00
$a^2 = 14{,}316$	$a^2 = 14{,}299$	$a^2 = 14{,}321$	$a^2 = 14{,}335$

$a_{15}{}^2 = 14{,}321.$

15°	$s = 1{,}0484$	$S = 6{,}235$	$y = 0{,}6450$
Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15,8°	15,5°	15°
64,02 + 0,03	115,80 + 0,00	135,90 + 0,00	112,00 + 0,00
$a^2 = 14{,}253$	$a^2 = 14{,}231$	$a^2 = 14{,}222$	$a^2 = 14{,}240$

$a_{15}^2 = 14{,}242.$

16°	$s = 1{,}05471$	$S = 7{,}091$	$y = 0{,}7836$
Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,75°	16,05°	16°	16,3°
63,70 + 0,00	114,93 + 0,02	135,04 + 0,01	111,17 + 0,03
$a^2 = 14{,}149$	$a^2 = 14{,}112$	$a^2 = 14{,}120$	$a^2 = 14{,}121$

$a_{15}^2 = 14{,}154.$

15°	$s = 1{,}08172$	$S = 10{,}849$	$y = 1{,}1223$
Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,5°	15,7°	15,4°	15,1°
62,71 + 0,04	113,27 + 0,03	133,00 + 0,05	109,65 + 0,00
$a^2 = 13{,}929$	$a^2 = 13{,}909$	$a^2 = 13{,}909$	$a^2 = 13{,}929$

$a_{15}^2 = 13{,}932.$

Um einen besseren Ueberblick über die Abhängigkeit der Capilaritätsconstanten vom Salzgehalt zu bekommen, stelle ich die gewonnenen Resultate in folgender Tabelle zusammen:

σ	S	a^2_{15}	α
2NaCl.	Aequiv. Gew. 117		
1,0358	5,323	14,446	7,482
1,0723	11,127	14,222	7,629
1,1104	17,575	14,012	7,780
1,1511	25,017	13,820	7,954
1,1941	33,764	13,716	8,189
2KCl.	Aequiv. Gew. 149		
1,01548	2,563	14,597	7,411
1,03133	5,217	14,466	7,460
1,04788	8,050	14,348	7,518
1,06492	11,124	14,244	7,584
1,09823	17,426	14,032	7,705
1,13496	24,414	13,822	7,844
1,15739	29,929	13,746	7,955

σ	S	a^2_{15}	α
Na_2SO_4.	Aequiv. Gew. 142		
1,02211	2,581	14,485	7,403
1,04475	5,250	14,261	7,450
1,05250	6,194	14,185	7,465
1,05689	6,718	14,151	7,478
1,06770	7,939	14,036	7,493
1,08852	10,706	13,844	7,536
K_2SO_4.	Aequiv. Gew. 174		
1,0139	1,838	14,575	7,389
1,0214	2,818	14,493	7,402
1,0288	3,763	14,422	7,419
1,0391	5,134	14,321	7,441
1,0474	6,235	14,242	7,458
1,0540	7,091	14,154	7,459
1,0808	10,849	13,932	7,529

Für die späteren Untersuchungen ist es nun nothwendig, die Capillaritätsconstante a^2 in Form eines allgemeinen Ausdruckes darzustellen; denn es ist nicht möglich, für jede Concentration dieselbe direct zu bestimmen oder nur solche Lösungen zu den Gemischen zu verwenden, für welche jene Grösse bereits bekannt ist.

Zur Ableitung einer solchen allgemeinen Formel benutzt man entweder das seiner Einfachheit wegen am schnellsten zum Ziele führende graphische Interpolationsverfahren oder das durch Rechnung.

In der am Schlusse angehängten Tafel habe ich nach der ersten Methode für die Capillaritätsconstanten a^2 der einzelnen Lösungen je eine Curve gezeichnet, indem ich die Anzahl der Salzäquivalente als Abscissen, die zugehörigen Werthe der specifischen Cohäsion a^2 als Ordinaten aufgetragen habe.

Hieraus ergeben sich nun folgende Sätze:

Alle Curven wenden ihre convexe Seite der positiven X- und Y-Axe zu.

Die Curven schneiden einander nicht.

Die specifische Cohäsion a^2 nimmt schneller bei geringerem, langsamer bei höherem Salzgehalt ab.

Die Curven der Chlorverbindungen oder die der leicht löslichen Salze nähern sich langsamer der Abscissenaxe als die der schwerer löslichen schwefelsauren Salze.

Sowohl bei den Chloriden wie bei den schwefelsauren Verbindungen gehört dem Salz mit höherem Aequivalentgewicht die steilere Curve zu.

Allein diese graphische Darstellung genügt nur für die Fälle, in denen es auf eine ungefähre Schätzung der gesuchten Werthe ankommt. Da aber für die späteren Beobachtungen eine möglichst genaue Bestimmung der Capillaritätsconstanten a^2 nothwendig ist, so führte ich auch das Interpolationsverfahren durch Rechnung aus, indem ich die nach Potenzen von y fortschreitende Reihe zu Grunde legte:

$$a^2 = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 + \cdots$$

Da A_2 bereits eine sehr kleine Grösse und y in den meisten Fällen ein echter Bruch ist, die Capillaritätsconstante auch schon in der zweiten Decimalstelle ungenau wird, so genügt es, diese Reihe nach dem dritten Gliede abzubrechen und mit der einfachen Form:

$$a^2 = A_0 + A_1 y + A_2 y^2$$

die Rechnung auszuführen. Die Werthe der Coëfficienten für die einzelnen Salzlösungen wurden aus sämmtlichen zu-

sammengehörigen Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate hergeleitet. Die zu Grunde zu legenden Gleichungen sind nun folgende. Für:

I. NaCl.
$a^2 = 14{,}694 - 0{,}3225\,y + 0{,}0257\,y^2$

II. KCl.
$a^2 = 14{,}719 - 0{,}4166\,y + 0{,}0402\,y^2$

III. Na_2SO_4.
$a^2 = 14{,}723 - 0{,}7409\,y + 0{,}0686\,y^2$

IV. K_2SO_4.
$a^2 = 14{,}741 - 0{,}8713\,y + 0{,}1467\,y^2$

Um zu erkennen, ob diese Formeln in der That zuverlässige Resultate ergeben, sind in der folgenden Tabelle die nach denselben berechneten Werthe der Capillaritätsconstanten mit den beobachteten zusammengestellt:

a^2 beob.	a^2 ber.	Differenz	a^2 beob.	a^2 ber.	Differenz
	NaCl			Na_2SO_4	
14,446	14,447	+0,001	14,485	14,488	+0,003
14,222	14,217	−0,005	14,261	14,260	−0,001
14,012	14,010	−0,002	14,185	14,184	−0,001
13,820	13,833	+0,013	14,151	14,142	−0,009
13,716	13,712	−0,004	14,036	14,047	+0,011
			13,844	13,844	+0,000
	KCl			K_2SO_4	
14,597	14,594	−0,003	14,575	14,580	+0,005
14,466	14,472	+0,006	14,493	14,499	+0,006
14,348	14,352	+0,004	14,422	14,424	+0,002
14,244	14,232	−0,012	14,321	14,319	−0,002
14,032	14,020	−0,012	14,242	14,240	−0,002
13,823	13,840	+0,017	14,154	14,181	+0,027
13,746	13,738	−0,008	14,932	14,948	+0,016

Die sich ergebenden Differenzen sind so klein, dass man sie als innerhalb der Beobachtungsfehler liegend ansehen kann, und da sie bald positiv, bald negativ sind, würde eine für die berechneten Werthe gezeichnete Cohäsionscurve die ursprüngliche an verschiedenen Stellen schneiden, im übrigen aber theils oberhalb, theils unterhalb derselben liegen. Hieraus ergibt sich somit die Brauchbarkeit der oben angegebenen Formeln.

In einer ganz ähnlichen Weise kann man auch die wirkliche Cohäsion α der Betrachtung unterziehen nnd dieselbe zunächst als Function des Salzgehaltes graphisch darstellen. Trägt man wieder, wie dies in der zweiten Figur am Schlusse geschehen ist, die Anzahl der Salzäquivalente y als Abscis-

sen, die entsprechenden Werthe der wirklichen Cohäsion α als Ordinaten auf und verbindet die so erhaltenen Punkte als Linien, so findet man als Curven der wirklichen Cohäsion nahezu gerade Linien. Aus der Betrachtung derselben fliessen wieder einige allgemeine Sätze:

Die wirkliche Cohäsion α wächst mit zunehmendem Salzgehalt.

Die einzelnen Curven schneiden einander nicht.

Den Salzen mit kleinerem Aequivalentgewicht entspricht der grössere Werth der wirklichen Cohäsion.

Sind die Curven der wirklichen Cohäsion in der That gerade Linien, so muss α eine lineare Function von y sein, z. B.

$$\alpha = Ay + B,$$

worin B offenbar die wirkliche Cohäsion des destillirten Wassers bedeutet.

Zur Prüfung dieser Gleichung benutze ich nochmals die früheren Beobachtungen, indem ich aus denselben die Grösse A als Mittelwerth berechne und sodann die für Ay beobachteten und berechneten Werthe zusammenstelle. Auch bei dieser Betrachtung ist eine mittlere Temperatur von 15° C. vorausgesetzt.

$$Ay = \alpha - 7{,}357.$$

I. NaCl.

		beob.	ber.	Diff.
A	0,8188	= 0,125	0,128	+0,003
A	1,712	= 0,272	0,268	−0,004
A	2,704	= 0,423	0,423	+0,000
A	3,849	= 0,597	0,603	+0,006
A	5,194	= 0,832	0,813	−0,019

$A = 0{,}1566.$

II. KCl.

		beob.	ber.	Diff.
A	0,30956	= 0,054	0,052	−0,002
A	0,63024	= 0,103	0,101	−0,002
A	0,97248	= 0,161	0,162	+0,001
A	1,34378	= 0,225	0,224	−0,001
A	2,10519	= 0,348	0,351	+0,003
A	2,94933	= 0,487	0,491	+0,004
A	3,61567	= 0,598	0,602	+0,004

$A = 0{,}1666.$

III. Na_2SO_4.

		beob.	ber.	Diff.
A	0,3272	= 0,046	0,045	−0,001
A	0,6655	= 0,093	0,092	−0,001
A	0,7851	= 0,108	0,108	+0,000
A	0,8513	= 0,121	0,118	−0,003
A	1,0063	= 0,136	0,139	+0,003
A	1,3571	= 0,179	0,187	+0,008

$A = 0{,}1382.$

IV. K_2SO_4.

		beob.	ber.	Diff.
A	0,1901	= 0,032	0,030	−0,002
A	0,2915	= 0,045	0,046	+0,001
A	0,3893	= 0,062	0,062	+0,000
A	0,5311	= 0,084	0,085	+0,001
A	0,6450	= 0,102	0,103	+0,001

$A = 0{,}1595.$

Aus dem Vergleich dieser Zahlen A mit den Aequivalentgewichten folgt:

2NaCl	117	0,1566	Na_2SO_4	142	0,1382
2KCl	149	0,1666	K_2SO_4	174	0,1595.

Den Salzen mit grösserem Aequivalentgewicht gehört auch die grössere Zahl A zu, oder in jeder der beiden Gruppen fällt die Cohäsionslinie des Salzes mit dem höheren Aequivalentgewicht steiler ab als die des anderen.

Wie man aus diesen Werthangaben erkennt, liegen die Differenzen innerhalb so enger Grenzen und haben bald positives, bald negatives Vorzeichen, dass auch die folgenden Formeln mit hinreichender Genauigkeit zur Berechnung von α benutzt werden können.

I.	NaCl	$\alpha = 0{,}1566\,y + 7{,}357$
II.	KCl	$\alpha = 0{,}1666\,y + 7{,}357$
III.	Na_2SO_4	$\alpha = 0{,}1382\,y + 7{,}357$
IV.	K_2SO_4	$\alpha = 0{,}1595\,y + 7{,}357$

Versuche mit Salzlösungsgemischen.

Bei diesen Bestimmungen wird es darauf ankommen, den Zusammenhang zu erkennen, welcher zwischen den Capillaritätsconstanten des Gemisches und denen der einzelnen Lösungen besteht.

In seiner „théorie de l'action capillaire", stellt Poisson zuerst eine solche Beziehung auf. Hier heisst es:

„Wenn man mit u und u^1 zwei positive Brüche bezeichnet, deren Summe die Einheit ist, und zwei Flüssigkeiten in dem Verhältniss u und u^1 miteinander mischt, ferner mit v den Werth des Produktes $h\varrho$ (der nahezu mit a^2 identisch ist), der dem Gemenge entspricht, so hat man:

$$v = u^2 f + u u^1 f_1 + u'^2 f^1;$$

ff_1f^1 sind auch von u und u^1 unabhängige Grössen, und die erste und letzte sind die Werthe von $h\varrho$ in Bezug auf die gesonderten Flüssigkeiten."

Während nun diese Formel durch die Versuche von Gay-Lussac, welche mit Wasser und Salpetersäure angestellt waren, bestätigt wurde, war dies nicht der Fall bei den Versuchen mit Wasser und Alkohol. Den Grund dieser

Abweichung erkannte zuerst Rodenbeck darin, dass bei der Mischung von Wasser und Alkohol eine Volumencontraction des Gemisches eintrat, welche eine wesentliche Aenderung in der Zusammensetzung der Capillaritätsconstanten bedingte. Diese wie die folgenden Formeln gelten somit nur für solche Flüssigkeiten, bei deren Mischung keine Volumencontraction zu bemerken ist.

Zu der von Poisson aufgestellten Formel gelangte auch Volkmann [1]), indem er die gegenseitige Einwirkung zweier übereinander lagernder Flüssigkeiten auf einen Flüssigkeitscylinder berechnet, welcher senkrecht durch ein Element der Trennungsfläche hindurch geht. Indem er in die Formel die wirkliche Cohäsion einsetzt, lautet dieselbe:

$$\alpha = u_1^2 \alpha_1 + 2 u_1 u_2 \alpha_{12} + u_2^2 \alpha_2 ,$$

worin $u_1 u_2$ zwei Verhältnisszahlen bedeuten, und α_{12} als das Maass der Anziehung der Theilchen der Flüssigkeit I auf die der Flüssigkeit II definirt ist.

Schliesslich leitet auch Rodenbeck durch einen Analogieschluss aus der Mischungstheorie eine solche Formel her, welche den Zusammenhang zwischen den betreffenden Capillaritätsconstanten ausdrückt.

Bezeichnen $s_1 s_2$ die specifischen Gewichte zweier Flüssigkeiten, s das ihres Gemisches, ferner $v_1 v_2$ die Volumina der beiden zu mischenden Flüssigkeiten, so ergibt sich unter der Voraussetzung, dass beim Mischen keine Volumencontraction eintritt:

$$s = (s_1 v_1 + s_2 v_2)/(v_1 + v_2) = (s_1 v_1/v_2 + s_2)/(v_1/v_2 + 1).$$

Ebenso wie sich hier das specifische Gewicht eines Flüssigkeitsgemisches aus denen der einzelnen Flüssigkeiten zusammensetzt, liegt es nahe, anzunehmen, dass sich in entsprechender Weise die Capillaritätsconstante der Mischung aus denen der zu mischenden Elemente zusammensetzen wird. Hierbei wird es zunächst gleichgültig sein, welche der beiden Capillaritätsconstanten der Betrachtung zu Grunde gelegt werden, d. h. es wird jede der beiden Formeln zu prüfen sein:

1) Volkmann, Wied. Ann. **16.** p. 321. 1882.

$$\text{I}_a.\quad a^2 = (a_1^2 v_1/v_2 + a_2^2)/(v_1/v_2 + 1),$$
$$\text{II}_a.\quad \alpha = (a_1 v_1/v_2 + a_2)/(v_1/v_2 + 1).$$

Aus den umstehenden Gleichungen lässt sich nun das Verhältniss der Volumina durch die der Messung zugänglichen specifischen Gewichte bestimmen. Es ist nämlich:

$$v_1/v_2 = (s_2 - s)/(s - s_1),$$

und dieser Werth oben eingesetzt ergibt:

$$\text{I.}\quad a^2 = a_1^2 + (a_2^2 - a_1^2)(s - s_1)/(s_2 - s_1),$$
$$\text{II.}\quad \alpha = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)(s - s_1)/(s_2 - s_1).$$

Diese aus der Mischungstheorie hergeleiteten Formeln gehen unter einer speciellen Voraussetzung aus denen durch theoretische Betrachtungen gewonnenen Formeln von Poisson und Volkmann hervor. Ersetzt man nämlich in der Poisson'schen Formel die Grössen vff_1f^1 durch $a^2a_1^2 2a_{12}^2a_2^2$ und nimmt an:

$$a_{12}^2 = \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2), \text{ resp. } \alpha_{12} = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2),$$

so folgt aus:

$$a^2 = u_1^2 a_1^2 + 2u_1 u_2 a_{12}^2 + u_2^2 a_2^2 = (u_1 a_1^2 + u_2 a_2^2)(u_1 + u_2),$$

und da nun $u_1 + u_2 = 1$ sein soll, folgt:

$$a^2 = u_1 a_1^2 + u_2 a_2^2.$$

Drückt man die Grössen u_1 und u_2 in Volumentheilen aus, so ist:

$$u_1 = v_1/(v_1 + v_2), \qquad u_2 = v_2/(v_1 + v_2),$$

und hierfür die specifischen Gewichte eingeführt:

$$u_1 = (s - s_2)/(s_1 - s_2)\, u_2 = (s_1 - s)/(s_1 - s_2),$$

ergibt: $a^2 = a_1^2 + (a_2^2 - a_1^2)(s - s_1)/(s_2 - s_1),$

und ebenso: $\alpha = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)(s - s_1)/(s_2 - s_1).$

Wenn nun diese Formeln Anspruch auf allgemeine Gültigkeit machen sollen für alle Flüssigkeitsgemische, bei denen keine Volumencontraction während der Mischung eintritt, so werden dieselben auch auf Salzlösungsgemische angewandt werden dürfen, da für diese jene Bedingung erfüllt ist. Berechnet man daher die Capillaritätsconstante eines solchen Gemisches nach den obigen Formeln, so wird dieselbe mit der aus den Beobachtungen gewonnenen in allen Fällen übereinstimmen müssen.

Zu dieser Untersuchung lassen sich zunächst die vorigen

Salzlösungen selbst wieder verwenden, denn man kann dieselben als Mischungen reinen Wassers mit wasserfreiem Salze auffassen. Da die Capillaritätsconstante des destillirten Wassers und die der betreffenden Salzlösungen aus den einzelnen Versuchen bekannt sind, so kann man aus der Formel: $2u_1u_2\alpha_{12} + u_2^2\alpha_2 = \alpha - u_1^2\alpha_1$, nach der Methode der kleinsten Quadrate α_{12} und α_2 berechnen und durch rückwärts Einsetzen in dieselbe Gleichung mittelst der so gewonnenen Grössen wieder die Constanten α bestimmen, welche dann bei Gültigkeit jener Formel mit den beobachteten Grössen α übereinstimmen müssen. Bei dieser Ausführung ergibt sich gleichzeitig ein Werth für die Cohäsion des wasserfreien Salzes selbst wie für seine Adhäsion an reines Wasser, wenngleich die auf diesem Wege erlangten Werthe keinen hohen Grad von Sicherheit gewähren werden.

Den Berechnungen von u lege ich dieselben specifischen Gewichte der reinen Salze zu Grunde, welche Volkmann[1]) in seiner Arbeit angeführt hat.

Die Resultate der Rechnung stelle ich wieder in folgenden Tabellen zusammen:

I. NaCl. ($s_2 = 2{,}15$).

u_2	beob. $\alpha - u_1^2\alpha_1$	ber.	Diff.
0,02416	0,476	0,476	±0,000
0,04921	0,978	0,971	−0,007
0,07557	1,493	1,493	±0,000
0,10423	2,051	2,061	+0,010
0,13573	2,694	2,689	−0,005

$\alpha_{12} = 9{,}886$ $\alpha_2 = 20{,}70$.

II. KCl. ($s_2 = 1{,}95$).

u_2	beob. $\alpha - u_1^2\alpha_1$	ber.	Diff.
0,01304	0,245	0,242	−0,003
0,02619	0,483	0,484	+0,001
0,03984	0,736	0,736	±0,000
0,05423	1,001	1,001	±0,000
0,08242	1,511	1,513	+0,002
0,11178	2,040	2,043	+0,003
0,13366	2,433	2,435	+0,002

$\alpha_{12} = 9{,}283$ $\alpha_2 = 15{,}967$.

III. Na_2SO_4. ($s_2 = 2{,}624$).

u_2	beob. $\alpha - u_1^2\alpha_1$	ber.	Diff.
0,00976	0,189	0,191	+0,002
0,01965	0,379	0,381	+0,002
0,02394	0,444	0,446	+0,002
0,02500	0,484	0,482	−0,002
0,02941	0,562	0,558	−0,004
0,03926	0,745	0,747	+0,002

$\alpha_{12} = 9{,}865$ $\alpha_2 = 1{,}964$.

IV. K_2SO_4. ($s_2 = 2{,}66$).

u_2	beob. $\alpha - u_1^2\alpha_1$	ber.	Diff.
0,006 863	0,133	0,131	−0,002
0,010 483	0,198	0,199	+0,001
0,013 949	0,266	0,265	−0,001
0,018 934	0,360	0,259	−0,001
0,022 902	0,435	0,434	−0,001

$\alpha_{12} = 9{,}537$ $\alpha_2 = 12{,}316$.

1) Volkmann, Wied. Ann. 17.

Aus der Betrachtung der erlangten Grössen α_2 und α_{12} ergeben sich folgende Bemerkungen:

Die wirkliche Cohäsion der wasserfreien Chlorverbindungen ist grösser als die der wasserfreien schwefelsauren Salze.

Das destillirte Wasser übt auf die verschiedenen wasserfreien Salze eine nahezu gleiche Adhäsionskraft aus.

Von der Durchführung der Rechnung derselben Versuche nach der aus der Mischungstheorie gewonnenen Formel ist Abstand genommen worden, da die auf diese Weise erlangten Werthe der wirklichen Cohäsion doch keine genügende Sicherheit besitzen.

Ich wende mich nunmehr zur Untersuchung solcher Flüssigkeitsgemische, welche aus zwei der früheren Salzlösungen hergestellt sind. Zu dem Gemisch sind stets 150 g jeder Lösung verwandt worden.

I. NaCl + KCl.

1.	NaCl	15°	$s = 1{,}03629$	$S_1 = 5{,}271$	$y_1 = 0{,}81085$
2.	KCl	15°	$s = 1{,}03214$	$S_2 = 5{,}202$	$y_2 = 0{,}6284$
	Gemisch	16°	$s = 1{,}03449$	$\sigma = 1{,}03347$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15°	15,3°	15°
65,10 + 0,00	117,60 + 0,05	138,12 + 0,03	113,75 + 0,00
$a^2 = 14{,}493$	$a^2 = 14{,}465$	$a^2 = 14{,}463$	$a^2 = 14{,}461$

$a_{15}{}^2 = 14{,}470.$

1.	NaCl	15°	$s = 1{,}07293$	$S_1 = 10{,}966$	$y_1 = 1{,}6987$
2.	KCl	15°	$s = 1{,}06507$	$S_2 = 10{,}976$	$y_2 = 1{,}326$
	Gemisch	15°	$s = 1{,}06945$	$\sigma = 1{,}06853$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15°	15°	15°
64,00 + 0,05	115,82 + 0,03	136,01 + 0,04	111,90 + 0,00
$a^2 = 14{,}249$	$a^2 = 14{,}234$	$a^2 = 14{,}233$	$a^2 = 14{,}227$

$a_{15}{}^2 = 14{,}238.$

1.	NaCl	19°	$s = 1{,}12251$	$S_1 = 19{,}617$	$y_1 = 3{,}0181$
2.	KCl	19°	$s = 1{,}11003$	$S_2 = 19{,}55$	$y_2 = 2{,}0632$
	Gemisch	19°	$s = 1{,}11639$	$\sigma = 1{,}11453$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
20,4°	20,4°	20,6°
62,05 + 0,00	98,16 + 0,04	131,90 + 0,00
$a^2 = 13{,}816$	$a^2 = 13{,}817$	$a^2 = 13{,}803$

$a_{15}{}^2 = 13{,}971.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}15039$ $S_1 = 24{,}866$ $y_1 = 3{,}8255$
2. KCl 15° $s = 1{,}13392$ $S_2 = 24{,}529$ $y_2 = 2{,}9632$
Gemisch 15° $s = 1{,}14240$ $\sigma = 1{,}14148$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15,3°	15,4°	15,3°
62,15 + 0,00	112,50 + 0,05	132,16 + 0,04
$a^2 = 13{,}830$	$a^2 = 13{,}826$	$a^2 = 13{,}835$

$a_{15}^2 = 13{,}840.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}03614$ $S_1 = 5{,}248$ $y_1 = 0{,}8263$
2. KCl 15° $s = 1{,}09913$ $S_2 = 17{,}401$ $y_2 = 2{,}1021$
Gemisch 15° $s = 1{,}06740$ $\sigma = 1{,}06648$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15°	15°	15°
64,10 + 0,00	115,90 + 0,00	136,11 + 0,04
$a^2 = 14{,}271$	$a^2 = 14{,}244$	$a^2 = 14{,}244$

$a_{15}^2 = 14{,}253.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}11121$ $S_1 = 17{,}602$ $y_1 = 2{,}708$
2. KCl 15° $s = 1{,}03226$ $S_2 = 5{,}222$ $y_2 = 0{,}6308$
Gemisch 15° $s = 1{,}07139$ $\sigma = 1{,}07047$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15°	15,5°	15,5°
64,02 + 0,03	115,75 + 0,00	135,85 + 0,05
$a^2 = 14{,}250$	$a^2 = 14{,}225$	$a^2 = 14{,}217$

$a_{15}^2 = 14{,}241.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}15047$ $S_1 = 24{,}882$ $y_1 = 3{,}828$
2. KCl 15° $s = 1{,}06500$ $S_2 = 10{,}963$ $y_2 = 1{,}8214$
Gemisch 15° $s = 1{,}10714$ $\sigma = 1{,}10622$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15°	15°	15°
63,15 + 0,00	114,25 + 0,00	134,15 + 0,00
$a^2 = 14{,}060$	$a^2 = 14{,}041$	$a^2 = 14{,}038$

$a_{15}^2 = 14{,}046.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}07268$ $S_1 = 11{,}00$ $y_1 = 1{,}6922$
2. KCl 15° $s = 1{,}13379$ $S_2 = 24{,}501$ $y_2 = 0{,}2960$
Gemisch 15° $s = 1{,}10824$ $\sigma = 1{,}10232$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III
14,6°	15,5°	15°
63,10 + 0,00	114,00 + 0,00	134,15 + 0,00
$a^2 = 14{,}049$	$a^2 = 14{,}010$	$a^2 = 14{,}038$

$a_{15}^2 = 14{,}033.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}05459$ $S_1 = 8{,}0767$ $y_1 = 1{,}2424$
2. KCl 15° $s = 1{,}15255$ $S_2 = 28{,}578$ $y_2 = 3{,}4523$
Gemisch 15° $s = 1{,}10232$ $\sigma = 1{,}10140$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15°	15,4°	15,4°
63,10 + 0,00	114,15 + 0,00	134,11 + 0,04
$a^2 = 14{,}049$	$a^2 = 14{,}029$	$a^2 = 14{,}084$

$a_{15}^2 = 14{,}045.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}15403$ $S_1 = 25{,}564$ $y_1 = 3{,}933$
2. KCl 15° $s = 1{,}04848$ $S_2 = 7{,}9906$ $y_2 = 0{,}9653$

Gemisch 15° $s = 1{,}10108$ $\sigma = 1{,}10016$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.
15°	15,2°	15,3°
63,30 + 0,00	114,51 + 0,04	134,56 + 0,04
$a^2 = 14{,}094$	$a^2 = 14{,}074$	$a^2 = 14{,}082$

$a_{15}^2 = 14{,}088.$

Aus diesen aufgeführten Zahlen berechne ich jetzt die specifische und wirkliche Cohäsion der einzelnen Lösungen, wie die wirkliche Cohäsion des Gemisches; dieses ergibt folgende Tabelle:

NaCl			KCl			Gemisch
σ	a^2	α	σ	a^2	α	α
1,03537	14,449	7,480	1,03123	14,473	7,462	7,477
1,07201	14,220	7,623	1,06415	14,237	7,575	7,607
1,12066	13,955	7,820	1,10820	13,959	7,735	7,785
1,14947	13,836	7,952	1,13300	13,830	7,835	7,899
1,03522	14,451	7,480	1,09822	14,021	7,699	7,600
1,11019	14,009	7,776	1,03134	14,472	7,463	7,622
1,14952	13,836	7,952	1,06408	14,238	7,575	7,769
1,07176	14,222	7,621	1,13282	13,838	7,836	7,734
1,05362	14,333	7,551	1,15163	13,760	7,923	7,734
1,15312	13,823	7,970	1,04752	14,354	7,518	7,749

Vergleicht man die Capillaritätsconstanten a^2 der einzelnen Lösungen, welche dieselben Mengen des betreffenden Salzes enthalten, so kann man sagen:

Gleiche Mengen NaCl und KCl zu derselben Menge Wasser gebracht, geben Salzlösungen von gleicher specifischer Cohäsion.

II. $K_2SO_4 + Na_2SO_4$.

1. K_2SO_4 17° $s = 1{,}01632$ $S_1 = 2{,}041$ $y_1 = 0{,}2111$
2. Na_2SO_4 17° $s = 1{,}01845$ $S_2 = 2{,}067$ $y_2 = 0{,}2620$

Gemisch 16,6° $s = 1{,}01730$ $\sigma = 1{,}01621$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
16,8°	16,7°	17,1°
65,16 + 0,04	188,59 + 0,01	103,00 + 0,00
$a^2 = 14{,}507$	$a^2 = 14{,}503$	$a^2 = 14{,}483$

$a_{15}^2 = 14{,}552.$

1. K_2SO_4 16° $s = 1{,}05471$ $S_1 = 7{,}091$ $y_1 = 0{,}7336$
2. Na_2SO_4 16° $s = 1{,}06093$ $S_2 = 7{,}104$ $y_2 = 0{,}9005$
Gemisch 15° $s = 1{,}05815$ $\sigma = 1{,}05723$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
17,4°	17,4°	17,5°
63,20 + 0,00	134,25 + 0,00	99,90 + 0,00
$a^2 = 14{,}078$	$a^2 = 14{,}059$	$a^2 = 14{,}047$

$a_{15}^2 = 14{,}131.$

1. K_2SO_4 15° $s = 1{,}02676$ $S_1 = 3{,}383$ $y_1 = 0{,}3499$
2. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}03007$ $S_2 = 3{,}409$ $y_2 = 0{,}4821$
Gemisch 15° $s = 1{,}02850$ $\sigma = 1{,}02758$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
16°	16,3°	16,25°
64,70 + 0,00	137,55 + 0,00	102,40 + 0,00
$a^2 = 14{,}405$	$a^2 = 14{,}394$	$a^2 = 14{,}398$

$a_{15}^2 = 14{,}434.$

1. K_2SO_4 15° $s = 1{,}04100$ $S_1 = 5{,}263$ $y_1 = 0{,}5445$
2. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}03026$ $S_2 = 3{,}431$ $y_2 = 0{,}4349$
Gemisch 15° $s = 1{,}03585$ $\sigma = 1{,}03493$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15°	15,8°	15,7°
64,47 + 0,03	137,05 + 0,00	102,05 + 0,00
$a^2 = 14{,}354$	$a^2 = 14{,}342$	$a^2 = 14{,}349$

$a_{15}^2 = 14{,}363.$

1. K_2SO_4 15° $s = 1{,}02719$ $S_1 = 3{,}440$ $y_1 = 0{,}3558$
2. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}04578$ $S_2 = 5{,}263$ $y_2 = 0{,}6672$
Gemisch 15° $s = 1{,}03652$ $\sigma = 1{,}03560$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,5°	15,8°	15,7°
64,45 + 0,05	136,93 + 0,02	101,93 + 0,02
$a^2 = 14{,}349$	$a^2 = 14{,}329$	$a^2 = 14{,}332$

$a_{15}^2 = 14{,}356.$

1. K_2SO_4 15° $s = 1{,}02740$ $S_1 = 3{,}466$ $y_1 = 0{,}3586$
2. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}02993$ $S_2 = 3{,}393$ $y_2 = 0{,}4300$
Gemisch 15° $s = 1{,}02886$ $\sigma = 1{,}02794$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,4°	15,5°	15,4°
64,83 + 0,02	137,80 + 0,05	117,34 + 0,01
$a^2 = 14{,}433$	$a^2 = 14{,}420$	$a^2 = 14{,}420$

$a_{15}^2 = 14{,}437.$

1. K_2SO_4 15° $s = 1{,}02731$ $S_1 = 3{,}4573$ $y_1 = 0{,}3576$
2. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}06145$ $S_2 = 7{,}168$ $y_2 = 0{,}9086$
Gemisch 15° $s = 1{,}04457$ $\sigma = 1{,}04365$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,2°	15°	15°
64,14 + 0,01	136,40 + 0,00	116,25 + 0,00
$a^2 = 14{,}280$	$a^2 = 14{,}274$	$a^2 = 14{,}276$

$a_{15}^2 = 14{,}279.$

1. K_2SO_4 15° $s = 1{,}08172$ $S_1 = 10{,}849$ $y_1 = 1{,}1223$
2. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}09242$ $S_2 = 11{,}068$ $y_2 = 1{,}403$

Gemisch 15° $s = 1{,}08750$ $\sigma = 1{,}08658$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,6°	16,0°	15,9°
62,32 + 0,03	132,24 + 0,04	112,67 + 0,03
$a^2 = 13{,}878$	$a^2 = 13{,}815$	$a^2 = 13{,}847$

$a_{15}^2 = 13{,}878.$

Die sich hieraus ergebenden Werthe der specifischen und wirklichen Cohäsion der einzelnen Lösungen, sowie die wirkliche Cohäsion des Gemisches sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

K_2SO_4			Na_2SO_4			Gemisch
σ	a^2	α	σ	a^2	α	α
1,01511	14,564	7,392	1,01727	14,534	7,393	7,394
1,05397	14,181	7,473	1,05979	14,100	7,471	7,470
1,02584	14,454	7,414	1,02915	14,416	7,418	7,416
1,04008	14,310	7,442	1,02934	14,414	7,418	7,432
1,02627	14,450	7,415	1,04486	14,260	7,450	7,433
1,02648	14,447	7,415	1,02901	14,424	7,421	7,420
1,02639	14,448	7,415	1,06053	14,107	7,481	7,451
1,08080	13,948	7,537	1,09150	13,818	7,541	7,539

Betrachtet man auch hier die Capillaritätsconstanten, welche solchen Lösungen zugehören, die aus gleichen Mengen Salzes gebildet sind, so ergibt sich:

Gleiche Mengen von K_2SO_4 und Na_2SO_4 zu derselben Menge destillirten Wassers gebracht, ergeben Salzlösungen von gleicher wirklicher Cohäsion.

III. $NaCl + Na_2SO_4$.

1. NaCl 14,6° $s = 1{,}03607$ $S_1 = 5{,}237$ $y_1 = 0{,}8057$
2. Na_2SO_4 14,6° $s = 1{,}04522$ $S_1 = 5{,}200$ $y_1 = 0{,}6591$

Gemisch 15° $s = 1{,}04048$ $\sigma = 1{,}0396$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15,4°	15,8°	15°
64,55 + 0,05	116,72 + 0,03	136,70 + 0,00	113,00 + 0,00
$a^2 = 14{,}372$	$a^2 = 14{,}344$	$a^2 = 14{,}305$	$a^2 = 14{,}366$

$a_{15}^2 = 14{,}355.$

1. NaCl	14,6°	$s = 1{,}03624$	$S_1 = 5{,}263$	$y_1 = 0{,}8097$
2. Na_2SO_4	14,6°	$s = 1{,}07011$	$S_2 = 8{,}239$	$y_2 = 1{,}0444$
Gemisch	15°	$s = 1{,}05317$	$\sigma = 1{,}05225$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15,2°	15,4°	15,4°
63,92 + 0,03	115,75 + 0,05	135,87 + 0,03	111,80 + 0,00
$a^2 = 14{,}232$	$a^2 = 14{,}225$	$a^2 = 14{,}219$	$a^2 = 14{,}214$

$a_{15}^2 = 14{,}220.$

1. NaCl	15°	$s = 1{,}03624$	$S_1 = 5{,}263$	$y_1 = 0{,}8097$
2. Na_2SO_4	16,2°	$s = 1{,}05368$	$S_2 = 6{,}222$	$y_2 = 0{,}7887$
Gemisch	15°	$s = 1{,}04496$	$\sigma = 1{,}04404$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15°	15°	15,1°
64,30 + 0,00	116,40 + 0,00	136,75 + 0,00	112,50 + 0,10
$a^2 = 14{,}316$	$a^2 = 14{,}305$	$a^2 = 14{,}310$	$a^2 = 14{,}303$

$a_{15}^2 = 14{,}309.$

1. NaCl	14°	$s = 1{,}06948$	$S_1 = 10{,}471$	$y_1 = 1{,}6110$
2. Na_2SO_4	15°	$s = 1{,}02256$	$S_2 = 2{,}538$	$y_2 = 0{,}3217$
Gemisch	15°	$s = 1{,}04602$	$\sigma = 1{,}04510$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,5°	15°	15°	14,7°
64,62 + 0,03	116,85 + 0,00	137,33 + 0,02	113,18 + 0,02
$a^2 = 14{,}387$	$a^2 = 14{,}360$	$a^2 = 14{,}371$	$a^2 = 14{,}390$

$a_{15}^2 = 14{,}371.$

1. NaCl	15,4°	$s = 1{,}07804$	$S_1 = 11{,}084$	$y_1 = 1{,}7052$
2. Na_2SO_4	16,4°	$s = 1{,}06943$	$S_2 = 8{,}1542$	$y_2 = 1{,}0336$
Gemisch	16°	$s = 1{,}07144$	$\sigma = 1{,}07032$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15,4°	15,7°	15,8°
63,50 + 0,00	114,80 + 0,00	134,75 + 0,00	111,00 + 0,05
$a^2 = 14{,}138$	$a^2 = 14{,}108$	$a^2 = 14{,}101$	$a^2 = 14{,}112$

$a_{15}^2 = 14{,}124.$

1. NaCl	15°	$s = 1{,}11105$	$S_1 = 17{,}55$	$y_1 = 2{,}700$
2. Na_2SO_4	16,2°	$s = 1{,}06363$	$S_2 = 7{,}485$	$y_2 = 0{,}9424$
Gemisch	16,4°	$s = 1{,}08732$	$\sigma = 1{,}08605$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14°	14,7°	14,4°	14,8°
63,30 + 0,00	114,35 + 0,00	134,43 + 0,02	110,65 + 0,00
$a^2 = 14{,}095$	$a^2 = 14{,}053$	$a^2 = 14{,}068$	$a^2 = 14{,}065$

$a_{15}^2 = 14{,}055.$

1. NaCl	14,2°	$s = 1{,}15003$	$S_1 = 24{,}795$	$y_1 = 3{,}8145$
2. Na_2SO_4	15°	$s = 1{,}03650$	$S_2 = 4{,}167$	$y_2 = 0{,}5282$
Gemisch	15°	$s = 1{,}09118$	$\sigma = 1{,}09026$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,5°	14,7°	15°	14,6°
63,48 + 0,02	114,90 + 0,00	134,91 + 0,04	111,10 + 0,00
$a^2 = 14{,}135$	$a^2 = 14{,}121$	$a^2 = 14{,}118$	$a^2 = 14{,}125$

$a_{15}^2 = 14{,}116.$

Die folgende Tabelle enthält nun wieder die sich hieraus ergebenden Werthe der specifischen und wirklichen Cohäsion der einzelnen Lösungen, sowie die wirkliche Cohäsion des Gemisches.

NaCl			Na_2SO_4			Gemisch
σ	a^2	α	σ	a^2	α	α
1,03520	14,451	7,480	1,04430	14,264	7,448	7,463
1,03534	14,450	7,480	1,06920	14,024	7,497	7,487
1,03532	14,450	7,480	1,05253	14,181	7,463	7,470
1,06876	14,241	7,610	1,02164	14,492	7,403	7,509
1,07187	14,219	7,620	1,06826	14,030	7,494	7,558
1,11018	14,011	7,777	1,06248	14,086	7,483	7,632
1,14921	13,838	7,952	1,03550	14,851	7,432	7,695

IV. $NaCl + K_2SO_4$.

1. NaCl 15° $s = 1{,}03622$ $S_1 = 5{,}263$ $y_1 = 0{,}8097$
2. K_2SO_4 15° $s = 1{,}04110$ $S_2 = 5{,}270$ $y_2 = 0{,}5451$

Gemisch 15° $s = 1{,}03862$ $\sigma = 1{,}03770$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,1°	16,3°	16,1°
64,58 + 0,02	136,98 + 0,02	102,00 + 0,00
$a^2 = 14{,}379$	$a^2 = 14{,}334$	$a^2 = 14{,}342$

$a_{15}^2 = 14{,}376.$

1. NaCl 15° $s = 1{,}04833$ $S_1 = 7{,}213$ $y_1 = 1{,}1097$
2. K_2SO_4 15° $s = 1{,}05495$ $S_2 = 7{,}124$ $y_2 = 0{,}7369$

Gemisch 15° $s = 1{,}05167$ $\sigma = 1{,}05075$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
14,6°	14,9°	15°
64,29 + 0,01	136,60 + 0,05	101,55 + 0,00
$a^2 = 14{,}315$	$a^2 = 14{,}295$	$a^2 = 14{,}279$

$a_{15}^2 = 14{,}290.$

1. NaCl 20° $s = 1{,}06037$ $S_1 = 8{,}9925$ $y_1 = 1{,}0989$
2. K_2SO_4 20° $s = 1{,}06871$ $S_2 = 9{,}0104$ $y_2 = 0{,}9321$

Gemisch 20° $s = 1{,}06465$ $\sigma = 1{,}06275$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
19°	20,7°	20,0°
63,18 + 0,02	134,15 + 0,05	99,92 + 0,03
$a^2 = 14{,}068$	$a^2 = 14{,}039$	$a^2 = 14{,}076$

$a_{15}^2 = 14{,}203.$

1. NaCl 20° $s = 1{,}07227$ $S_1 = 10{,}932$ $y_1 = 1{,}6817$
2. K_2SO_4 20° $s = 1{,}07928$ $S_2 = 10{,}500$ $y_2 = 1{,}0862$

Gemisch 16,4° $s = 1{,}07610$ $\sigma = 1{,}07488$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
18,4°	19,6°	19,4°
62,83 + 0,02	133,39 + 0,01	99,38 + 0,02
$a^2 = 13{,}990$	$a^2 = 13{,}959$	$a^2 = 13{,}974$

$a_{15}^2 = 14{,}094$.

1. NaCl 15° $s = 1{,}09840$ $S_1 = 15{,}322$ $y_1 = 2{,}3626$
2. K_2SO_4 15° $s = 1{,}04117$ $S_2 = 5{,}279$ $y_2 = 0{,}5461$

Gemisch 15° $s = 1{,}06956$ $\sigma = 1{,}06864$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,5°	16°	16,1°
63,65 + 0,00	135,25 + 0,00	100,60 + 0,05
$a^2 = 14{,}171$	$a^2 = 14{,}154$	$a^2 = 14{,}146$

$a_{15}^2 = 14{,}183$.

1. NaCl 15° $s = 1{,}07325$ $S_1 = 11{,}095$ $y_1 = 1{,}7068$
2. K_2SO_4 15° $s = 1{,}0550$ $S_2 = 7{,}132$ $y_2 = 0{,}7376$

Gemisch 15° $s = 1{,}06419$ $\sigma = 1{,}06327$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
14,5°	14,4°	14,6°
63,95 + 0,00	135,85 + 0,00	101,14 + 0,01
$a^2 = 14{,}239$	$a^2 = 14{,}216$	$a^2 = 14{,}214$

$a_{15}^2 = 14{,}207$.

1. NaCl 15° $s = 1{,}12434$ $S_1 = 19{,}941$ $y_1 = 3{,}068$
2. K_2SO_4 15° $s = 1{,}04095$ $S_2 = 5{,}25$ $y_2 = 0{,}5431$

Gemisch 15° $s = 1{,}08196$ $\sigma = 1{,}08104$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
14,5°	15,15°	15°
63,53 + 0,02	134,95 + 0,05	100,53 + 0,02
$a^2 = 14{,}145$	$a^2 = 14{,}122$	$a^2 = 14{,}135$

$a_{15}^2 = 14{,}130$.

1. NaCl 15° $s = 1{,}15053$ $S_1 = 24{,}894$ $y_1 = 3{,}8299$
2. K_2SO_4 15° $s = 1{,}05500$ $S_2 = 7{,}1305$ $y_2 = 0{,}7376$

Gemisch 15° $s = 1{,}10303$ $\sigma = 1{,}10211$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
14,4°	14,5°	14,5°
63,05 + 0,00	134,08 + 0,02	99,70 + 0,00
$a^2 = 14{,}040$	$a^2 = 14{,}026$	$a^2 = 14{,}019$

$a_{15}^2 = 14{,}013$.

Aehnlich wie vorher, sind wieder die specifischen und wirklichen Cohäsionen der einzelnen Lösungen und die wirkliche Cohäsion des Gemisches in folgender Tabelle aufgestellt:

NaCl			K_2SO_4			Gemisch
σ	a^2	α	σ	a^2	α	α
1,03530	14,450	7,480	1,04012	14,310	7,442	7,459
1,04741	14,393	7,538	1,05403	14,179	7,473	7,508
1,05849	14,371	7,606	1,06679	14,056	7,479	7,547
1,07033	14,225	7,613	1,07732	13,968	7,524	7,575
1,09748	14,077	7,725	1,04025	14,309	7,448	7,578
1,07233	14,218	7,624	1,05408	14,178	7,472	7,553
1,12342	13,946	7,834	1,04003	14,311	7,442	7,638
1,14962	13,836	7,953	1,05408	14,178	7,472	7,722

V. $Na_2SO_4 + KCl$.

1. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}04571$ $S_1 = 5{,}263$ $y_1 = 0{,}6672$
2. KCl 15° $s = 1{,}03272$ $S_2 = 5{,}300$ $y_2 = 0{,}6402$

Gemisch 15° $s = 1{,}03912$ $\sigma = 1{,}03820$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,6°	15,8°	15,9°
64,45 + 0,00	137,00 + 0,00	101,91 + 00,4
$a^2 = 14{,}350$	$a^2 = 14{,}387$	$a^2 = 14{,}330$

$a_{15}^2 = 14{,}361$.

1. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}06200$ $S_1 = 7{,}235$ $y_1 = 0{,}9171$
2. KCl 15° $s = 1{,}04281$ $S_2 = 6{,}253$ $y_2 = 0{,}7554$

Gemisch 15° $s = 1{,}05225$ $\sigma = 1{,}05133$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,5°	16°	16°
64,00 + 0,00	135,98 + 0,02	101,20 + 0,00
$a^2 = 14{,}250$	$a^2 = 14{,}230$	$a^2 = 14{,}230$

$a_{15}^2 = 14{,}261$.

1. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}09293$ $S_1 = 11{,}134$ $y_1 = 1{,}4113$
2. KCl 15° $s = 1{,}06520$ $S_2 = 11{,}00$ $y_2 = 1{,}3288$

Gemisch 15° $s = 1{,}07883$ $\sigma = 1{,}07791$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,3°	15,8°	15,4°
63,03 + 0,02	133,71 + 0,04	99,71 + 0,04
$a^2 = 14{,}034$	$a^2 = 13{,}993$	$a^2 = 14{,}020$

$a_{15}^2 = 14{,}031$.

1. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}09385$ $S_1 = 11{,}251$ $y_1 = 1{,}4262$
2. KCl 15° $s = 1{,}08775$ $S_2 = 15{,}174$ $y_2 = 1{,}8331$

Gemisch 15° $s = 1{,}09066$ $\sigma = 1{,}08974$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,6°	16,2°	15,9°
62,62 + 0,03	132,91 + 0,04	99,07 + 0,03
$a^2 = 13{,}947$	$a^2 = 13{,}909$	$a^2 = 13{,}931$

$a_{15}^2 = 13{,}952$.

1. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}03040$ $S_1 = 3{,}4475$ $y_1 = 0{,}4370$
2. KCl 15° $s = 1{,}02133$ $S_2 = 3{,}393$ $y_2 = 0{,}4099$

Gemisch 15° $s = 1{,}02591$ $\sigma = 1{,}02499$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
15,1°	15,9°	15,7°
65,10 + 0,00	138,08 + 0,02	102,90 + 0,00
$a^2 = 14{,}494$	$a^2 = 14{,}449$	$a^2 = 14{,}469$

$a_{15}^2 = 14{,}487$.

1. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}10121$ $S_1 = 12{,}198$ $y_1 = 1{,}5462$
2. KCl 15° $s = 1{,}05605$ $S_2 = 9{,}331$ $y_2 = 1{,}1272$

Gemisch 15° $s = 1{,}07850$ $\sigma = 1{,}07758$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
16°	17°	16,9°
62,90 + 0,00	133,33 + 0,02	99,35 + 0,00
$a^2 = 14{,}006$	$a^2 = 13{,}953$	$a^2 = 13{,}970$

$\sigma_{15}^2 = 14{,}023$.

1. Na_2SO_4 15° $s = 1{,}05490$ $S_1 = 6{,}371$ $y_1 = 0{,}8076$
2. KCl 15° $s = 1{,}11100$ $S_2 = 19{,}745$ $y_2 = 2{,}8853$

Gemisch 15° $s = 1{,}08251$ $\sigma = 1{,}08159$

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
16,5°	16,9°	17°
62,95 + 0,00	133,50 + 0,00	99,60 + 0,00
$a^2 = 14{,}016$	$a^2 = 14{,}003$	$a^2 = 14{,}005$

$a_{15}^2 = 14{,}060$.

Hieraus ergeben sich wieder die Werthe der specifischen und wirklichen Cohäsion der einzelnen Lösungen und die wirkliche Cohäsion des Gemisches, welche die folgende Tabelle enthält:

Na_2SO_4			KCl			Gemisch
σ	a^2	α	σ	a^2	α	α
1,04479	14,260	7,449	1,03180	14,468	7,464	7,455
1,06108	14,101	7,481	1,04179	14,427	7,514	7,497
1,09201	13,814	7,542	1,06428	14,236	7,576	7,562
1,09293	13,806	7,545	1,08683	14,090	7,657	7,602
1,02948	14,412	7,418	1,02041	14,555	7,426	7,424
1,10029	13,741	7,560	1,05518	14,300	7,542	7,555
1,05398	14,170	7,467	1,11008	13,954	7,745	7,604

VI. $KCl + K_2SO_4$.

1. KCl 15° $s = 1{,}09887$ $S_1 = 17{,}35$ $y_1 = 2{,}096$
2. K_2SO_4 15° $s = 1{,}02072$ $S_2 = 2{,}602$ $y_2 = 0{,}2692$

Gemisch 15° $s = 1{,}05974$ $\sigma = 1{,}05878$

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15,4°	15,4°	15,4°
64,15 + 0,00	116,05 + 0,00	136,00 + 0,00	112,18 + 0,02
$a^2 = 14{,}282$	$a^2 = 14{,}262$	$a^2 = 14{,}232$	$a^2 = 14{,}259$

$a_{15}^2 = 14{,}267$.

1. KCl	15°	$s = 1{,}07865$	$S_1 = 13{,}451$	$y_1 = 1{,}625$
2. K_2SO_4	15°	$s = 1{,}03405$	$S_2 = 4{,}335$	$y_2 = 0{,}4484$
Gemisch	15°	$s = 1{,}05632$	$\sigma = 1{,}05585$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,4°	15,5°	15,7°	15,8°
64,10 + 0,00	115,88 + 0,02	135,91 + 0,04	111,95 + 0,00
$a^2 = 14{,}272$	$a^2 = 14{,}235$	$a^2 = 14{,}223$	$a^2 = 14{,}234$

$a_{15}^2 = 14{,}258$.

1. KCl	15°	$s = 1{,}03902$	$S_1 = 5{,}686$	$y_1 = 0{,}6869$
2. K_2SO_4	15°	$s = 1{,}01700$	$S_2 = 2{,}124$	$y_2 = 0{,}2197$
Gemisch	15°	$s = 1{,}02789$	$\sigma = 1{,}02698$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	15,3°	15,4°	15°
65,25 + 0,00	117,84 + 0,01	138,47 + 0,03	114,00 + 0,00
$a^2 = 14{,}526$	$a^2 = 14{,}481$	$a^2 = 14{,}490$	$a^2 = 14{,}498$

$a_{15}^2 = 14{,}503$.

1. KCl	15°	$s = 1{,}01302$	$S_1 = 2{,}045$	$y_1 = 0{,}2460$
2. K_2SO_4	15°	$s = 1{,}04968$	$S_2 = 6{,}411$	$y_2 = 0{,}6632$
Gemisch	15°	$s = 1{,}03129$	$\sigma = 1{,}03038$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,3°	15,4°	15,8°	15,5°
64,88 + 0,02	117,43 + 0,02	137,54 + 0,01	113,42 + 0,03
$a^2 = 14{,}445$	$a^2 = 14{,}431$	$a^2 = 14{,}393$	$a^2 = 14{,}420$

$a_{15}^2 = 14{,}437$.

1. KCl	15°	$s = 1{,}15845$	$S_1 = 29{,}929$	$y_1 = 3{,}6157$
2. K_2SO_4	15°	$s = 1{,}01545$	$S_2 = 1{,}926$	$y_2 = 0{,}1983$
Gemisch	15°	$s = 1{,}08567$	$\sigma = 1{,}08475$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15°	14,6°	15,5°	—
63,70 + 0,00	115,42 + 0,03	135,05 + 0,05	—
$a^2 = 14{,}180$	$a^2 = 14{,}185$	$a^2 = 14{,}133$	—

$a_{15}^2 = 14{,}167$.

1. KCl	15°	$s = 1{,}13477$	$S_1 = 2{,}532$	$y_1 = 3{,}059$
2. K_2SO_4	15°	$s = 1{,}04140$	$S_2 = 5{,}310$	$y_2 = 0{,}5493$
Gemisch	15°	$s = 1{,}08764$	$\sigma = 1{,}08672$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
14,6°	15°	14,9°	15°
63,25 + 0,00	115,42 + 0,03	134,40 + 0,00	110,58 + 0,02
$a^2 = 14{,}084$	$a^2 = 14{,}062$	$a^2 = 14{,}068$	$a^2 = 14{,}059$

$a_{15}^2 = 14{,}063$.

1. KCl	15°	$s = 1{,}06532$	$S_1 = 11{,}023$	$y_1 = 1{,}3816$
2. K_2SO_4	15°	$s = 1{,}08051$	$S_2 = 10{,}675$	$y_2 = 1{,}1043$
Gemisch	15°	$s = 1{,}07287$	$\sigma = 1{,}07196$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,6°	15,5°	15,4°	15,3°
63,15 + 0,00	114,55 + 0,00	134,65 + 0,05	110,80 + 0,00
$a^2 = 14{,}060$	$a^2 = 14{,}078$	$a^2 = 14{,}091$	$a^2 = 14{,}087$

$$\sigma_{15}{}^2 = 14{,}094.$$

1. KCl	15,2°	$s = 1{,}03231$	$S_1 = 5{,}231$	$y_1 = 0{,}6317$
2. K_2SO_4	15,2°	$s = 1{,}06080$	$S_2 = 7{,}921$	$y_2 = 0{,}8194$
Gemisch	15,2°	$s = 1{,}04659$	$\sigma = 1{,}04566$	

Röhre I.	Röhre II.	Röhre III.	Röhre IV.
15,6°	14,8°	16°	16°
64,22 + 0,03	115,95 + 0,00	136,22 + 0,03	112,10 + 0,00
$a^2 = 14{,}299$	$a^2 = 14{,}250$	$a^2 = 14{,}256$	$a^2 = 14{,}252$

$$a_{15}{}^2 = 14{,}289.$$

Schliesslich enthält wieder die folgende Tabelle die Zusammenstellung der specifischen und wirklichen Cohäsion der einzelnen Lösungen, wie die wirkliche Cohäsion des Gemisches.

KCl			K_2SO_4			Gemisch
σ	a^2	α	σ	a^2	α	a
1,09783	14,023	7,698	1,01984	14,517	7,402	7,553
1,07762	14,148	7,623	1,03313	14,379	7,428	7,527
1,03810	14,452	7,501	1,01609	14,558	7,394	7,447
1,01210	14,641	7,416	1,04876	14,228	7,460	7,438
1,15730	13,746	7,963	1,01453	14,573	7,399	7,683
1,13385	13,821	7,835	1,04048	14,306	7,443	7,641
1,06441	14,236	7,576	1,07960	13,958	7,535	7,554
1,03138	14,472	7,463	1,05987	14,126	7,470	7,471

Auf Grund dieser Beobachtungen will ich nun die am Anfang dieses Abschnittes aufgestellten Formeln prüfen welche den Zusammenhang zwischen der Capillaritätsconstanten des Gemisches und denen der einzelnen Lösungen darstellen.

Hierbei gehe ich aus von der Formel:

$$\alpha = u_1{}^2 \alpha_1 + 2 u_1 u_2 \alpha_{12} + u_2{}^2 \alpha_2,$$

in welcher alle Grössen bis auf α_{12} aus den Versuchen bekannt sind, und die somit eine Bestimmung dieser Grösse ergeben muss. Es war α_{12} definirt als das Maass der Anziehung, welches die Theilchen der beiden gemischten Flüs-

sigkeiten aufeinander ausüben. Ferner hatte Volkmann erkannt, dass für alle Flüssigkeiten, welche eine Mischung zulassen, die Bedingung erfüllt sein muss:

$$\alpha_{12} \geqq {}^1/_2 (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Da nun die untersuchten Salzlösungen sich in allen Verhältnissen mischen lassen, wird für α_{12} gleichzeitig die obige Bedingung erfüllt sein müssen.

In der folgenden Tabelle stelle ich nun die hierauf bezüglichen Resultate aus den gegebenen Beobachtungen zusammen.

u_2	α_{12}	$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$	Diff.
I. NaCl + KCl.			
0,4337	7,481	7,471	+0,010
0,4428	7,610	7,599	+0,011
0,4904	7,790	7,778	+0,012
0,4851	7,901	7,894	+0,007
0,4963	7,612	7,590	+0,022
0,5044	7,626	7,620	+0,006
0,5070	7,777	7,764	+0,013
0,5001	7,738	7,729	+0,009
0,4872	7,741	7,737	+0,004
0,5017	7,754	7,744	+0,010
III. NaCl + Na_2SO_4.			
0,482	7,462	7,464	−0,002
0,4999	7,486	7,488	−0,002
0,5	7,466	7,471	−0,005
0,5	7,510	7,506	+0,004
0,4432	7,546	7,557	−0,011
0,5004	7,634	7,630	+0,004
0,5184	7,716	7,692	+0,014
V. Na_2SO_4 + KCl.			
0,5073	7,456	7,456	+0,000
0,5081	7,496	7,497	−0,001
0,5085	7,564	7,559	+0,005
0,5230	7,601	7,598	+0,003
0,4950	7,425	7,422	+0,003
0,5029	7,558	7,551	+0,007
0,4922	7,604	7,606	−0,002

u_2	α_{12}	$\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$	Diff.
II. Na_2SO_4 + K_2SO_4.			
0,4601	7,395	7,393	+0,002
0,5531	7,470	7,472	−0,002
0,5674	7,417	7,416	+0,001
0,4795	7,433	7,430	+0,003
0,5019	7,434	7,432	+0,002
0,5771	7,420	7,418	+0,002
0,5056	7,452	7,448	+0,004
0,5402	7,588	7,589	−0,001
IV. NaCl + K_2SO_4.			
0,4918	7,458	7,461	−0,003
0,5045	7,513	7,505	+0,008
0,5132	7,548	7,551	−0,003
0,5464	7,589	7,568	+0,021
0,5039	7,574	7,584	−0,010
0,4964	7,556	7,548	+0,008
0,5082	7,642	7,638	+0,004
0,4972	7,728	7,712	+0,016
VI. KCl + K_2SO_4.			
0,5007	7,552	7,550	+0,002
0,5004	7,528	7,525	+0,003
0,5054	7,447	7,447	+0,000
0,4984	7,438	7,438	+0,000
0,5093	7,691	7,681	+0,010
0,5048	7,645	7,639	+0,006
0,4970	7,552	7,555	−0,003
0,5012	7,470	7,466	+0,004

Die aufgeführten Tabellen lassen sogleich die Richtigkeit der obigen Bedingung für die Möglichkeit der Mischung zweier Lösungen erkennen. In den wenigen Fällen, in denen α_{12} kleiner als ${}^1/_2 (\alpha_1 + \alpha_2)$ ausfällt, liegen die Abweichungen

innerhalb so enger Grenzen, dass sie ihre Erklärung in den Beobachtungsfehlern finden.

Da nun auch gleichzeitig die Bedingung:

$$\alpha_{12} = {}^1/_2(\alpha_1 + \alpha_2)$$

erfüllt ist, so führen die von Poisson und Volkmann angegebenen Formeln auf die aus der Mischungstheorie hergeleiteten zurück. Ich werde daher die vorigen Beobachtungen benutzen, um die aus ihnen folgenden Capillaritätsconstanten mit denen zu vergleichen, welche aus den Formeln:

$$a^2 = u_1 a_1^2 + u_2 a_2^2, \qquad \alpha = u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2$$

berechnet werden können und in den folgenden Tabellen die beobachteten und berechneten Werthe zusammenstellen:

a^2 beobachtet	a^2 berechnet	Differenz	α beobachtet	α berechnet	Differenz
		I. NaCl + KCl.			
14,470	14,460	+0,010	7,477	7,472	+0,005
14,238	14,226	+0,012	7,607	7,601	+0,005
13,971	13,960	+0,011	7,785	7,778	+0,007
13,840	13,833	+0,007	7,899	7,894	+0,005
14,253	14,239	+0,014	7,600	7,598	+0,002
14,241	14,243	−0,002	7,622	7,618	+0,004
14,046	14,040	+0,006	7,769	7,761	+0,008
14,033	14,031	+0,002	7,734	7,730	+0,004
14,045	14,054	−0,009	7,734	7,733	+0,001
14,088	14,090	−0,002	7,749	7,744	+0,005
		II. $Na_2SO_4 + K_2SO_4$.			
14,552	14,568	−0,016	7,394	7,393	+0,001
14,131	14,137	−0,006	7,470	7,473	−0,003
14,434	14,432	+0,002	7,416	7,416	+0,000
14,363	14,359	+0,004	7,432	7,430	+0,002
14,356	14,355	+0,001	7,433	7,433	+0,000
14,437	14,434	+0,003	7,420	7,419	+0,001
14,279	14,277	+0,002	7,451	7,448	+0,003
13,878	13,878	+0,000	7,589	7,540	−0,001
		III. NaCl + Na_2SO_4.			
14,355	14,361	−0,006	7,463	7,465	−0,002
14,230	14,237	−0,007	7,487	7,488	−0,001
14,309	14,315	−0,006	7,470	7,471	−0,001
14,371	14,366	+0,005	7,509	7,506	+0,003
14,124	14,135	−0,011	7,558	7,564	−0,006
14,055	14,049	+0,006	7,632	7,630	+0,002
14,116	14,104	+0,012	7,695	7,683	+0,012

a^2 beobachtet	a^2 berechnet	Differenz	α beobachtet	α berechnet	Differenz
		IV. $NaCl + K_2SO_4$.			
14,376	14,381	−0,005	7,459	7,461	−0,002
14,290	14,285	+0,005	7,508	7,509	−0,001
14,203	14,209	−0,006	7,547	7,550	−0,003
14,064	14,085	+0,009	7,575	7,564	+0,011
14,183	14,194	−0,011	7,578	7,583	−0,005
14,207	14,199	+0,008	7,553	7,549	+0,004
14,130	14,131	−0,001	7,638	7,637	+0,001
14,013	14,006	+0,007	7,722	7,714	+0,008
		V. $Na_2SO_4 + KCl$.			
14,361	14,366	−0,005	7,455	7,457	−0,002
14,261	14,266	−0,005	7,497	7,498	−0,001
14,031	14,029	+0,002	7,562	7,559	+0,003
13,952	13,954	−0,002	7,602	7,603	−0,001
14,487	14,483	+0,004	7,424	7,422	+0,002
14,022	14,022	+0,000	7,555	7,551	+0,004
14,060	14,064	−0,004	7,604	7,604	+0,000
		VI. $KCl + K_2SO_4$.			
14,267	14,273	−0,006	7,553	7,551	+0,002
14,258	14,263	−0,005	7,527	7,526	+0,001
14,503	14,504	−0,001	7,447	7,448	−0,001
14,437	14,435	+0,002	7,438	7,438	+0,000
14,167	14,167	+0,000	7,683	7,676	+0,007
14,063	14,065	−0,002	7,641	7,637	+0,004
14,094	14,098	−0,004	7,554	7,556	−0,002
14,289	14,298	−0,009	7,471	7,474	−0,003

In allen untersuchten Fällen ergibt sich somit eine gute Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung. Man wird daher für alle Flüssigkeitsgemische, für welche die vorher erwähnten Bedingungen erfüllt sind, zur Bestimmung der Capillaritätsconstanten mit gleichem Rechte eine der beiden Formeln anwenden dürfen.

Am Schluss meiner Untersuchungen stellte ich aus allen vier Lösungen ein Gemisch her und bestimmte wieder aus den beobachteten Steighöhen die Capillaritätsconstanten desselben. Gleichzeitig suchte ich hierbei die Richtigkeit der erweiterten Formeln:

$$a^2 = u_1 a_1^{\,2} + u_2 a_2^{\,2} + u_3 a_3^{\,2} + u_4 a_4^{\,2}$$
$$\alpha = u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3 + u_4 \alpha_4$$

nachzuweisen, wenn in denselben $a_1^{\,2} a_2^{\,2} a_3^{\,2} a_4^{\,2}$ die specifischen, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$ die wirklichen Cohäsionen bedeuten und $u_1 u_2 u_3 u_4$

in Volumentheilen ausgedrückt sind und die Bedingung befriedigen: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1$.

$$NaCl + Na_2SO_4 + KCl + K_2SO_4.$$

1.	NaCl	17°	$s = 1{,}02383$	$S_1 = 3{,}400$	$y_1 = 0{,}5231$
2.	Na_2SO_4	17,7°	$s = 1{,}03000$	$S_2 = 3{,}401$	$y_2 = 0{,}4312$
3.	KCl	17,0°	$s = 1{,}02138$	$S_3 = 3{,}401$	$y_3 = 0{,}4109$
4.	K_2SO_4	17,6°	$s = 1{,}02707$	$S_4 = 3{,}424$	$y_4 = 0{,}3542$
	Gemisch	18°	$s = 1{,}02550$	$\sigma = 1{,}02409$	

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
18°	18,2°	17,2°
64,67 + 0,03	137,55 + 0,00	102,53 + 0,02
$a^2 = 14{,}399$	$a^2 = 14{,}394$	$a^2 = 14{,}417$

$$a_{15}{}^2 = 14{,}485.$$

1.	NaCl	17°	$s = 1{,}04788$	$S_1 = 7{,}031$	$y_1 = 1{,}0816$
2.	Na_2SO_4	17°	$s = 1{,}06100$	$S_2 = 7{,}113$	$y_2 = 0{,}9016$
3.	KCl	17°	$s = 1{,}04336$	$S_3 = 7{,}102$	$y_3 = 0{,}8580$
4.	K_2SO_4	17°	$s = 1{,}05427$	$S_4 = 7{,}031$	$y_4 = 0{,}7274$
	Gemisch	17°	$s = 1{,}05157$	$\sigma = 1{,}05037$	

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
16,3°	16,7°	16,2°
63,95 + 0,00	135,95 + 0,00	101,30 + 0,00
$a^2 = 14{,}239$	$a^2 = 14{,}224$	$a^2 = 14{,}243$

$$a_{15}{}^2 = 14{,}276.$$

1.	NaCl	18,7°	$s = 1{,}09741$	$S_1 = 15{,}149$	$y_1 = 2{,}3806$
2.	Na_2SO_4	18,2°	$s = 1{,}03002$	$S_2 = 3{,}403$	$y_2 = 0{,}4314$
3.	KCl	15,6°	$s = 1{,}08772$	$S_3 = 15{,}170$	$y_3 = 1{,}8326$
4.	K_2SO_4	19°	$s = 1{,}02669$	$S_4 = 3{,}3286$	$y_4 = 0{,}3491$
	Gemisch	18,7°	$s = 1{,}05969$	$\sigma = 1{,}05797$	

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
18,1°	17,7°	17,5°
63,62 + 0,03	135,45 + 0,00	100,94 + 0,01
$a^2 = 14{,}166$	$a^2 = 14{,}174$	$a^2 = 14{,}198$

$$a_{15}{}^2 = 14{,}258.$$

1.	NaCl	17,7°	$s = 1{,}07832$	$S_1 = 11{,}922$	$y_1 = 1{,}8341$
2.	Na_2SO_4	17,7°	$s = 1{,}05864$	$S_2 = 6{,}191$	$y_2 = 0{,}7848$
3.	KCl	16,5°	$s = 1{,}08620$	$S_3 = 14{,}878$	$y_3 = 1{,}7973$
4.	K_2SO_4	17,7°	$s = 1{,}02551$	$S_4 = 3{,}223$	$y_4 = 0{,}3334$
	Gemisch	17,7°	$s = 1{,}06084$	$\sigma = 1{,}05949$	

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
16,7°	17,3°	17°
63,70 + 0,00	135,63 + 0,02	100,87 + 0,03
$a^2 = 14{,}184$	$a^2 = 14{,}161$	$a^2 = 14{,}183$

$$a_{15}{}^2 = 14{,}234.$$

1. NaCl	18,6°	$s = 1{,}12280$	$S_1 = 19{,}663$	$y_1 = 3{,}025$
2. Na_2SO_4	19,2°	$s = 1{,}04431$	$S_2 = 5{,}091$	$y_2 = 0{,}6453$
3. KCl	18,3°	$s = 1{,}11031$	$S_3 = 19{,}603$	$y_3 = 2{,}3687$
4. K_2SO_4	19,2°	$s = 1{,}04019$	$S_4 = 5{,}148$	$y_4 = 0{,}5326$
Gemisch	18,3°	$s = 1{,}07900$	$\sigma = 1{,}07754$	

Röhre I.	Röhre III.	Röhre V.
17,1°	18,2°	18°
63,10+0,00	134,06 + 0,04	99,77 + 0,03
$a^2 = 14{,}050$	$a^2 = 14{,}029$	$a^2 = 14{,}030$

$a_{15}^2 = 14{,}117.$

Aus den umstehenden Grössen bestimmen sich folgende Werthe der specifischen und wirklichen Cohäsion der einzelnen Lösungen, sowie die wirkliche Cohäsion des Gemisches:

σ	a^2	α	σ	a^2	α
NaCl			Na_2SO_4		
1,02263	14,532	7,431	1,02865	14,517	7,415
1,04668	14,383	7,527	1,05980	14,111	7,499
1,09589	14,082	7,716	1,02858	14,416	7,414
1,07697	14,188	7,640	1,05229	14,183	7,480
1,12130	13,953	7,823	1,04270	14,274	7,442
KCl			K_2SO_4		
1,02018	14,555	7,424	1,02573	14,450	7,411
1,04216	14,391	7,499	1,04216	14,185	7,469
1,08660	14,091	7,656	1,02510	14,455	7,409
1,08493	14,100	7,649	1,02416	14,467	7,408
1,10885	13,958	7,739	1,03858	14,297	7,424

Berechnet man noch die Capillaritätsconstanten des Gemisches nach den beiden angegebenen Formeln, so lassen sich die beobachteten und berechneten Grössen in folgender Tabelle zusammenstellen:

u_1	u_2	u_3	u_4
0,2504	0,2489	0,2510	0,2497
0,2508	0,2479	0,2521	0,2492
0,2548	0,2438	0,3571	0,2443
0,2526	0,2452	0,2573	0,2449
0,2562	0,2418	0,2590	0,2430

a^2			α		
beobachtet	berechnet	Differenz	beobachtet	berechnet	Differenz
14,485	14,488	−0,003	7,417	7,420	−0,003
14,276	14,268	+0,008	7,498	7,494	+0,004
14,258	14,257	+0,001	7,543	7,552	−0,009
14,234	14,232	+0,002	7,541	7,546	−0,005
14,117	14,116	+0,001	7,606	7,612	−0,006

Obwohl die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen im allgemeinen in demselben Sinne stattfinden, der auf keine strenge Gültigkeit der Formel deutet, liegen dieselben doch innerhalb so enger Grenzen, dass eine Anwendung der erweiterten Formeln auch auf Flüssigkeitsgemische, die aus mehr als zwei Lösungen gebildet sind, recht wohl zulässig erscheint.

IV. *Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. Dr. O. Frölich über die Messung der Sonnenwärme; von H. C. Vogel.*

Hr. Dr. Frölich theilt in seiner Abhandlung über die Sonnenwärme[1]) Messungen mit, die er mit Hülfe einer passend construirten Thermosäule und eines Galvanometers an einigen geeigneten Tagen in den Monaten Juni bis October des Jahres 1883 ausgeführt hat. Die Resultate und Schlüsse, welche er aus diesen Beobachtungen zieht, sind in folgenden Sätzen enthalten:

„Die in der Meteorologie geltende Annahme, dass die Sonnenwärme constant sei, ist bei genauerer Betrachtung nicht zulässig“ (p. 1).

Die seit 1879 angestellten Beobachtungen und Versuche führten im Sommer 1883 „zum Ziele; es gelang, von Ende Juni bis Mitte October 1883 sichere Messungen anzustellen, aus welchen hervorgeht, dass die von der Sonne ausgestrahlte Wärme erhebliche Schwankungen erleidet, und zwar wahrscheinlich in engem Zusammenhang mit der Fleckenentwickelung“ (p. 3).

„Das Hauptresultat der Messungen ist der Beweis, dass die Sonnenwärme nicht constant ist, sondern sehr erhebliche Schwankungen zeigt“ (p. 29).

„Denselben Gang (wie die Schwankungen der Sonnenwärme) zeigt die Entwickelung der Sonnenflecken.“

1) O. Frölich, Wied. Ann. 21. p. 1. 1884.

. . . „Die Sonnenwärme scheint also hiernach mit zunehmender Fleckenentwickelung abzunehmen. Die sichere Begründung dieses Gesetzes muss jedoch wohl zukünftigen Beobachtungen überlassen werden“ (p. 29).

„Die Wichtigkeit dieses Resultates liegt weit weniger in dem thatsächlichen Nachweise von Variationen, sondern in der Grösse dieser Variationen und in der Thatsache, dass die beschriebene Methode ein Mittel an die Hand gibt, um diese Variationen continuirlich zu verfolgen“ (p. 29).

Diese angeführten Resultate scheinen von hoher Bedeutung und würden, falls man ihnen beitreten könnte, nicht nur für die innerhalb vier Jahren von Hrn. Dr. Frölich angestellten Beobachtungen, sondern ebenso auch für die schon seit Jahrzehnten datirenden Bestrebungen verschiedener Forscher auf diesem Gebiete einen sehr willkommenen Abschluss bilden. Es hat bisher nämlich ein sicherer Nachweis von Schwankungen in der Temperatur der Sonne nicht beigebracht werden können, und ebenso haben die Beobachtungen über den Einfluss der Flecken auf die Wärmestrahlung der Sonne, und zwar nicht innerhalb weniger Monate, sondern in der grossen Periode der Maxima und Minima der Fleckenentwickelung, in der am ehesten Unterschiede in der Wärmestrahlung zu erwarten wären, nur zu widersprechenden Resultaten geführt. Da nun die Untersuchungen des Hrn. Dr. Frölich in das Gebiet der Astrophysik eingreifen, wird es mir wohl vergönnt sein, hier in Kürze meine Ansichten über die von ihm mitgetheilten Resultate darzulegen. Ich beginne mit einigen Bemerkungen über die angewandten Apparate.

Wie schon erwähnt, sind von verschiedenen Gelehrten Versuche gemacht worden, Variationen in der Temperatur der Sonne zu finden. In neuerer Zeit hat besonders Langley sich mit derartigen Temperaturbestimmungen beschäftigt und ein von ihm Bolometer genanntes Instrument angewendet, welches auf Messung der Veränderung des Leitungswiderstandes von dünnen Drähten durch die Erwärmung basirt ist.

Eine Entscheidung, ob dieser Methode oder der Anwen-

dung von Thermosäulen der Vorzug zu geben sei, würde mir schwer fallen, obgleich ich mir über beide Methoden ein Urtheil bilden kann, indem ich sowohl mit Thermosäulen als auch mit einem ganz ähnlichen Apparate, wie der Langley'sche ist, vor mehreren Jahren in Bothkamp zahlreiche Messungen und Versuche angestellt habe, die zum Zwecke hatten, Sternenwärme nachzuweisen. Hr. Dr. Frölich gibt indessen den Messungen mittelst Thermosäule und Spiegelgalvanometer ohne weiteres den Vorzug. Sicher ist, dass die von ihm angewandten Apparate sehr vollkommen und mit aller Umsicht construirte gewesen sind. Ich bemerke nur beiläufig und als etwas Nebensächliches, dass ich die Montirung der Thermosäule parallactisch würde haben ausführen lassen, da dadurch eine bequemere Einstellung ermöglicht ist, als durch Bewegung in Azimuth und Höhe.

Die Linse, welche an dem Apparate angebracht ist, um die Umgebung der Sonne zu beurtheilen, erscheint recht vortheilhaft. Doch möchte ich gegen die Bemerkung der Hrn. Dr. Frölich: „durch diese Vorrichtung ist man im Stande, auch bei erheblicher Bewölkung in den kurzen Zwischenräumen, während welcher die Sonne frei ist, noch Beobachtungen zu erhalten" (p. 11), das Bedenken erheben, dass es bei derartigen Beobachtungen, wo die leiseste Trübung oder Bewölkung enorme Schwankungen in den Temperaturbestimmungen bedingt, wohl nicht gerathen sein dürfte, derartige Beobachtungen anders, als bei ganz wolkenlosem Himmel anstellen zu wollen.

Bei den Beobachtungen wird erwähnt, dass nach der Bestrahlung der Thermosäule ein erheblicher negativer Ausschlag am Galvanometer sich gezeigt habe. Auch ich erinnere mich, ähnliche Wahrnehmungen bei meinen früheren Beobachtungen mit sehr empfindlichen Thermosäulen aus Wismuth und Antimon gemacht zu haben, und glaubte, die Erklärung dieser Erscheinung in dem ungleichen Wärmeleitungsvermögen beider Metalle und in anderen molecularen Eigenschaften derselben suchen zu müssen. Bei der Thermosäule des Hrn. Dr. Frölich ist nun die eine Componente des Thermoelementes sehr inhomogen dadurch geworden, dass

die Zink-Antimonstäbchen, der besseren Haltbarkeit wegen, mit Eisenkernen versehen wurden; aus diesem Grunde ist ein grösserer negativer Ausschlag nach der Bestrahlung wohl erklärlich.

Ich wende mich nun nach diesen kurzen, nur beiläufigen Bemerkungen über die Apparate zu den Beobachtungen und Resultaten.

Nur an fünf Tagen in den Monaten Juni bis October sind Beobachtungen angestellt worden, aus denen Werthe für die Sonnenwärme abgeleitet werden konnten. An jedem Tage sind mehrere Beobachtungen ausgeführt worden, von denen jedoch an zwei Tagen nicht alle zur Ableitung für die Sonnenwärme hinzugezogen wurden. Solche Beobachtungen, welche geringeren Sonnenhöhen zukommen, und welche eine zu grosse Abweichung von der durch die anderen Beobachtungen gelegten wahrscheinlichsten Geraden zeigten, sind an diesen Tagen unberücksichtigt geblieben. Es ist hier also bei der Ableitung des Endwerthes eine gewisse Willkür nicht ausgeschlossen, und Hr. Dr. Frölich fühlte das wohl selbst, indem er hinzufügt: „Natürlich traten auch Fälle ein, in welchen man im Zweifel sein konnte, wie weit die Beobachtungen zu berücksichtigen seien, in diesen Fällen wurden die Beobachtungsreihen in verschiedener Ausdehnung berechnet, die Resultate weichen jedoch wenig von einander ab.“

Hier vermisst man nun aber doch eine genauere Angabe des Betrages der Aenderung, welche die Hinzuziehung weiterer Beobachtungen auf die Ableitung der Sonnenwärme hervorbringen würde, um die Realität der vermeintlich nachgewiesenen Schwankungen derselben an den verschiedenen Beobachtungstagen beurtheilen zu können. Jedenfalls dürfte wenigstens für den 12. September ein wesentlich anderer Werth für die Sonnenwärme resultiren, wenn man noch drei Beobachtungen mit hinzunehmen wollte.

Auffallend und interessant sind die enormen Abweichungen, welche die aus den Beobachtungen berechnete atmosphärische Constante a zeigt. Daraus geht hervor, wie verschieden bei anscheinend klarem Himmel die Absorption der Atmosphäre für Wärmestrahlen ist, und welchen Ver-

änderungen, selbst während einer Beobachtungsreihe, die Werthe von a unterworfen sein werden.

Ueber die schliesslich abgeleiteten Werthe für die Sonnenwärme liegen mir zwei Reihen vor[1]).

I.		II.	
Juni 29	574 ± 9	Juni 29	572 ± 11
Juli 1	564 ± 8	Juli 1	559 ± 8
Aug. 14	607 ± 10	Aug. 14	598 ± 8
Sept. 12	573 ± 27	Sept. 12	550 ± 25
Oct. 15	555 ± 10	Oct. 15	552 ± 14

Obgleich diese beiden Reihen sehr erhebliche, bis vier Procent gehende Abweichungen zeigen, habe ich nirgends eine Angabe über die Ursache dieser Abweichungen finden können.

Die den Zahlen beigefügten wahrscheinlichen Fehler — die übrigens auch in den beiden Reihen verschieden sind — könnten nun leicht dazu verleiten, das Maass der Genauigkeit der Endwerthe für die Sonnenwärme (S) zu überschätzen. Sie bekunden jedoch weiter nichts, als dass die zur Berechnung von S hinzugezogenen Beobachtungen an einem Beobachtungstage mehr oder weniger gut übereingestimmt haben, oder dass mehr oder weniger nahezu gleichwerthige Beobachtungen (der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung ist nicht angegeben) an einem Tage zum Mittel vereinigt wurden. Erst aus einer grösseren Reihe hintereinander angestellter Beobachtungen würde man ein Kriterium gewinnen können, inwieweit an einem Tage nicht zu vermeidende, constant wirkende Einflüsse das Endresultat modificiren. Solche constant wirkende Fehlerquellen sind aber in grosser Anzahl

1) Die erste findet sich in Wied. Ann. **21.** p. 29. 1884; die zweite in den Verhandl der physik. Gesellsch. zu Berlin Nr. 12. 1883. Noch an einer dritten Stelle, nämlich in dem ersten Hefte der electrotechnischen Zeitschrift (1884), ist eine Mittheilung der Messungen über die Sonnenwärme gegeben worden. Aus der dort befindlichen Fig. 3 ist zu entnehmen, dass die Endwerthe für die Sonnenwärme dieselben sind, wie in der zweiten oben mitgetheilten Reihe. Aus dem, was zur Erläuterung dieser Figur auf p. 8 gesagt ist, scheint übrigens noch hervorzugehen, dass der Verf. eine irrige Auffassung von der Bedeutung des wahrscheinlichen Fehlers bei Beobachtungen hat.

vorhanden und sind vor allen Dingen durch die Reduction der Beobachtungen auf Normalmaass gegeben. Gesetzt aber, die abgeleiteten wahrscheinlichen Fehler wären wirkliche Maasse der Genauigkeit der Werthe für S, so würde mit Ausschluss vom 14. August aus den vier Beobachtungen ein Mittelwerth resultiren, der bei beiden Reihen genau innerhalb der wahrscheinlichen Fehler der einzelnen Beobachtungen liegt. Es kann und darf daher nichts anderes aus den vier Beobachtungen gefolgert werden als:

Die Sonnenwärme hat an den Beobachtungstagen Juni 29., Juli 1., September 12. und October 15. keine durch die Messungen wahrnehmbare Schwankungen gezeigt.

Ein wirklich ausserhalb der inneren wahrscheinlichen Fehler der Messungsreihe gelegener Werth für S wurde am 14. August beobachtet. Aus dieser einen Abweichung von fünf Beobachtungen den Schluss zu ziehen, dass die Wärmeveränderung der Sonne erwiesen sei, dürfte doch wohl sehr gewagt erscheinen, besonders in Anbetracht dessen, dass der wahrscheinliche Fehler ja eben nicht die wahrscheinlichen Grenzen, innerhalb deren der wahre Werth von S liegt, darstellt. Es ist ja möglich, dass eine Wärmeveränderung an dem Tage stattgefunden hat; es ist aber ebenso gut möglich, dass gerade an diesem Tage ein constanter Fehler bei der Reduction der Beobachtungen auf Normalmaass begangen worden ist.

Durch die Beobachtungen des Hrn. Dr. Frölich scheinen mir demnach „thatsächliche Nachweise von Variationen“ noch nicht gegeben zu sein, und damit fiele denn auch das Auffallende der „Grösse der Variationen“ weg.

Sehr gern will ich jedoch zugeben, dass durch die vorliegende Arbeit es wahrscheinlich geworden ist, dass sich durch fortgesetzte Beobachtungsreihen Schwankungen in der Sonnenwärme nachweisen lassen werden, auch wenn sie nur ein oder wenige Procente der Gesamtwärme betragen; aber es gehören dazu nicht nur fünf, sondern eine sehr grosse Anzahl von Beobachtungstagen!

Da in der besprochenen Abhandlung noch ein Zusammen-

hang der vermeintlichen Wärmeschwankungen mit der Fleckenentwickelung erwähnt wird, will ich noch einige Worte hinzufügen über den Ausschlag, den man infolge der Fleckenbildung auf der Sonne für die Schwankungen in der uns zugehenden Wärmemenge zu erwarten hat. Indem ich alle weiteren Hypothesen, welche man über die Entstehungsursachen von Veränderungen in der Sonnenwärme aufstellen könnte, ausschliesse, will ich nur, wie es auch Hr. Dr. Frölich gethan hat, annehmen, dass die sichtbaren Vorgänge auf der Sonnenoberfläche im Stande sind, auf die Gesammtwärmestrahlung der Sonne einzuwirken. Ich nehme dabei an, dass an den Stellen der Kernflecke die Wärmestrahlung absolut aufgehoben sei, und dass die Penumbren nur halb soviel Wärme aussenden als gleich grosse, fleckenfreie Theile der Sonne. Die Einwirkung der Fackeln, welche der der Flecke entgegengesetzt angenommen werden müsste, welche also die Verminderung der Gesammtwärmestrahlung durch die Flecken wieder erhöhen dürfte, vernachlässige ich ganz. Die genaue Messung der Fleckenareale ergibt dann, dass an einem ganz besonders fleckenreichen Tage im April 1882 die Gesammtwärme nur $^4/_{10}$ Proc. geringer ist, als die von der flecken freien Sonne ausgehende Wärme.

Für die Tage, an denen Hr. Dr. Frölich seine Temperaturbeobachtungen gemacht hat, ergibt sich nach den photographischen Aufnahmen auf dem Königl. Observatorium zu Potsdam, unter den vorhin genannten Voraussetzungen, für das Verhältniss der mit Flecken bedeckten zur fleckenfreien Sonnenscheibe Folgendes:

Juni 29	0,00226	Sept. 12	0,00101
Juli 2 [1]	0,00165	Oct. 15	0,00329
Aug. 14	0,00013		

Nehme ich zur besseren Vergleichung mit den obigen Beobachtungen die Sonnenwärme der fleckenfreien Sonne zu 580 an, so kommen folgende Zahlen:

Juni 29	578,7	Sept. 12	579,4
Juli 2	579,0	Oct. 15	578,1
Aug. 14	579,9		

1) Juli 1 ist keine Photographie gemacht worden; der Fleckenbestand hat sich aber in der Zeit nicht bemerkenswerth verändert.

Aus Daten, welche Hrn. Dr. Frölich von dem Observatorium bereitwilligst zur Verfügung gestellt worden wären, hätte er sich durch einfache Rechnung überzeugen können, dass der Einfluss der sichtbaren Vorgänge auf der Sonne auf die Gesammtstrahlung nur ein ausserordentlich geringer sein kann, und dass die Beobachtungen wohl eine zehnmal grössere Genauigkeit hätten haben müssen, um einen solchen Einfluss durch dieselben zu finden. Dass an den Tagen, wo die Messungen einen etwas geringeren Werth für die Sonnenwärme ergeben haben, gerade mehr Sonnenflecken, und an dem einen Tage, wo das Entgegengesetzte stattfand, die Sonne nur wenig Flecken zeigte, dürfte wohl lediglich dem Zufall zuzuschreiben sein. Demnach haben wir nicht nur die „sichere Begründung des Gesetzes, dass die Sonnenwärme mit zunehmender Fleckenbildung abnimmt", sondern überhaupt den sicheren Nachweis irgend eines Zusammenhanges zwischen der Fleckenentwickelung und der Sonnenwärme erst von zukünftigen Beobachtungen zu erwarten.

Kgl. Observat. zu Potsdam, im Februar 1884.

V. *Ueber die Electrolyse des festen Glases; von E. Warburg.*

(Hierzu Taf. VI Fig. 5—8.)

(Aus den Berichten über die Verhandl. der naturforsch. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. Bd. 8. p. 2, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Der Durchgang der electrischen Stromes durch das feste Glas ist vielfach Gegenstand der Untersuchung gewesen. Der electrische Leitungswiderstand des festen Glases in seiner Abhängigkeit von der Temperatur wurde zuerst von Buff[1]) bestimmt; neuere Bestimmungen derselben Grösse wurden ausgeführt von Beetz[2]), Perry[3]), Foussereau[4]), Th. Gray.[5])

1) Buff, Lieb. Ann. **90.** p. 257. 1854.
2) Beetz, Pogg. Ann. Jubelband. p. 23. 1874.
3) Perry, Proc. Roy. Soc. **23.** p. 468. 1875.
4) Foussereau, Journ. de phys. (2) **11.** p. 254. 1883. Beibl. **7.** p. 198.
5) Th. Gray, Proc. Roy. Soc. **34.** p. 199—208. 1883. Beibl. **7.** p. 302.

Buff[1]) und Beetz[2]) haben ferner die galvanische Polarisation am festen Glase nachgewiesen; Buff[3]) und später W. Thomson[4]) haben galvanische Elemente zusammengestellt, in welchen das Glas die Rolle des Leiters zweiter Classe übernimmt.

Auf einem Wege, dessen Bezeichnung hier nicht von Interesse ist, bin ich darauf geführt worden, den Durchgang des electrischen Stromes durch das feste Glas nach anderen Richtungen hin zu untersuchen. Ich habe dabei eine Reihe von Beobachtungen gemacht, deren Mittheilung der Zweck dieses Aufsatzes ist.

§ 1. Zu den Versuchen, welche zum grössten Theil bei einer Temperatur von etwa 300° angestellt wurden, diente mir ein Luftbad, dessen Einrichtung aus Fig. 5 ersichtlich ist. Die drei starken Eisenfüsse *F* tragen den äusseren Hohlcylinder *H*, welcher oben einen mit vier 1 cm weiten, kreisrunden Löchern versehenen, ringförmigen, nach innen gekehrten Fortsatz trägt. Auf diesem ruht mittelst eines gleichen, ebenso durchlöcherten Fortsatzes der innere, unten geschlossene Cylinder *I*. Auf *I* wird ein mit drei Tubulaturen versehener Deckel *D* aufgesetzt. Die drei Tubulaturen nehmen durch Korke auf: das Glasrohr, welches den Versuchsapparat enthält, einen Reichert'schen[5]) Thermoregulator und ein bis 360° getheiltes, mit Luft gefülltes Thermometer. Die Erwärmung geschieht durch zwei bis vier Bunsen'sche Brenner, welche in dem ringförmigen Raum zwischen *I* und *H* in die Höhe brennen, der Luftzug kann erforderlichen Falles durch Drehen von *I* — wobei die Zuglöcher sich mehr oder weniger öffnen — regulirt werden. Schon durch zwei Brenner können Temperaturen bis zu 310° bei einem Gasdruck von 2 cm Wasser erzielt werden.

Ein Thermometer, dessen Gefäss sich in dem abgeschlossenen Heizraum des Bades befindet, nimmt, je nach-

1) Buff, Lieb. Ann. **90.** p. 257. 1854.
2) Beetz, Pogg. Ann. **92.** p. 452. 1854.
3) Buff, Lieb. Ann. **90.** p. 257. 1854.
4) W. Thomson, Proc. Roy. Soc. **28.** p. 463. 1875.
5) Reichert, Pogg. Ann. **144.** p. 467. 1871.

dem das Gefäss mehr nach unten oder oben geschoben wird, höhere oder tiefere Temperaturen an; der Unterschied kann bis zu 40° ansteigen. Bringt man indessen das Thermometer in ein mit Quecksilber gefülltes Glasrohr, wie es zu den Versuchen gebraucht wird, so zeigen sich, je nachdem das Gefäss des Thermometers höher oder tiefer im Quecksilber sich befindet, keine merklichen Temperaturdifferenzen; die kleinen Differenzen, welche man zuweilen erhält, liegen innerhalb der Fehlergrenzen, die durch die Unsicherheit in der Correction wegen des herausragenden Fadens hier ziemlich weite sind.

§ 2. Das Glas wandte ich nach dem Vorgang von Buff in Form eines Reagensrohres an, und zwar benutzte ich zu den Versuchen Thüringer Glas, welches verhältnissmässig gut leitet. Von einer der benutzten Röhren hatte Hr. Prof. Rose in Strassburg die Güte, eine Analyse durch Hrn. Dr. Woringer zu veranlassen, welche folgende Zusammensetzung ergab:

SiO_2	Al_2O_3	Fe_2O_3	Mn_2O_3	CaO	MgO	K_2O	Na_2O	
70,23	1,75	0,09	0,85	8,53	Spuren	4,27	15,08	= 100,80.

Es scheint zweifelhaft zu sein, wie diese Bestandtheile chemisch miteinander verbunden sind.[1]) Der Bestandtheil, welcher die electrolytische Leitung vorzugsweise bedingt, ist nach meinen Versuchen (§ 19—22) Na_2SiO_2, das vielleicht in der Masse in ähnlicher Weise enthalten ist, wie ein Salz in seinem Lösungsmittel.

§ 3. Ich begann mit dem Versuche von Buff, bei welchem ein Reagensglas, zum Theil mit Quecksilber gefüllt, in ein weiteres, auch zum Theil mit Quecksilber gefülltes Glasrohr eingesetzt ist. Das äussere und innere Quecksilber bildeten die Electroden, der Strom wurde durch eintauchende Platindrähte zugeleitet und seine Intensität durch ein eingeschaltetes Galvanometer beobachtet.

Schon Buff fand unter diesen Umständen, dass „während des Durchganges des Stromes durch das Glas die Galvano-

1) Vgl. Faraday Phil. Trans. Part. I. p. 1. 1830; Graham-Otto 3. Aufl. p. 503. 1855.

meternadel immer nur vorübergehend eine feste Ablenkung annahm, bald aber langsam gegen Null hin zurücksank"[1]); er erklärt diese Erscheinung durch die mit der Zeit mehr und mehr zunehmende Polarisation.

Als ich indessen die Electroden des auf etwa 300° erhitzten Apparates mit den Polen einer Kette von dreissig hintereinander geschalteten Bunsen'schen Elementen verband, zeigte sich, dass der Strom, anfänglich stärker, als 24000 M. A. (Mikroampères = Amp. / 10^6) nach Verlauf einer Stunde auf 20 M. A., also auf etwa den 1000. Theil seines Werthes gesunken war.

Rührte diese Erscheinung von der galvanischen Polarisation her, so müsste die letztere den unwahrscheinlichen Werth von beinahe dreissig Bunsen'schen Elementen erreicht haben, einen Werth, der um so unwahrscheinlicher ist, als Buff die Polarisation mit wachsender Elementenzahl nur wenig wachsend fand.

Es liegt daher nahe, den Grund der Stromschwächung in der Bildung einer schlecht leitenden Schicht von SiO_2 zu suchen, welche sich an der Anode bei der electrolytischen Zersetzung kieselsauren Salzes abscheidet. Das Glas würde sich in Bezug auf dieses Verhalten den sogenannten unipolaren Leitern[2]) anschliessen.

§ 4. Dass die Ursache der Stromschwächung bei dem beschriebenen Versuche lediglich an der Anode liegt, geht daraus hervor, dass jene Stromschwächung sich nicht zeigt, wenn man anstatt des Quecksilbers Natriumamalgam (etwa einprocentiges) als Anode anwendet.

Es dürfte in dem vorliegenden Fall aus verschiedenen Gründen (vgl. § 16) schwer sein, den Widerstand der schlecht leitenden Schicht durch eine einwurfsfreie Methode zu messen und dadurch die gegebene Anschauung zu beweisen. Die zu beschreibenden Beobachtungen widersprechen aber so sehr der Annahme einer Polarisation als Ursache der starken Stromschwächung und schliessen sich der Annahme einer

1) Buff, l. c.

2) A. S. Ohm, Schweigg. Journ. **59.** p. 385. 1830 u. **60.** p. 32. 1830.

schlecht leitenden Schicht so gut an, dass ich von der letzteren wie von einem bewiesenen Dinge reden will.

§ 5. Durch ein Glasrohr von 0,035 cm Wandstärke und 1,29 cm Lichtweite, das bis zu einer Höhe von 6,3 cm mit Quecksilber gefüllt war und in ein weiteres Rohr so eintauchte, dass das Quecksilber aussen höher als innen stand, leitete ich bei etwa 300° den Strom von dreissig wenig gefüllten Bunsen'schen Elementen etwa zwei Stunden lang von aussen nach innen hindurch. Der Strom, anfänglich stärker, als 10000 M. A., war auf 36 M. A. gesunken und wurde nun durch ein Wiedemann'sches Galvanometer beobachtet, bei welchem ein Scalentheil 0,14 M. A. entsprach.

Als ich jetzt die Temperatur auf 192,8° sinken liess, wurde der Strom so schwach, dass er von diesem Galvanometer nicht mehr angegeben wurde. Der Widerstand des Glases selbst — abgesehen von der abgeschiedenen Kieselsäureschicht — bestimmt, indem auf beiden Seiten $^1/_2$procentiges Natriumamalgam die Electroden bildete, betrug 94600 Ohms, der Galvanometerwiderstand 2247 Ohms; ohne den Widerstand der Kieselsäureschicht wäre daher die Stromintensität etwa 580 M. A. gewesen und wäre mithin der Galvanometerspiegel aus dem Gesichtsfeld weit herausgeworfen worden. Der Apparat muss also in diesem Zustand einen Condensator repräsentiren, in welchem die Kieselsäureschicht das Dielectricum bildet, das Quecksilber an der Anode einerseits und die leitende Glasmasse andererseits die Belegungen. Dies habe ich durch das Experiment bestätigt gefunden.

§ 6. Die Versuchsanordnung ist aus dem Schema Fig. 6 ersichtlich. K ist eine Kette von der electromotorischen Kraft e, welche fortwährend mit der Glaszelle G verbunden ist; g das Galvanometer, T ein Telegraphenschlüssel. K' ist eine Kette von zwanzig Bunsen'schen Elementen; von den Kohlen des fünften, zehnten und zwanzigsten Elementes führen Drähte zu den drei Quecksilbernäpfen 5, 10, 20 jedes derselben kann mit dem Napf 0 verbunden werden; R ist ein Widerstand von beiläufig 9000 S. E., dazu bestimmt, die Kette K' bei den Versuchen zu schonen.

Ist nun z. B. das Napf 0 mit dem Napf 10 verbun-

den und der Taster in der Ruhestellung, so ist die Potentialdifferenz auf den Belegungen des Condensators $= e + 10$ B. E. $= e + e'$, indem e' allgemein die electromotorische Kraft des wirksamen Theiles der Kette K' bezeichnet. Wird jetzt der Taster niedergedrückt und dadurch α und β überbrückt, so wird die genannte Potentialdifferenz um e' vermindert, beim Loslassen des Tasters wieder um e' vermehrt. Die Ladungs- und Entladungsströme passiren das Galvanometer und bringen gleiche und entgegengesetzte Ausschläge desselben hervor. Nach den Ausschlägen kehrt sofort die stark gedämpfte Nadel in die Ruhelage zurück.

Wenn nun wirklich die Glaszelle in diesem Zustande wie ein gewöhnlicher Condensator von constanter Capacität wirkt, indem die abgeschiedene Kieselsäureschicht das Dielectricum bildet, so müssen:

1. die Galvanometerausschläge unabhängig sein von der electromotorischen Kraft der Kette K,

2. proportional der electromotorischen Kraft e', welche bei der beschriebenen Anordnung auf fünf, zehn und zwanzig Bunsen'sche Elemente gebracht werden konnte.

Dass dies wirklich der Fall ist, geht aus folgender Tabelle hervor, in welcher unter a die nach dem Tangentengesetze reducirten Galvanometerausschläge verzeichnet sind. Nachdem die Kieselsäureschicht durch eine Kette von dreissig Bunsen'schen Elementen erzeugt worden war, wurden bei diesen Versuchen, wie man sieht, zwanzig Elemente von K fortgenommen und nach K' gebracht.

$e = 10$ B.			$e = 4$ B.		
e'	a	a ber.	e'	a	a ber.
20	194,0	—	20	194,2	—
10	95,4	97,0	10	95,9	97,1
5	47,9	48,5	5	48	48,5

Die Capacität zeigt sich unabhängig von e und bis auf 1—2 Proc. constant, wenn die Potentialdifferenz auf den Belegungen (e') von fünf bis zu zwanzig Bunsen'schen Elementen variirt wird (Columne a ber.). Durch andere Ver-

suche (siehe § 10) habe ich die Constanz der Capacität bis zur Potentialdifferenz von ein B. bestätigt gefunden.

§ 7. Aus den Galvanometerausschlägen kann die entladene Electricitätsmenge Q, mithin auch die Capacität des Condensators in dem Falle, dass die Entladungszeit unendlich klein ist gegen die Schwingungsdauer des Galvanometermagnetes, nach folgender Formel berechnet werden:

$$(1) \qquad Q = a.c.\frac{\Theta}{2\pi}.k^{\frac{1}{\pi}.\operatorname{arc}.\operatorname{tg}.\frac{\pi \log e}{\lambda}} = a.c.\vartheta,$$

wo c die einem Scalentheil Galvanometerablenkung entsprechende Stromintensität ist, Θ die ganze Schwingungsdauer des ungedämpften Galvanometermagnetes, k das Dämpfungsverhältniss $\lambda = \log k$ das logarithmische Decrement. ϑ ist für das benutzte Galvanometer 0,765″.

Stellt man nun die Versuche des vorigen Paragraphen bei höheren Temperaturen an, so ist gewöhnlich ein schwacher Leitungsstrom vorhanden, dessen Intensität von der electromotorischen Kraft des Kreises abhängt. Die Ladungs- und Entladungsströme superponiren sich hier den Leitungsströmen; die Gleichgewichtslage des Magnetes ändert sich beim Niederdrücken oder Loslassen des Tasters um α Scalentheile. Es kann indessen auch hier die entladene Electricitätsmenge Q nach der Formel (1) berechnet werden, wenn man für a setzt:

$$a^*(1 - 2q\varepsilon),$$

und dabei die Voraussetzung erfüllt ist, dass $2q\varepsilon$ sehr klein ist. Hier bedeutet a^* den Ausschlag in Scalentheilen, welchen man beim Niederdrücken des Tasters erhält, gerechnet von der Gleichgewichtslage, welche sich nach dem Niederdrücken des Tasters herstellt:

$$2q\varepsilon = \frac{a}{\alpha}.\frac{\Theta}{\vartheta}.\frac{1}{\pi}.\frac{\frac{\lambda}{\pi \log e}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi \log e}\right)^2}}.$$

Für das benutzte Galvanometer ist:

$$2q\varepsilon = \frac{\alpha}{a}.0{,}42.$$

In der folgenden Tabelle ist für verschiedene Temperaturen der $e' = 5$ B. entsprechende Werth von $a^*.(1 - 2q\varepsilon)$

unter der Rubrik a verzeichnet; es wurde jedesmal das Mittel aus den vom Ladungs- und Entladungsstrom gelieferten Werthen genommen, welche innerhalb der Beobachtungsfehler übereinstimmten.

$e' = 5$ B.

t	299,4°	260°	223,7°	192,8°,
a	48,6	49,1	47	44,5.

§ 8. Die Abnahme, welche a mit abnehmender Temperatur zeigt, kann daher rühren, dass bei den tieferen Temperaturen wegen des vergrösserten Widerstandes des Glases die Dauer der Ladungs- und Entladungsströme nicht unendlich klein gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers gesetzt werden darf. In der That war bei 150° jene Dauer viel grösser, als die Schwingungsdauer, die Nadel blieb längere Zeit hindurch merklich abgelenkt, a zeigte sich selbstverständlich bedeutend verkleinert.

Berechnet man indessen den Verlauf der Ladungs- und Entladungsströme nach der Theorie, indem man als Widerstand des Glases den Widerstand der Glasmasse in Rechnung bringt, nämlich den Widerstand, welcher sich ergibt, wenn Electroden aus Natriumamalgam beim frischen Glase benutzt werden, so findet man, dass die beobachtete Abnahme von a sich keineswegs völlig erklären lässt. Der Verlauf der Ladungs- und Entladungsströme hängt bekanntlich ab von dem Widerstande w des Kreises, dem Potential desselben auf sich selbst P und der Capacität C des Condensators. P konnte bei diesen Versuchen auf $3760 . 10^6$ Cent. geschätzt werden, C auf $^1/_2$ Mikrofarad, w, zusammengesetzt aus dem Widerstand der Glasmasse und dem des Galvanometers, war bei den vier Temperaturen bezüglich 3330, 6920, 30180, 96900 Ohms, dabei der Widerstand des Galvanometers 2390 S. E. Es ergibt sich daraus, dass bei 299,4° die Entladung eine oscillirende ist, bei den drei folgenden Temperaturen eine aperiodische.

Bei 192,8° ist der Widerstand der Glasmasse so gross, dass das Potential der Leitung auf sich selbst den Verlauf der Ströme nicht mehr merklich beeinflusst; hier ist die Intensität i des Entladungsstromes:

$i = Q.\alpha.e^{-\alpha t}$, wo $\alpha = \frac{1}{Cw} = 18{,}9$ in diesem Falle.

Integrirt man nun die Galvanometergleichung:

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} + 2\varepsilon \cdot \frac{d\psi}{dt} + n^2\psi = \frac{n^2}{c} \cdot Q.\alpha.e^{-\alpha t},$$

wo n die Schwingungszahl in der Zeit 2π der ungedämpften Galvanometernadel, ψ die Galvanometerablenkung in reducirten Scalentheilen bedeutet, entwickelt das Integral unter der Voraussetzung, dass ε/α und n/α sehr klein gegen Eins sind, und bleibt bei Grössen zweiter Ordnung stehen, so findet man, dass Q nach Gleichung (1) berechnet werden kann, wenn man für a setzt:

$$a_0 = a\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{n^2}{\alpha^2}\right).$$

Hier bedeutet also a_0 den Ausschlag, welchen man bei verschwindender Dauer des Entladungsstromes erhalten würde. Für das benutzte Galvanometer ist $n = 2{,}05''$; $\frac{1}{2}n^2/\alpha^2$ in unserem Falle 0,0056; durch die endliche Dauer des Stromes würde a um 0,3 Einheiten verkleinert, während der Versuch eine Verkleinerung um 4,5 Einheiten ergab.

Es folgt hieraus, dass entweder mit sinkender Temperatur die Capacität sich ändert, oder dass der Widerstand des Glases nicht so in Rechnung gezogen werden darf, wie angenommen wurde. Das letztere halte ich für das Wahrscheinliche.

Jedenfalls kann man aus den Versuchen über die Aenderung der Capacität mit der Temperatur nichts entnehmen. Ich benutze daher zur Berechnung der Capacität nur die für die beiden höheren Temperaturen erhaltenen Zahlen, welche eine Aenderung mit der Temperatur nicht mehr zeigen, und setze demnach $a = 48{,}9$, d. i. gleich dem Mittelwerth für die beiden höheren Temperaturen. Es ist nun $Q = C.e = a.c.\vartheta$. Bringt die electromotorische Kraft e_1, wirkend in einem metallischen Kreise vom Widerstand w_1, die reducirte Galvanometerablenkung a_1 hervor, so ist:

$$c = \frac{e_1}{a_1 w_1}, \quad \text{woraus} \quad C = \frac{e_1}{e} \cdot \frac{a}{a_1} \cdot \frac{\vartheta}{w_1}.$$

Ich finde so:

$$C = 0{,}56 \text{ Mikrofarad.}$$

Die von der Kieselsäureschicht bedeckte Glasoberfläche betrug 25,3 qcm, mithin ergibt sich die Capacität für das Quadratcentimeter C_1:

$$C_1 = 0{,}0221 \text{ Mikrofarad.}$$

§ 9. Ich verzeichne hierunter noch zwei ähnliche Versuchsreihen, die mit einem anderen Glase angestellt wurden, für das die Oberfläche der Schicht $O = 26{,}1$ qcm, der Radius des Lumens $r = 0{,}661$ cm, die Glasdicke $\varrho = 0{,}0314$ cm. Die Kieselsäureschicht war wieder durch eine Kette von 30 B. E. bei etwa 300° abgeschieden worden. Bei der ersten Versuchsreihe war $e' = 5$ B., bei der zweiten $e' = 10$ B., bei der ersten wurden beide Windungsreihen der Galvanometerrolle benutzt, es war $c = 0{,}182$ M. A., $P = 3760.10^6$ cm; bei der zweiten war nur eine Windungsreihe eingeschaltet, c war hier 0,610 M. A. und P auf 1410.10^6 cm zu schätzen.[1]) Der Widerstand der Glasmasse war bei diesen und den folgenden Versuchen nur um wenige Procente von dem Widerderstande des Glases 1 des § 5 verschieden.

Glas 2_a. $O = 26{,}1$ qcm.

1.		2.	
t	a	t	a
307,8	36,7	307,7	18,9
283,5	36,9	283,4	19,9
237,7	33,3	241,1	19,0
192,5	30,3	191,3	17,1

Setzt man bei 1 $a = 36{,}8$, bei 2 $a = 19{,}4$ zwischen 283 und 308°, so ergibt sich aus 1 $C = 0{,}55$ M. F., aus 2 $C = 0{,}48$ M. F., im Mittel $C = 0{,}52$ M. F. Da ferner $O = 26{,}1$ qcm, so ist die Capacität per Quadratcentimeter $C_1 = 0{,}0199$.

§ 10. Bei allen beschriebenen Versuchen war die Kieselsäureschicht durch eine Kette von 30 B. E. erzeugt. Durch eine Kette von kleinerer electromotorischer Kraft muss in derselben Zeit eine dünnere Schicht abgeschieden,

1) Bei allen folgenden Versuchen hatte P diesen Werth.

folglich ein Condensator von grösserer Capacität erzeugt werden. Auch diese Folgerung habe ich durch den Versuch bestätigt gefunden. Aus demselben Glasrohr, von welchem das Rohr 2_a des vorigen Paragraphen herrührte, wurden zwei Reagensgläser 2_b und 2_c gemacht und die Schicht unter denselben Umständen durch eine Kette von 15 B. E. erzeugt. Der Leitungsstrom wurde hier erst bei Temperaturen von 250° an hinreichend klein.

Glas 2_b.

$e = 4$ B. E. $c = 0{,}632$ M. A.
$O = 25{,}9$ qcm. $\varrho = 0{,}0314$.
$r = 0{,}698$.
$t = 234{,}3°$.

e'	a	a ber.
11	46,6	—
5	20,8	21,2
1	4,5	4,24

Glas 2_c.

$e = 4$ B. E. $c = 0{,}630$ M. A.
$O = 28{,}1$ qcm. $\varrho = 0{,}0314$.
$r = 0{,}687$ cm.

$t = 234{,}3°$.			$t = 250{,}1°$.	
e'	a	a ber.	a	a ber.
10	44,6	—	44,4	—
5	21,9	22,3	23,0	22,20
1	4,5	4,46	4,55	4,44

Für das Rohr 2_b ergibt sich mit $a = 4{,}23$ per Bunsen, $C = 1{,}09$ M. F., $C_1 = 0{,}0421$. Für das Rohr 2_c mit $a = 4{,}44$, $C = 1{,}14$, $C_1 = 0{,}0406$.

Es ergibt sich also im Mittel die Capacität per Quadratcentimeter C_1, als

die Schicht durch 15 B. E., erzeugt wurde $C_1 = 0{,}0414$
„ „ „ 30 B. E., „ „ $C_1 = 0{,}0210$.

Die numerische Beziehung zwischen C_1 und der electromotorischen Kraft der erzeugenden Kette zu liefern, beanspruchen diese Zahlen aus verschiedenen Gründen nicht. Diese Beziehung experimentell aufzusuchen, scheint kaum von Interesse. Setzt man die Temperatur und den specifischen Widerstand der Schicht constant (vgl. indessen § 16), so würde die Dicke der Schicht, nachdem der Strom eine sehr lange Zeit hindurch gewirkt hat, sich proportional ergeben der Quadratwurzel aus der electromotorischen Kraft multiplicirt mit der Zeit, während deren sie gewirkt hat; dagegen unabhängig von der Glasdicke.

§ 11. Bekanntlich ist:

$$C_1 = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{4\pi d} \cdot D,$$

wo d die Dicke der Schicht, D ihre Dielectricitätsconstante, α die Anzahl electrostatischer Einheiten der Electricitätsmenge in einer electromagnetischen Einheit bedeutet. Da $D > 1$, so ist:

$$d > \frac{1}{4\pi\alpha^2 \cdot C_1}.$$

Setzt man nach Maxwell[1]):

$$\alpha = 28{,}8 \text{ B. A. Ohms},$$
$$= 28{,}4^2) \text{ Ohms},$$

so findet man:

$$d > \frac{47{,}1 \text{ mm}}{10^6} \text{ oder } > \frac{23{,}9 \text{ mm}}{10^6},$$

je nachdem die Schicht durch 30 oder 15 B. E. gebildet wurde.

§ 12. Es ist von Interesse, die gefundenen Capacitäten der Kieselsäurecondensatoren zu vergleichen mit der Capacität von Electroden, welche galvanisch polarisirt werden.[3]) Varley[4]) findet die Capacität von Platinelectroden in angesäuertem Wasser für die Potentialdifferenz von 0,2 Volt zu 13,5 M. F. per Quadratcentimeter[5]); die Capacität von 13,5 auf 31,4 M. F. wachsend, wenn die Potentialdifferenz von 0,2 auf 1,0 Volt gesteigert wird.

Blondlot[6]) findet in demselben Fall die Initialcapacität, d. i. die Capacität für unendlich kleine Potentialdifferenzen zu 3,88 — 15,54 M. F. per Quadratcentimeter.

Es ergibt sich also die Capacität der galvanischen Polarisation von Platinplatten in angesäuertem Wasser erstens

1) Maxwell, Treatise 2. p. 373.

2) Indem nach W. Siemens (Electrotechn. Zeitschr. 3. p. 415. 1882) 1 B. A. Ohm = 0,9885 Ohm.

3) Sei Q die Electricitätsmenge, welche einem Voltameter mit zwei gleichen Electroden von der Gesammtoberfläche s zugeführt werden muss, damit in demselben die electromotorische Kraft e erzeugt wird, so ist Q/es die Capacität der Polarisation für die Flächeneinheit.

4) Varley, Phil. Trans 161. p. 136. 1871.

5) Nämlich 175 M. F. für den engl. Quadratzoll doppelter Platinoberfläche l. c.

6) Blondlot, Journ. de phys. (1) 10. p. 443. 1881. Beibl. 5. p. 536.

viel grösser als die Capacität der Kieselsäurecondensatoren; zweitens bedeutend veränderlicher mit der Potentialdifferenz, nämlich auf mehr als das Doppelte wachsend, wenn die Potentialdifferenz verfünffacht wird, während sie für die Kieselsäurecondensatoren sich constant erweist, wenn die Potentialdifferenz von 1 auf 20 gesteigert wird. Der letztere Unterschied ist besonders charakteristisch und zeigt nach meiner Ansicht deutlich, dass die galvanische Polarisation an den hier beschriebenen Erscheinungen keinen wesentlichen Antheil hat.

§ 13. Die abgeschiedene Kieselsäureschicht gibt sich noch in anderer Weise zu erkennen. Thüringer Glas entladet bekanntlich bei dem gewöhnlichen Feuchtigkeitsgehalt der Luft ein Goldblattelectroskop fast momentan durch oberflächliche Leitung, welche nach Faraday von der auf der alkalischen [1]) Glasoberfläche condensirten Luftfeuchtigkeit herrührt. Dieses oberflächliche Leitungsvermögen wird nun solchem Glase durch die Kieselsäureschicht zum grössten Theil entzogen und auch bei längerer Berührung das stark geladene Electroskop nicht mehr entladen, wennauch das Isolationsvermögen hinter dem des Paraffins zurücksteht.

[Anm. bei der Correctur. Der Unterschied in dem Isolationsvermögen zwischen dem isolirend gemachten und dem unveränderten Theil eines Glasrohres zeigt sich vor dem Electroskop am schlagendsten, wenn das Glas im kalten Zimmer Zimmer aufbewahrt wird.]

Da diese Methode, Glas isolirend zu machen, welche ich auf dünne und dicke Gläser anwendbar gefunden habe, möglicherweise in der Technik oder wenigstens bei der Construction electrometrischer Apparate Verwendung findet, so habe ich mich bemüht, die besten Bedingungen zu finden. Vorläufig kann ich folgendes Verfahren empfehlen.

Das mit einem passenden Kork versehene, gut gereinigte Glas wird dort, wo die Schicht abgeschieden werden soll, vor der nicht leuchtenden Glasbläserlampe erhitzt, bis eben die Flamme sich gelb zu färben beginnt, und noch warm in destillirtes Quecksilber eingesetzt, das in einem weiteren

1) Faraday, Phil. Trans. 1830. part. I. p. 49.

Glasrohr enthalten ist. Dieses Verfahren ist auch für die Versuche § 5—10 zu empfehlen, indem bei so präparirten Gläsern nach meinen Erfahrungen der Leitungsstrom möglichst klein wird. Nachdem eine passende Quecksilbermenge in das innere Glas eingefüllt ist, wird der Strom von funfzehn wenig gefüllten Bunsen'schen Elementen bei einer Temperatur von 300—320° von aussen nach innen je nach der Dicke der Gläser verschiedene Zeit lang durchgeleitet. Für dünne Gläser von $^1/_3$ mm Wandstärke, wie sie zu den meisten der beschriebenen Versuche dienten, habe ich 15′ hinreichend gefunden. Gläser von $1^3/_4$ mm Wandstärke fand ich, nachdem $1^1/_2$ Stunden hindurch der Strom gewirkt hatte, sehr gut isolirend. In allen Fällen ist es gut, vorher etwa $^1/_2$′ lang den Strom in entgegengesetzter Richtung hindurchzuschicken. Damit die Schicht das Glas möglichst gleichförmig überzieht, ist es gut, nach Stromschluss das innere Rohr mehrmals aus dem Quecksilber herauszuheben und wieder einzusetzen, um anhaftende Gasblasen zu entfernen. Man findet, dass zuerst dabei die Ablenkung eines eingeschalteten Galvanometers sich vergrössert, hernach nicht mehr. Ebenso ist es gut, mit dem Gefäss des in das innere Glas eingesetzten Thermometers an der inneren Glaswand mehrmals hin- und herzufahren. Das Quecksilber des äusseren Rohres wird wegen Oxydbildung vor jedem neuen Experiment durch einen Glastrichter filtrirt. Es ist endlich zu empfehlen, den Kork von dem am unteren Theile isolirend gemachten Rohr über den oberen Theil hin abzustreifen. Verfertigt man sich zwei äussere, mit Quecksilber gefüllte Röhren, so kann man ein Glas gleich nach dem anderen behandeln und in verhältnissmässig kleiner Zeit eine grössere Zahl von Röhren in dem § 1 beschriebenen Thermostaten isolirend machen.

§ 14. Endlich gibt die Schicht sich auch dem Auge zu erkennen, indem sie die Farben dünner Blättchen hervorbringt und je nach der Dicke der Schicht im reflectirten Licht bräunlich oder grünlich erscheint.

§ 15. Die Schicht haftet am Glase ausserordentlich fest. Weder durch Reiben mit Natriumamalgam, das ihre

Bildung verhindert, noch durch Eintauchen in heisse Kalilauge lässt sie sich entfernen. Erst durch längere Behandlung mit der letzteren wird sie beseitigt.

§ 16. Kehren wir noch einmal zurück zu dem Verhalten der Schicht bei höheren Temperaturen. Es ist schon im § 7 bemerkt worden, dass bei Temperaturen über 200° gewöhnlich ein schwacher constanter Leitungsstrom übrig bleibt. Derselbe kann mittelst eines hinreichend empfindlichen Galvanometers leicht beobachtet und seine Abhängigkeit von der electromotorischen Kraft der angewandten Kette bestimmt werden. Es ergibt sich dabei, dass die Intensität sehr viel schneller wächst, als die electromotorische Kraft der Kette. Von vielen Versuchen führe ich folgende an, in welchen e die electromotorische Kraft in B. E., i die Stromintensität in Scalentheilen bedeutet.

1. Glas 2_a.
Schicht hergestellt durch 30 B. E.
Temp. 304,8°.
c = 0,182 M. A.

e	i	$\frac{e}{i}$
30	194,9	0,015
20	59,3	0,340
15	29	0,520

2. Glas 2_b.
Schicht hergestellt durch 15 B. E.
Temp. 318,5°.
c = 0,632 M. A.

e	i	$\frac{e}{i}$
5	7,6	0,66
9	20,5	0,44
15	70	0,21

Die electromotorische Kraft der Glaszelle bei gebildeter Schicht ist der Kraft der Kette entgegengerichtet und nach dem Electrometer auf etwa 0,17 Volt. zu veranschlagen, kann also die Resultate nicht erklären; dass diese electromotorische Kraft bei geschlossenem Strom erheblich grösser sei, ist nach § 12 unwahrscheinlich. Setzt man daher den Widerstand $= e/i$, so nimmt derselbe mit wachsender Stromintensität ab. Wahrscheinlich ist die vom Strom in der Schicht erzeugte Wärme die Ursache davon. Der Widerstand der Schicht ist nämlich von der Ordnung eines Megohm, in einem solchen aber bringt der schwache Strom von $70 \times 0{,}632$ M. A. in einer Secunde eine Wärmemenge hervor, welche, der Schicht mitgetheilt, in ihr eine Temperaturerhöhung von 3° erzeugt, wenn man die Dicke der Schicht

zu $100/10^6$ mm und ihre Dichte und specifische Wärme gleich der des Quarzes veranschlagt. Für diese Erklärung spricht auch die Thatsache, dass bei Vergrösserung oder Verkleinerung der electromotorischen Kraft die definitiven Werthe der Stromintensität sich erst nach einiger Zeit herstellten.

§ 17. Bei dem Versuch des § 3, bei welchem der Strom durch Quecksilberelectroden dem Glase zugeführt wird, geht die Stromschwächung durch die Bildung der Kieselsäureschicht so schnell vor sich, dass eine quantitative Bestimmung des Resultates der Electrolyse nicht durchführbar ist. So war bei einer Kette von 30 B.-E., bei einer Temperatur von 300°, einer durchströmten Glasoberfläche von 26 qcm und einer Glasdicke von 0,031 cm die Stromintensität nach 3′ auf 356 Mikroampères, nach 23′ auf 204 gesunken. Daraus geht die Richtigkeit der obigen Behauptung hervor, wenn man erwägt, dass 1000 M.-A. nur 4 mg Silber in der Stunde abscheiden. Verhütet man indess nach § 4 die Bildung der Kieselsäureschicht, indem man Natriumamalgam ($^1/_2$—1 procentiges) als Anode anwendet, so erhält man unter den genannten Bedingungen andauernde Ströme von 0,06—0,08 Ampères, welche eine quantitative Bestimmung des Resultates der Electrolyse erlauben. Eine solche Bestimmung durchzuführen, schien mir schon deshalb von Interesse, weil meines Wissens noch für keinen festen Electrolyten eine vorliegt. Vor der Beschreibung der Versuche will ich noch erwähnen, dass Kaliumamalgam nicht die gleichen Dienste, wie Natriumamalgam leistet, wahrscheinlich deshalb, weil sich mit jenem als Anode verhältnissmässig schlecht leitendes Kaliglas bildet.

§ 18. Bei den Versuchen wurde die Glaszelle, indem $^1/_2$—1 procentiges Natriumamalgam aussen die Anode bildete, mit einem passenden Galvanometer und einem Poggendorff'schen Silbervoltameter[1]) in den Kreis von 30 B.-E.

1) Anfänglich benutzte ich ein Kupfervoltameter (Kupfer in Kupfervitriol als Kathode, Platin als Anode), das sich hernach bekannten Erfahrungen entsprechend (Wied. Galv. 2. p. 510) als ein unzuverlässiges Instrument erwies, nämlich in der Regel zu kleine Zahlen lieferte. Die besten Resultate habe ich unter Anwendung concentrirter Kupfervitriollösung und kleiner Oberfläche der Kathode erhalten. Unter Anwendung

eingeschaltet. Das benutzte Silbervoltameter habe ich zum Ueberfluss mit einem Hofmann'schen Wasserstoffvoltameter verglichen und die Angaben beider Instrumente bis auf weniger als $^1/_2$ Proc. übereinstimmend gefunden. Das Natriumamalgam war, um es vor Oxydation zu schützen, mit einer Paraffinschicht bedeckt.

§ 19. Es fragt sich zuerst, ob durch die Electrolyse das Gewicht des Glases sich ändert. Um dies zu ermitteln, musste zuerst geprüft werden, ob Glasröhren, wenn sie wie bei den anzustellenden Versuchen in das mit Paraffin bedeckte Natriumamalgam eintauchen und, ohne vom Strom durchflossen zu werden, längere Zeit auf der Versuchstemperatur erhalten werden, eine Gewichtsänderung zeigen. Ein Rohr wurde so $2^1/_2$ Stunden im Natriumamalgam auf 300° erhalten. Es wog vorher 11 g 9611, nachher 11 g 9603, zeigte also einen Gewichtsverlust von 1 mg. Ein anderes Rohr 2 Stunden lang ebenso behandelt, zeigte eine Gewichtsabnahme von 1 mg.

Es wurde nun durch fünf verschiedene Röhren mit demselben einprocentigen Natriumamalgam als Anode der Strom von 30 B.-E. bei 300° hindurchgeleitet und die Röhren vor und nach dem Versuch gewogen. Bei diesen Versuchen war in den Stromkreis anstatt des Silbervoltameters ein Kupfervoltameter eingeschaltet, da es sich hier, wie gleich ersichtlich sein wird, nicht um die Feststellung eines Aequivalenzverhältnisses handelte. Die folgende Tabelle enthält die Resultate der Versuche.

Glas	Dauer des Versuches in Stunden	Ausgeschiedene Kupfermenge	Gewichtsabnahme des Glases
1	1	67 mg	3,1 mg
2	8	676 „	1,5 „
3	6	425 „	4,7 „
4	$6^1/_2$	481 „	6,6 „
5	4	281 „	4,8 „

eines Kupferdrahtes von 2 mm Dicke und 26 mm Länge als Kathode fand ich das Kupfervoltameter um weniger als 1 Proc. vom Silbervoltameter differirend bei einem Strom, der ungefähr 2 mg Kupfer in der Minute niederschlug. Ein Kupfervoltameter dieser Art kann ich demnach da empfehlen, wo ein Silbervoltameter nicht zur Hand ist.

Aus diesen Versuchen kann man schliessen, dass eine wesentliche Gewichtsänderung des Glases durch die Electrolyse nicht eintritt. Die dem electrolytischen Process unterworfenen Gläser waren vollkommen klar geblieben und zeigten selbst an der Oberfläche keine Spur von Corrosion, wenn das kathodische innere Quecksilber auch von einer Paraffinschicht bedeckt war.

Das kathodische Quecksilber zeigte nach dem Versuch starken Natriumgehalt Hiernach schien der Vorgang der zu sein, dass an der Kathode Metall abgeschieden wurde, während das an der Anode frei gewordene Radical SiO_3 Natrium aus dem Amalgam der Anode heranzog. Ist dies der Fall, so muss das Glas sammt seinem Inhalte eine Gewichtszunahme erleiden gleich der dem ausgeschiedenen Silber äquivalenten Natriummenge. Es ist dabei ganz gleichgültig, welches Metall an die Kathode abgegeben wird; vorausgesetzt ist nur, dass das an der Anode frei werdende SiO_3 nur Natrium und kein anderes Metall aus der Anode heranzieht. Die Beschaffenheit des Natriumamalgams, das zu den folgenden Versuchen benutzt wurde, ist daher von Interesse. Es war ursprünglich $^1/_2$ procentiges Amalgam, bereitet aus destillirtem, als chemisch rein zu bezeichnendem Quecksilber, und Natrium, das nach einer von meinem Collegen Prof. Baumann freundlichst ausgeführten Analyse 0,340 Proc. Kalium und 0,112 Proc. Calcium enthielt. Im Verlauf der Versuche wurde das Amalgam mehr und mehr erschöpft.

§ 20. Zu den Versuchen benutzte ich Apparate von folgender Einrichtung (Fig 7). An das der Electrolyse zu unterwerfende, dünnwandige Glasrohr AB ist ein dickwandigeres BC angeschmolzen und in dieses das Glas EFG eingeschmolzen, das aus einem engeren Theil EF und einem weiteren FG besteht. Der Raum zwischen FG und AB ist zum Theil mit dem kathodischen Quecksilber gefüllt, das durch den Ansatz T eingeführt wird, der Strom wird durch den eingeschmolzenen Platindraht P zugeleitet. T wird an die Quecksilberluftpumpe angesetzt, der Apparat im Vacuum ausgekocht und, nachdem trockne Luft bis zu $^1/_2$ Atmosphärendruck eingelassen ist, bei t abgeschmolzen. Mittelst der

Ansätze *a* und Fadenschlinge wird der Apparat an der Wage aufgehängt. Durch diese Einrichtungen war erreicht, dass bei möglichst geringer Zerbrechlichkeit des Ganzen ein dünnwandiges Glasrohr dem Versuch unterworfen werden konnte, dass das Gewicht des zu wägenden Apparates nicht zu gross war, und dass in das Innere nur durch den Strom Materie gelangen konnte.

Mit drei verschiedenen derartigen Apparaten wurden folgende Versuche angestellt, zu denen eine Kette von 30 B.-E. angewandt wurde.

	App. 1	App. 2	App. 3
Dauer des Versuches	4 Stund.	6 St. 17′	5 St. 44′
Temperatur	288,4°	287,3°	292°
Gewichtszunahme des Silbervoltameters .	2,2907 g	2,4274 g	2,1741 g
Gewichtszunahme des Glasapparates . .	0,4846 „	0,5157 „	0,4623 „
Gewichtszunahme des Glasapparates ber.	0,4892 „	0,5184 „	0,4643 „

Die Dicke des durchströmten Glases betrug etwa 0,28 mm.

Wie man sieht, belaufen sich die Abweichungen der beobachteten von den berechneten Werthen bei den drei Versuchen bezüglich auf 1, 0,5, 0,4 Proc. des beobachteten Werthes, und zwar ergibt sich die beobachtete Gewichtszunahme immer kleiner, als die berechnete. Dies rührt von der kleinen Gewichtsabnahme her, welche das Glas im Natriumamalgam ohne Stromdurchgang erleidet (§ 19). Es empfiehlt sich daher, zu diesen Versuchen dünnwandige Gläser zu benutzen, bei welchen eine verhältnissmässig grosse Stromintensität erzielt und so die nöthige Dauer des Versuches verhältnissmässig klein wird.

§ 21. Ein Apparat 4 enthielt 58,2 g Quecksilber als Kathode. Durch Aufnahme von 55—56 csg Metall war das Quecksilber in Amalgam verwandelt worden, das bei Zimmertemperatur fest war. Auch das Quecksilber eines anderen Apparates habe ich durch den Strom, nachdem der letztere eine Gewichtszunahme von 655 mg hervorgebracht hatte, in solches Amalgam verwandelt.

§ 22. Wäre das anodische Amalgam reines Natriumamalgam, bliebe bei der Electrolyse das Gewicht des Glases

genau ungeändert, und entspräche die Gewichtszunahme des Apparates genau dem Na-Aequivalent des gleichzeitig ausgeschiedenen Silbers, so wäre daraus zu schliessen, dass an die Kathode nur Natrium abgegeben wird. Da die Voraussetzungen dieses Schlusses indessen nicht ganz zu treffen, so hat Hr. Prof. Baumann auf meine Bitte eine Analyse des durch die Electrolyse aus dem kathodischen Quecksilber entstandenen Amalgams für Apparat 2 ausgeführt. Er fand in dem Amalgam keine Spur von Calcium, 0,5173 g Na und 0,00358 g K, also 7 pro Mille Kalium. In einem anderen Apparat fand er in 0,572 g Metall 0,0035 g K, also 6 pro Mille Kalium.

Bekanntlich kann man im allgemeinen aus den an den Electroden auftretenden Zersetzungsproducten keinen sicheren Schluss darauf ziehen, wie der Strom einen gemischten Electrolyten durchfliesst. In unserem Fall ist es aber wahrscheinlich, dass die in dem kathodischen Quecksilber vorgefundenen Metalle die primären Producte der Electrolyse seien. Denn wahrscheinlich theilt sich der Strom bei seinem Durchgang durch das Glas unter die verschiedenen im Glase enthaltenen kieselsauren Salze nach Maassgabe von deren Leitungsfähigkeit, durchfliesst also vorzugsweise das gut leitende Natriumsalz.

Es scheint demnach der die Leitung bedingende Electrolyt im wesentlichen Na_2SiO_3 zu sein. Denken wir uns nun diesen Electrolyten im Glase ähnlich enthalten, wie ein Salz in seinem Lösungsmittel (§ 2), so ist die Electrolyse des Glases ganz analog der einer wässerigen Lösung von $AgNO_3$; auch hier wird aus der Anode soviel Silber von dem Electrolyten herangezogen, als sich an der Kathode niederschlägt, auch hier bleibt folglich das Gewicht des Electrolyten ungeändert.

§ 23. Ich habe noch untersucht, ob die Eigenschaften des Glases durch die Electrolyse in irgend einer Weise verändert werden. Dass eine optische Veränderung bei makroskopischer Betrachtung nicht wahrzunehmen ist, wurde schon erwähnt (§ 19). Zu bemerken ist dabei, dass durch das Verweilen in dem Natriumamalgam die Oberfläche des Glases

ein etwas welliges Aussehen annimmt; dies findet aber statt, mag dabei ein Strom durch das Glas hindurchgegangen sein oder nicht.

Es hatte ferner Hr. Dr. Rüst dahier die Güte, Dünnschliffe von Ringen anzufertigen, welche zum Theil von der electrolysirten, zum Theil von der nicht electrolysirten Partie eines Glases herrührten. Sowohl im polarisirten wie im natürlichen Licht betrachtet erwies sich der Dünnschliff von innen nach aussen vollkommen homogen und durch die Electrolyse nicht verändert; dabei waren $^6/_7$ des im Glase ursprünglich vorhandenen Natriums durch Natrium aus der Anode ersetzt.

§ 24. Das der Electrolyse unterworfene Glas wird ferner an der Anodenseite nicht stärker durch siedendes Wasser angegriffen, als nicht electrolysirtes. So wurden vier in einen Kork eingesetzte Gläser bis zu derselben Höhe vier Stunden lang mit siedendem Wasser behandelt, zwei derselben waren nicht electrolysirt, zwei sechs bis sieben Stunden lang der Electrolyse unterworfen worden (es waren dies die Gläser Nr. 3 und 4 des § 19). Die beiden letzteren zeigten eine Gewichtsabnahme von 0,9 mg und 1,7 mg, die ersteren eine von 3,6 mg und 0,5 mg. Dieselben Gläser wurden $^5/_4$ Stunden lang mit Kalilauge in der Siedehitze behandelt und über Nacht in der kalten Kalilauge gelassen. Der dadurch hervorgebrachte Gewichtsverlust betrug für die electrolysirten Gläser 2,3 und 2,6, für die nicht electrolysirten 3,5 und 2,4 mg.

§ 25. Endlich habe ich untersucht, ob das Glas durch die Electrolyse eine Volumenänderung erfährt. In das zu electrolysirende Glasrohr *A*, Fig. 8, war ein zweites *I* eingeschmolzen, sodass ein Zwischenraum von etwa 1 mm zwischen den Gläsern blieb. Das erste Glas setzte sich in einen Ansatz *F* fort, der an seinem oberen Ende innen und aussen abgeschliffen war. Aussen konnte das innen abgeschliffene Gefäss *G* aufgesetzt, innen der capillar durchbohrte, aussen abgeschliffene Stopfen *S* eingesetzt werden. Mittelst des Gefässes *G* wurde der Apparat mit destillirtem Quecksilber gefüllt, das, während *G* mit der Quecksilberluftpumpe verbunden war, ausgekocht wurde. Der Apparat wurde sodann

in schmelzendes Eis gebracht, der Stöpsel S eingedrückt, sodass das Quecksilber mit dem Ende der capillaren Bohrung desselben abschnitt, und die Capacität Q in Quecksilbergewicht bei 0° durch Wägung bestimmt. Es ergab sich so Q:

anfänglich zu	114,6892 g
nach $3^1/_4$ Stunden	114,6670 „
nachdem der Apparat eine Stunde lang auf 310° erhitzt war	114,6760 „
nachdem durch das Glas A acht Stunden 40′ lang der Strom von aussen nach innen durchgeleitet worden, wobei 470 mg Kupfer im eingeschalteten Voltameter niedergeschlagen waren	114,6345 „

Alle angegebenen Zahlen sind die Mittel aus mehreren gut übereinstimmenden Versuchen.

Eine erhebliche Volumenänderung, resp. Fortschiebung der Glasmasse tritt nach diesen Versuchen durch die Electrolyse jedenfalls nicht ein; um eine sehr kleine Volumenänderung mit Sicherheit festzustellen, müsste man wegen der hier eingehenden bekannten Fehlerquellen sehr viele Versuche anstellen, was mir die Mühe nicht zu lohnen schien. Ob eine Fortschiebung des im Glase enthaltenen Na_2SiO_3 in der Glasmasse stattfindet, habe ich nicht zu ermitteln gewusst.

§ 26. Aus der Gesammtheit der über die Electrolyse des Glases angestellten Versuche scheint mir hervorzugehen, dass mit dem festen Glase bei der Electrolyse keine andere wesentliche Veränderung vor sich geht, als dass die in ihm enthaltenen Natriummolecüle durch andere ersetzt werden, ähnlich wie bei der metasomatischen Pseudomorphose.

Ich hatte etwas anderes erwartet: nämlich, dass, sowie Na an die Kathode, SiO_3 an die Anode abgegeben würde und mit dem Natrium dieser Na_2SiO_3 bildete. Wäre aber der Vorgang dieser, so wäre zu erwarten gewesen, dass das Na_2SiO_3 entweder in der Anode sich vorfände, oder, falls es am Glase haftete, eine Hülle von Na_2SiO_3 um dasselbe gebildet hätte. Eine solche Hülle würde im Wasser leicht löslich sein und sich möglicherweise im Querschnitt unter dem Mikroskop durch ein verändertes Gefüge gegen die übrige Glasmasse abheben. Die mitgetheilten Versuche (§ 23

und 24) deuten demnach auf die Bildung einer solchen Hülle nicht hin. Eine solche Hülle würde sich nur in dem Falle nicht bilden, wenn bei der Wanderung der Ionen das Anion (SiO_3) fest stehen bliebe und allein das Kation, nämlich das Natrium, durch das Glas hindurchwanderte; wenn also beim Glase das Anion im Verhältniss zum Kation ausserordentlich schwer beweglich wäre.

Diese Auffassung, von der ich nicht behaupten will, dass sie aus den Thatsachen mit Nothwendigkeit hervorgeht, scheint mir mit den allgemeinen Vorstellungen über die Wanderung der Ionen wohl vereinbar zu sein und andererseits alle über die Electrolyse des Glases beschriebenen Thatsachen zu erklären.

Die Bildung des Na_2SiO_3 an der Anode ist jedenfalls kein secundärer, sondern ein mit dem Strom direct zusammenhängender Vorgang. Denn der Durchgang des Stromes durch die Zelle Na-Amalgam | Glas Na-Amalgam ist ein umkehrbarer Vorgang; in einem solchen Fall tritt aber nach Hrn. v. Helmholtz[1]) ein bestimmter Theil der chemischen Arbeit an den Electroden als electromotorische Kraft auf.[2]) Den Unterschied eines solchen Falles von dem Fall secundärer chemischer Action an den Electroden sehe ich darin, dass bei jenem die Bewegung der Theilchen beim chemischen Process eine bestimmte mit der Stromrichtung zusammenhängende Richtung hat, bei diesem nicht. Eine ähnliche Ansicht ist schon von Faraday[3]) ausgesprochen worden. Es würden nach dieser Auffassung die Natriummolecüle der Anode bei ihrem Eintritt in das Glas sich ebenso regelmässig. d. h. in einer bestimmten mit der Stromrichtung zusammenhängenden Richtung bewegen, wie die im Glase wandernden Natriummolecüle; die electrolytische Leitung

1) v. Helmholtz, Wissensch. Abh. 2. p. 961.

2) Dieser Theil hängt nach Hrn. v. Helmholtz von der Beziehung der electromotorischen Kraft zur Temperatur ab. Die letztere Beziehung für die genannte Zelle innerhalb weiter Temperaturgrenzen festzustellen, ist im hiesigen Laboratorium Hr. Seidel beschäftigt.

3) Faraday, Exp. research. 1. § 947 u. § 962—64.

würde in diesem Fall nicht nur durch Bewegung der wägbaren Theilmolecüle des Electrolyten, sondern auch durch Bewegung wägbarer Theilchen der Anode vermittelt. Diese Auffassung rückt für mich die Thatsache, dass das Glas bei der Electrolyse völlig klar bleibt — eine Thatsache, die mich zuerst befremdete — dem Verständniss näher.

§ 27. Die in diesem Aufsatz beschriebenen Thatsachen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Bei der Electrolyse des auf etwa 300° erhitzten Kalk-Natronglases zwischen Quecksilberelectroden scheidet sich auf der Anodenseite des Glases eine schlecht leitende Kieselsäureschicht ab, welche die Intensität des Stromes in kurzer Zeit auf einen kleinen Theil ihres ursprünglichen Werthes reducirt. Diese Schicht hat eine grössere oder kleinere Dicke, je nachdem eine grössere oder kleinere electromotorische Kraft bestimmte Zeit hindurch im Kreise gewirkt hat. Sie gibt sich dem Auge durch die Farben dünner Blättchen zu erkennen, reducirt in der Kälte die Oberflächenleitung des Glases auf einen äusserst kleinen Bruchtheil ihres Werthes und wirkt in der Hitze, wenn die Glasmasse leitend ist, wie das Dielectricum eines Condensators, dessen Belegungen die leitende Glasmasse und das Quecksilber der Anode repräsentiren. Die Capacität dieses Condensators ergab sich unabhängig von der Potentialdifferenz der Belegungen, wenn dieselbe zwischen 1 und 20 B.-E. variirte, ferner für das Quadratcentimeter bei den benutzten Gläsern, je nachdem die Schicht durch eine Kette von 30 oder 15 mehrere Stunden lang wirkenden Bunsen'schen Elementen bei 300° erzeugt war, zu 0,021 oder 0,041 Mikrofarad.

Die Bildung dieser Schicht und damit die Stromschwächung wird vermieden, wenn man Natriumamalgam als Anode verwendet; das Resultat der Electrolyse kann dann quantitativ festgestellt werden. Bei dieser wird dieselbe Natriummenge an die Kathode abgegeben und von der Anode aufgenommen, sodass das Gewicht des Glases sich nicht ändert; jene Natriummenge ist chemisch äquivalent der Silbermenge, welche im eingeschalteten Silbervoltameter gleichzeitig nieder-

geschlagen wird. Das Glas bleibt bei der Electrolyse vollkommen klar, und es ergaben sich überhaupt alle untersuchten Eigenschaften des Glases durch die Electrolyse nicht merklich geändert.

Freiburg i. B., im Januar 1884.

VI. *Ueber die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes für Electrolyte; von Emil Cohn.*

Einleitung.

Mit den mannigfaltigsten Hülfsmitteln und in den verschiedensten Richtungen hat man stets auf's neue versucht, Grenzen für die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes aufzufinden. Die grosse Zahl der hierauf zielenden Untersuchungen scheidet sich leicht in wenige Gruppen.

1) Das Ohm'sche Gesetz negirt eine Trägheit dessen, was im electrischen Strome bewegt wird; es setzt die Intensität des Stromes in jedem Moment proportional der in diesem Moment wirkenden electromotorischen Kraft. In dieser Richtung erleidet das Gesetz für Ströme von veränderlicher Intensität zwei scheinbare Ausnahmen. Beschränken wir uns auf einen linearen unverzweigten Stromkreis, so gilt das Gesetz nicht mehr, sofern dem Leiter oder einzelnen Theilen desselben eine merkliche electrostatische Capacität zukommt. Wir haben dann, um mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bleiben, neue electromotorische Kräfte einzuführen, die nicht den augenblicklichen Stromintensitäten, sondern den Zeitintegralen derselben proportional sind. Diese Verhältnisse finden ihren einfachsten Ausdruck in der Faraday'schen Anschauung, nach welcher die Ladung der Oberfläche eines Leiters nur eine besondere Form der Strömung — die „electrische Verschiebung" durch das Dielectricum hindurch — ist. Wir haben dann eben keinen einfachen Stromkreis, sondern eine Verzweigung vor uns.

Wir müssen ferner in Rechnung ziehen die Induction des Leiters auf sich selbst, d. h. electromotorische Kräfte, die statt der Intensität deren zeitlicher Variation proportional sind. Die Grösse dieser Kräfte lässt sich aus der Form des Leiters berechnen. Wie Abweichungen der so berechneten von den beobachteten electromotorischen Kräften zu einer Bestimmung der „Masse" der Electricität führen würden, hat zuerst Wilhem Weber[1]) dargelegt. Versuche von Hertz[2]), solche Abweichungen experimentell nachzuweisen, haben zu einem negativen Resultat geführt.[3])

2) Das Ohm'sche Gesetz behauptet, dass in allen Punkten eines unverzweigten Leiters im gleichen Moment die gleiche Stromintensität herrscht. Die Bedingung, dass die Leitung unverzweigt sei, ist hier in derselben strengen — oder, wenn man will, erweiterten Bedeutung zu nehmen, wie unter 1. Dann aber ist auch in dieser Richtung eine Verletzung des Ohm'schen Gesetzes bisher nicht nachgewiesen. Kirchhoff[4]) und W. Weber[5]) haben gezeigt, unter welchen Verhältnissen im geschlossenen Kreise eine „Fortpflanzungsgeschwindigkeit" der Electricität in Uebereinstimmung mit dem Ohm'schen Gesetz zu constatiren sein würde; Weber hat aber gleichzeitig bemerkt[6]), dass diese Fälle thatsächlich der Beobachtung kaum noch zugänglich sind. Alle Versuche — als deren Prototyp der bekannte Wheatstone'sche gelten kann —, bei welchen nach der Ansicht ihrer Urheber eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit gemessen wurde, bestimmen in Wahrheit nur die Zeit, in welcher gewisse Theile einer Leitung zu bestimmten — je nach der Empfindlichkeit des Beobachtungsmittels sehr verschiedenen — Potentialen geladen waren. Dem entsprechend variiren denn auch die er-

1) Wilhelm Weber, Electrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über electrische Schwingungen. Abhandlungen der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften **6.** p. 710 ff. 1864.

2) Hertz, Wied. Ann. **10.** p. 414. 1880.

3) Siehe auch eine zweite Arbeit von Hertz, Wied. Ann. **14.** p. 581. 1881.

4) Kirchhoff, Pogg. Ann. **100.** p. 193. 1857.

5) W. Weber, l. c. p. 620 ff.

6) W. Weber, l. c. p. 634 und 642.

haltenen Resultate selbst in der Grössenordnung. Dies ist bezüglich der älteren Versuche[1]) wohl allgemein anerkannt. Die neuesten Versuche dieser Art[2]) erheben zwar ausdrücklich den Anspruch, von diesem Einwand nicht getroffen zu werden. Indess ist die Darstellung gerade an der entscheidenden Stelle[3]), so knapp, dass es meines Erachtens für den Leser nicht möglich ist, ein Urtheil für oder gegen zu gewinnen. — Versuche darüber, ob in einer sehr langen metallischen Leitung bei schnellem Wechsel der Stromrichtung Phasendifferenzen nachzuweisen seien, sind von W. Weber ausgeführt[4]) — mit dem von ihm theoretisch vorhergesagten negativen Erfolg.[5])

3) Das Ohm'sche Gesetz sagt aus, dass für jeden Leiter der Quotient aus der Potentialdifferenz zwischen zwei Niveauflächen und der Intensität eine Constante, der Widerstand, sei — vorausgesetzt, dass in dem betrachteten Leiter selbst keine electromotorische Kraft ihren Sitz habe. Für Ströme von wechselnder Intensität treten wieder die unter 1) aufgeführten Bedingungen hinzu. Zu diesem Satz steht das Verhalten der Electrolyte in Widerspruch, solange man die vom Strome selbst hervorgerufene electromotorische Kraft der Polarisation ausser acht lässt. Diese Kraft aber hat für den stationären Strom nichts Hypothetisches; denn sie lässt sich durch den Depolarisationsstrom direct nachweisen. Führt man sie auch bei der Betrachtung der — mit mässiger Geschwindigkeit wechselnden — Inductionsströme ein, so ordnet sich, wie F. Kohlrausch[6]) gezeigt hat, auch deren Verlauf dem Ohm'schen Gesetz unter.

Zwei Ausnahmen aber bleiben hier nach dem gegen-

1) Siehe eine Zusammenstellung bei G. Wiedemann, Lehre von der Electricität § 411 ff.

2) W. Siemens, Pogg. Ann. **157.** p. 309. 1857.

3) W. Siemens, l. c. p. 320.

4) W. Weber, l. c. p. 682 ff.

5) Aehnliche Versuche, die ich selbst vor Beginn der vorliegenden Untersuchung zur Orientirung angestellt habe, erlaube ich mir im Anhange kurz mitzutheilen, obschon die Resultate für die Mehrzahl der Leser nichts Auffälliges haben mögen.

6) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **138.** p. 280. 1869; **148.** p. 143. 1873.

wärtigen Stande unserer Kenntnisse bestehen. Die eine betrifft (abgesehen von der Leitung durch Gase) jene von F. Braun[1]) eingehend untersuchte Classe von Körpern, zu der u. a. Psilomelan, Schwefelkies, Kupferkies gehören. Für diese Körper ist der (gemäss der obigen Definition gemessene) Widerstand abhängig von der Richtung, der Intensität, der Dauer, dem zeitlichen Verlauf des Stromes. Es ist bisher Braun so wenig, wie denjenigen, die seine Versuche wiederholten, gelungen, die sehr verwickelten Erscheinungen irgend welchen zusammenfassenden Gesetzen unterzuordnen, ja auch nur dieselben untereinander durch empirische Regeln in Verbindung zu setzen. Wir stehen hier also vor einem unvollständig erforschten Gebiet vielmehr, als vor einer Verletzung sonst wohlbegründeter Gesetze.

Die zweite Ausnahme bezieht sich auf Electrolyte. Ich gehe auf die diesbezüglichen Beobachtungen von Herwig[2]) nicht ein, die anscheinend durch die Polarisation der Electroden ihre Erklärung finden, jedenfalls aber für eine genaue Discussion der nöthigen Schärfe entbehren.

Anders verhält es sich mit einem letzten Angriff auf die Allgemeingültigkeit des Ohm'schen Gesetzes. Oberbeck[3]) hat zwei Electrolyte, verdünnte Schwefelsäure und Lösung von Kupfersulfat, auf ihr Verhalten gegen Ströme untersucht, die ihre Richtung mit ausserordentlicher Geschwindigkeit ändern, und kommt auf Grund messender Versuche zu dem Resultat, dass für beide Flüssigkeiten der Widerstand sinkt mit zunehmender Geschwindigkeit des Stromwechsels. Das Verhältniss der extremen Werthe ist grösser, als 5 : 1.

Ich beabsichtige, im Folgenden durch Rechnung und durch Beobachtung den Nachweis zu führen, dass auch diese Abweichung vom Ohm'schen Gesetz in Wahrheit nicht existirt.

---

1) F. Braun, Pogg. Ann. **153.** p. 556. 1874; Wied. Ann. **1.** p. 95 1877. **4.** 476. 1878; **19.** p. 340. 1883.

2) Herwig, Pogg. Ann. **159.** p. 61. 1876.

3) Oberbeck, Wied. Ann. **6.** p. 210. 1879.

Die Versuche Oberbeck's.

Oberbeck benutzt die „electrischen Schwingungen", die in einem ungeschlossenen Leiterkreise unter Voraussetzung einer bestimmten Beziehung zwischen Widerstand, Eigenpotential und electrostatischer Capacität entstehen, wenn in ihm durch Oeffnen eines benachbarten Stromes ein Inductionsstoss erregt wird. Seine Anordnung ist durch Fig. 1 veranschaulicht, die bis auf rein äusserliche Abweichungen eine Copie der von Oberbeck[1]) gegebenen ist. AB stellt eine Spirale (die zu inducirende) dar. Ihr kommt ein Widerstand w, ein electrodynamisches Potential p und — worauf Helmholtz zuerst aufmerksam gemacht hat — eine Capacität c_1 zu. Die letztere ist durch den Condensator c_1 symbolisch angedeutet. x ist der Flüssigkeitswiderstand (alle übrigen in der Anordnung enthaltenen Leiter, insbesondere auch die Zuleitung zum Electrometer, haben verschwindenden Widerstand), K ein Condensator von kleiner Capacität, die mit c_1 vergleichbar ist. Die beiden Belegungen von K sind beziehungsweise mit dem Electrometer und der Erde verbunden. — In diesem Kreise wird ein Inductionsstoss erregt, indem eine zweite, von AB umschlossene Spirale geöffnet wird, die ein schwacher Strom durchfliesst. Nach einer sehr kurzen, genau — d. h. bis auf ca. ein Milliontel Secunde — messbaren Zeit wird die Leitung zum Electrometer unterbrochen. Dies leistet ein von Helmholtz angegebener Pendelapparat, indem er nacheinander zwei Contacthebel zurückwirft, von denen der eine mikrometrisch verstellbar ist. Die genaue Beschreibung des Apparates ist in einer Arbeit von Schiller[2]) enthalten, in der die gleiche Methode zu einer Reihe verschiedenartigster Maassbestimmungen benutzt ist.

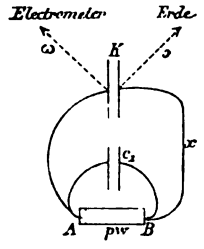


Fig. 1.

Unter den von Oberbeck eingehaltenen Bedingungen

1) Oberbeck, Wied. Ann. 6. Taf. IV. Fig. 1. 1879.
2) Schiller, Pogg. Ann. 152. p. 535. 1874.

entstehen nun im inducirten Kreise electrische Ströme, die ihre Richtung mit grosser Geschwindigkeit, 6000 bis 24000 mal in der Secunde, wechseln und die nicht abgeleitete Belegung von K abwechselnd positiv und negativ laden. Das Electrometer zeigt das Potential ω an, das dieselbe im Moment der Lostrennung besass, und man ist somit im Stande, den zeitlichen Verlauf der electrischen Schwingungen genau zu verfolgen, insbesondere ihre Periode und die Abnahme ihrer Maximalamplitude zu messen. Oberbeck verändert nun die Capacität K und den Widerstand x und leitet aus den Beobachtungen den Werth des letzteren in einem willkürlichen Maasse ab. Er berücksichtigt bei Aufstellung seiner Gleichungen sowohl die Polarisation der Electroden, wie auch das Leitungsvermögen der Zwischenschichten des Condensators und der Spirale. Die Polarisation erweist sich durch die Beobachtungen als unmerklich; die Leitung der Zwischenschichten hat, wie schon Schiller nachgewiesen hatte, einen bedeutenden Einfluss. Ich werde jedoch, da sie für das Princip der Rechnung gleichgültig ist, auch sie im Interesse der Uebersichtlichkeit ausser Betracht lassen. — Mit diesen Vereinfachungen ist der Ansatz Oberbeck's, der zur Berechnung der nach Fig. 1 angeordneten Versuche dient, der folgende[1]):

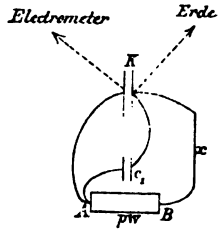


Fig. 2.

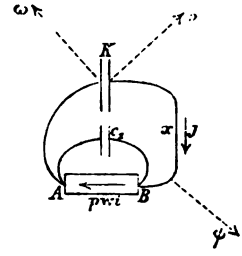


Fig. 3.

$$p\frac{\partial i}{\partial t} + (w + x)\, i + \omega = 0, \tag{1}$$

$$i = c_2 \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \text{wo } c_2 = c_1 + K. \tag{2}$$

1) Oberbeck, l. c. p. 217 und 218.

Dieser Ansatz entspricht nun aber den thatsächlichen Verhältnissen nicht; er stellt vielmehr die Vorgänge in einem Leiterkreise dar, der gemäss dem Schema der Fig. 2 angeordnet ist.

Bei dem Schema der Fig. 1 haben wir in B eine Verzweigung; und der correcte Ansatz wäre, wenn die Intensität in der Spirale mit i, in x aber mit j, und das Potential in B mit ψ bezeichnet wird (siehe Fig. 3):

$$(3)\qquad \begin{cases} wi + xj + p\frac{\partial i}{\partial t} + \omega = 0, \qquad xj + \psi = 0, \\ j = K\frac{\partial \omega}{\partial t}, \qquad j - i = c_1\frac{\partial(\psi - \omega)}{\partial t}. \end{cases}$$

Derselbe fällt mit demjenigen Oberbeck's zusammen nur für den Fall $x = 0$, d. h. für die Beobachtungen ohne Flüssigkeitswiderstand. — Der Gegensatz zwischen beiden aber tritt am auffälligsten hervor für $K = 0$, d. h. für den von Oberbeck ebenfalls benutzten Fall, wo ein besonderer Condensator dem Stromkreise nicht eingefügt ist. Die Anordnung vereinfacht sich dann zu dem Schema Fig. 4,

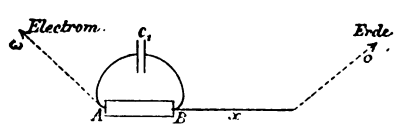


Fig. 4.

und man ersieht, übereinstimmend aus der Figur, wie aus den Gleichungen (3), dass die Grösse des Widerstandes x für die Strömung im Kreise c_1AB ohne jeden Einfluss ist. — Das würde zweifellos auch der Versuch ergeben, wenn er sich in dieser Form überhaupt realisiren liesse. Thatsächlich aber ist der Condensator K stets vorhanden: er wird gebildet von den mit A verbundenen Theilen des Elecmeters einerseits und dem zur Erde abgeleiteten Mantel desselben andererseits. Die Capacität des Electrometers addirt sich allgemein zu K und machte es in dem speciellen Falle der Fig. 4 überhaupt erst möglich, dass Oberbeck einen Einfluss der Flüssigkeitswiderstände auf den Ablauf der Schwingungen fand.

Ein Versuch, die Beobachtungsresultate Oberbeck's mit Hülfe des richtigen Ansatzes der Gleichungen (3) zu

interpretiren, stösst auf Hindernisse. Löst man dieselben nach ω auf, so erhält man eine lineare und homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Dieselbe kann für ω Schwingungen ergeben, und Oberbeck's Versuche zeigen, dass diese thatsächlich eintraten. Dann ist aber ω nothwendig von der Form:

$$\omega = Ae^{-\lambda t} + Be^{-\mu t}\sin\left(\frac{\pi t}{T} + \delta\right). \tag{4}$$

Diese Schwingungen haben also keine constante Schwingungsdauer und kein constantes Decrement. Wenn Oberbeck trotzdem beide Grössen constant fand, so beweist das, dass das erste Glied im Ausdruck für ω verschwindend klein war oder in kürzester Zeit verschwindend klein wurde. Dass letzteres in der That der Fall sein musste, sieht man leicht ein: alle Coëfficienten der Differentialgleichung sind positiv; der Coëfficient von $\partial^3\omega/\partial t^3$ wird: pc_1Kx; derselbe ist, wie sich aus den von Oberbeck mitgetheilten Zahlen[1]) ersehen lässt, sehr klein gegen die übrigen Coëfficienten; folglich wird die eine reelle Wurzel der Gleichung dritten Grades, welche die Exponenten bestimmt, negativ und sehr gross; diese ist aber das $-\lambda$ der Gleichung (4).

Die Erscheinungen werden also im ganzen so verlaufen, wie sie das Integral Oberbeck's darstellt; die Constanten des letzteren aber haben eine andere Bedeutung, als Oberbeck ihnen beilegt, und um aus denselben die Widerstände x auch nur angenähert berechnen zu können, müsste man die Capacität des Electrometers kennen. Man kann sich nur qualitativ überzeugen, dass die von Oberbeck für verschiedene Schwingungszahlen gefundenen Werthe der Flüssigkeitswiderstände sich bei geänderter Berechnungsweise einander nähern müssen.

Dagegen gestattet eine leichte Abänderung der von Oberbeck benutzten Methode, die gestellte Frage in directer Weise zu beantworten.

---

1) Oberbeck, l. c. p. 235.

Methode.

Unter den Gleichungen (3) ist die zweite:

$$xj = -\psi,$$

der unmittelbare Ausdruck des Ohm'schen Gesetzes für den Leiter x. Zerfällt derselbe in die Theile y und z (siehe Fig. 5), die beide frei von Selbstinduction und ohne merkliche Capacität sind, so haben wir:

$$(5) \qquad yj = -\varphi, \qquad (y+z)j = -\psi.$$

Es lässt sich nun erstens prüfen, ob φ und ψ gleichzeitig Null werden, d. h. ob der Strom j den Widerstand z ohne Phasenverzögerung durchsetzt. Ist dies der Fall, so ist zweitens zu entscheiden, ob ψ zu φ in einem constanten — von der Schwingungszahl unabhängigen — Verhältniss steht, und ob dieses Verhältniss gleich dem in gewöhnlicher Weise gemessenen Verhältniss der Widerstände $(y+z)/y$ ist. Beantwortet der Versuch beide Fragen mit ja, so ist für den vorliegenden Fall das Ohm'sche Gesetz in Gültigkeit.

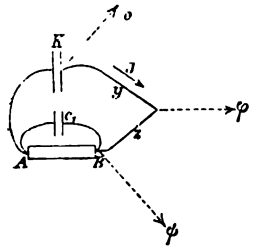


Fig. 5.

Hier ist zunächst einem Einwande zu begegnen. Das Schema der Fig. 5 lässt sich in aller Strenge ebensowenig realisiren, wie der Fall $K = 0$ bei Oberbeck's Versuchen; das Electrometer bildet stets eine Verzweigung, wie es die Figuren 6_a und 6_b andeuten.

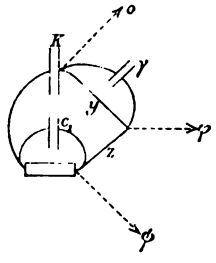


Fig. 6_a.

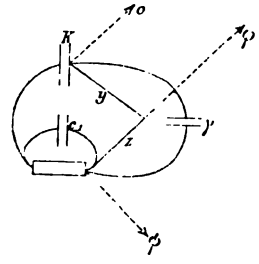


Fig. 6_b.

Hieraus erwuchs jedoch kein merklicher Fehler, wie aus Folgendem erhellt: y und z waren in meinen Versuchen je ca. 1600 S.-E. = ca. $15 \cdot 10^{11} \frac{cm}{sec}$, die Capacität des Electrometers wurde in später zu besprechender Weise bestimmt: $\gamma = 3{,}38 \cdot 10^{-19} \frac{sec^2}{cm}$. Es wurde

nun ein zweiter Condensator von gleicher Capacität γ hergestellt aus einem mit Schellack überzogenen, aussen mit Stanniol beklebten und theilweise mit Quecksilber gefüllten Reagensglas. Dieser wurde mittelst eines Commutators dem Stromkreise derartig angefügt, dass er mit dem Electrometer den Platz wechselte, sodass die Anordnung nunmehr die der Fig. 7 war, und der Stromkreis stets in derselben Weise gebildet war, das Electrometer mochte sich in φ oder in ψ befinden. Dann ergab die Beobachtung Folgendes: das Potential φ liess sich mit einer Annäherung, die für die augenblicklich in Frage stehende Correctionsrechnung jedenfalls ausreicht, darstellen durch die Gleichung:

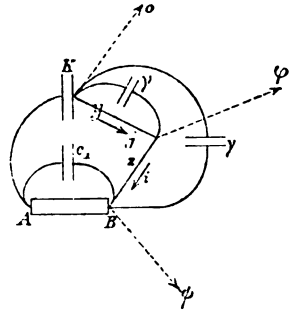


Fig. 7.

$$(6) \qquad \varphi = A e^{-\mu t} \cos \frac{\pi t}{T}.$$

Hierin war $\mu =$ ca. 6000 sec^{-1}, T in den verschiedenen Versuchsreihen:

$$97.10^{-6};\ 68.10^{-6};\ 39.10^{-6} \text{ sec.}$$

Wir haben nun (siehe Fig. 7) zwischen φ und ψ die Beziehungen:

$$(7) \qquad yj = -\varphi,\ yj + zi = -\psi,\ j - i = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von (6):

$$(8) \begin{cases} \varphi = y.a.e^{-\mu t} \cos \frac{\pi t}{T}, \quad \psi = (y+z).\varkappa.a.e^{-\mu t} \cos \frac{\pi}{T}(t+\delta). \\ \text{wo: } \varkappa^2 = \left(1 - \frac{\gamma y z \mu}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{\gamma y z \frac{\pi}{T}}{y+z}\right)^2, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{T}\delta = \frac{\gamma y z \frac{\pi}{T}}{y+z-\gamma y z \mu}. \end{cases}$$

Die numerische Ausrechnung ergibt:

$$\varkappa = 1 - 0{,}0015, \quad \delta = 0{,}25 \frac{\text{sec}}{10^6}.$$

Die Widerstände liessen sich bestimmen bis auf ein Procent, die Phasen bis auf ein Milliontel Secunde. Es reichen also

innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Methode die einfacheren Formeln (5) völlig aus.

Nach dem Schema der Fig. 7 wurden alle Vergleichungen der Phasen ausgeführt.

Auch die Vergleichungen der Widerstände geschahen zunächst mit dieser Anordnung. Man erhält aber auf diese Weise bei der Messung von φ und von ψ nothwendig Ausschläge von sehr verschiedener Grösse, und die Ermittelung des Verhältnisses beider Potentiale hängt von der Calibrirung des Electrometers ab. Es zeigte sich nun, dass sich diese nicht leicht mit derselben Genauigkeit vornehmen liess, die die Beobachtungen im übrigen besassen. Die definitiven Messungen der Widerstände wurden daher an einer etwas veränderten Anordnung vorgenommen. Das Electrometer blieb (Fig. 8) dauernd mit dem Punkt E der Leitung verbunden; die Widerstände y und z aber wurden commutirt, sodass abwechselnd D und C zur Erde abgeleitet (und entsprechend C oder D mit dem Punkt B in Verbindung) war. Hier ist nun zwar der Stromkreis nicht in beiden Fällen in genau derselben Weise gebildet. Indessen überzeugt man sich leicht durch eine der obigen ähnliche Rechnung, dass der ins Electrometer abfliessende Zweigstrom einen kaum wahrnembaren Einfluss auf die Strömung hat. Andererseits aber würde dieser Zweigstrom auch bei beliebiger Stärke in aller Strenge irrelevant sein, wenn die Widerstände y und z genau gleich wären. Dieselben weichen thatsächlich in den ungünstigsten Fällen nur um 5 Proc. voneinander ab. Es gibt also das Verhältniss der in beiden Fällen in E gemessenen, einander nahe gleichen Potentiale das genaue Verhältniss der Widerstände. Jenes Verhältniss aber hängt nur noch in sehr geringem Grade von der Auswerthung des Electrometers ab. (Uebrigens ergab eine Beobachtungsreihe, die mit der ersten Anordnung (Fig. 7) ausgeführt wurde, Resultate, die mit den definitiven Messungen in völliger Uebereinstimmung waren.)

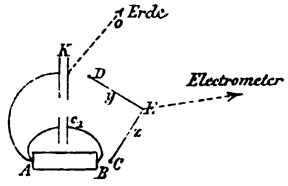


Fig. 8.

Apparate.

Die im Vorstehenden besprochenen Messungen wurden vorgenommen an denselben beiden Flüssigkeiten, die zu den Versuchen Oberbeck's gedient hatten, nämlich a) an einer 19 cm langen Säule ca. 5 procentiger Schwefelsäure zwischen platinirten Platinblechen von je 15 qcm Fläche; b) an einer Säule concentrirter Kupfervitriollösung zwischen Kupferelectroden. Beide hatten einen Widerstand von ca. 1600 S.-E. Die Flüssigkeit bildete den Widerstand z der Figuren 7 und 8. Er wurde verglichen mit einem nahe gleichen metallischen Widerstand y.

Der letztere durfte nicht aus Draht hergestellt sein; denn wenn für einen solchen sich auch die Selbstinduction durch „bifilare" Wicklung auf ein Minimum herabdrücken lässt, so wird er doch stets eine merkliche electrostatische Capacität besitzen und somit die Bedingungen der Aufgabe nicht erfüllen. Denselben genügte dagegen vollkommen ein Widerstand, der durch Auftragen von Bleistiftgraphit auf mattes Glas sich in bequemster Weise herstellen liess.[1]) Man gleicht denselben schnell und sicher ab, indem man die Electroden (zwei Metallzwingen) zunächst so anschraubt, dass der Widerstand zwischen ihnen zu klein ist, und dann denselben durch Abwischen des Graphits — zunächst an den Stellen grösserer Stromdichte, schliesslich zur feineren Justirung an den äussersten Rändern — allmählich erhöht. Der Widerstand von 1600 S.-E. hatte eine Fläche von ca. 2 qcm. Ich hatte zuerst geglaubt, seine Constanz durch einen vor zufälliger Berührung schützenden Ueberzug sichern zu sollen, und mehrere solcher Graphitwiderstände theils mit Paraffin, theils mit einer Mischung aus Wachs und Colophonium übergossen. Das erwies sich jedoch als ungünstig: durch eine Reihe von Tagen fortgesetzte Messungen ergaben ein stetiges Wachsen der Widerstände; jedenfalls lösten sich infolge von Temperaturänderungen stets neue Theile des Ueberzuges vom Glase ab und nahmen den anhaftenden Graphit mit. Die schliesslich benutzte Platte wurde unbedeckt, mit der belegten

1) Siehe auch Phillips, Phil. Mag. (4) **40**. p. 41. 1870.

Seite nach unten, in einem Kästchen festgekittet. Der Widerstand derselben erwies sich von völlig genügender Constanz; denn seine Schwankungen wurden verdeckt von denen, die in der Flüssigkeit durch unvermeidliche Temperaturänderungen hervorgerufen wurden.

Die Widerstände y und z wurden stets in möglichst schneller Folge 1) mit dem Electrodynamometer, 2) nach der oben dargelegten Methode am Electrometer, 3) wieder mit dem Dynamometer verglichen. — Die Abweichungen zwischen 1) und 3), durch zeitliche Aenderungen hervorgerufen, lagen stets innerhalb eines Procentes, und da die Genauigkeit der electrometrischen Messungen nicht weiter ging, hätte es keinen Zweck gehabt, dieselben mittelst Feststellung der Temperaturcoëfficienten zu corrigiren.

Zu den dynamometrischen Messungen diente ein kleines Inductorium von Hartmann mit massivem Eisenkern, getrieben durch drei Leclanché-Elemente, ein Weber'sches Dynamometer und ein Siemens'scher Universalrheostat. Sie geschahen nach der Methode der Wheatstone'schen Verzweigung. Durch Commutiren von y und z am Anfang und Schluss jeder längeren Messungsreihe überzeugte ich mich von der unverändert richtigen Anordnung der Brücke und des Dynamometers. Gemäss einer Schätzung der Tonhöhe unterbrach der Hammer des Inductoriums ca. 50 mal in der Secunde.

Die am Electrometer zu beobachtenden Schwingungen wurden hervorgerufen mittelst der beiden Rollen eines Helmholtz'schen Schlitteninductoriums, aus dem der Eisenkern entfernt war. Durch die primäre Spirale desselben und einen Ballastwiderstand von 10 S.-E. floss der Strom eines Leclanché-Elementes; er führte durch den verstellbaren Hebel des Pendelunterbrechers, der beim Fallen des Pendels zuerst getroffen wurde.

Die secundäre Spirale ist die Rolle AB der Figuren 7 und 8.

Der Condensator K wurde gebildet durch ein oder zwei Reagensgläser, mit Stanniol beklebt und mit Quecksilber

gefüllt. Ich habe drei Condensatoren benutzt; ihnen entsprachen electrische Schwingungen von resp. der Periode:

34; 59,5; 85

in Scalentheilen der Trommel der Mikrometerschraube, welche den beweglichen Contacthebel regulirt.

Das Electrometer war ein Mascart'sches; doch war der dicke Draht, der bei demselben die Verbindung der Nadel mit der Schwefelsäure vermittelt, durch einen sehr feinen Platindraht ersetzt. Erst nach dieser Aenderung war das Instrument zu genauen Messungen brauchbar; vorher zeigte die Nadel stets Neigung zum „Kriechen". Die Nadel war mittelst einer Zamboni'schen Säule geladen; das eine Quadrantenpaar wurde mit dem Punkt, dessen Potential gemessen werden sollte, verbunden, während das andere Quadrantenpaar und der Mantel des Instrumentes zur Erde abgeleitet waren. Der vom Contacthebel zum Electrometer führende Draht war zum Schutz gegen statische Induction mit einem zur Erde abgeleiteten Bleirohr umgeben.

Hülfsmessungen.

Um die Angaben des Electrometers auf Grössen zu reduciren, die den Potentialwerthen proportional waren, musste dasselbe empirisch graduirt werden. Das geschah in bekannter Weise mittelst einer vom Stromkreise dreier Leclanché-Elemente genommenen Abzweigung. Da bei den Versuchen das Electrometer nicht mit Electricitätsquellen von constantem Potentialwerth in Verbindung stand, vielmehr die Wirkung begrenzter Electricitätsmengen zu beobachten war, so empfahl es sich, zur Messung die ersten Ausschläge zu benutzen. Mittelst solcher musste daher auch die Auswerthung vorgenommen werden. Man würde aber zu ganz falschen Resultaten gelangen, wenn man einfach, während die Nadel in Ruhe ist, das Quadrantenpaar plötzlich auf ein bestimmtes Potential laden und den ersten Schwingungsbogen der Nadel beobachten wollte. Dieser Schwingungsbogen wird nämlich geändert, wenn man, ehe die Nadel ihn völlig zurückgelegt hat, die Leitung zum Electrometer unterbricht; er wird um so kleiner, je früher die Unterbrechung erfolgt.

Diese Verminderung des Ausschlages wird — sofern man nicht nach einem sehr kleinen Bruchtheil einer Secunde unterbricht — nicht etwa durch eine unvollständige Ladung veranlasst. Davon überzeugt man sich in folgender Weise: man lade das Quadrantenpaar zu einem bestimmten Potential; man leite es dann für kurze Zeit zur Erde ab, isolire es aber wieder, ehe die Nadel zur Ruhe gekommen ist. Dann wird sie nicht in der Nullstellung zur Ruhe kommen, sondern auf derjenigen Seite derselben, auf der sie sich befand, als die Quadranten wieder isolirt wurden. Die Ursache dieser Erscheinung ist, dass die Capacität der Quadranten von der Stellung der Nadel abhängt, die vermöge ihrer hohen Ladung beträchtliche Influenzwirkung übt. Die Capacität der Quadranten ist um so grösser, ein je grösserer Theil der Nadel von ihnen bedeckt wird.[1]) Bei den eigentlichen Versuchen nun wurde das Electrometer stets isolirt in einem Moment, wo sich die Nadel in der Ruhelage befand. In gleicher Weise musste also auch bei der Auswerthung des Instrumentes verfahren werden. Dazu diente der Pendelunterbrecher selbst. Die Verbindungen wurden in leicht ersichtlicher Weise so getroffen, dass das Electrometer durch Aufschlagen des ersten Hebels mit einer Electricitätsquelle von bekanntem Potential verbunden, durch Oeffnen des zweiten aber isolirt wurde. Die Stellung der Hebel gegeneinander war so zu reguliren, dass die Zwischenzeit genügte, das Electrometer vollständig zu laden, indess andererseits während derselben die Nadel noch nicht merklich aus der Ruhelage ausgewichen war. Beiden Bedingungen genügte ein Zeitintervall von der Grössenordnung einer tausendstel Secunde. In dieser Weise auf das Electrometer einwirkend, gab ein Leclanché-Element einen Ausschlag von ca. 170 Scalentheilen bei einer Entfernung von 1700 Scalentheilen zwischen Spiegel und Scala. Diese Empfindlichkeit unterlag kleinen Schwankungen, die indessen so langsam verliefen, dass die Beobachtungen nicht darunter litten.

Es war ferner die gemäss dem Vorstehenden genauer definirte Capacität des Electrometers zu messen, um sie in

1) Siehe auch Boltzmann, Wien. Ber. 67. p. 33 ff. 1873.

die Fehlerrechnung (s. p. 654 f.) einführen zu können. Das geschah durch Vergleichung mit einem Plattencondensator nach folgender Methode. Die beiden Belegungen eines Condensators von der Capacität γ seien anfänglich zur Erde abgeleitet; die eine bleibe dauernd in dieser Verbindung, die andere werde in einem gegebenen Moment, den wir zum Anfangspunkt der Zeitrechnung wählen, mit einer Electricitätsquelle von constantem Potential E durch Vermittelung eines Widerstandes w verbunden; dann ist das Potential p auf der isolirten Belegung des Condensators zur Zeit t:

$$p = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\gamma w}}\right). \tag{9}$$

Geschieht dasselbe mit einem zweiten Condensator von der Capacität $c + \gamma$, und nennen wir das Potential auf demselben zur Zeit T: P, so haben wir:

$$P = E\left(1 - e^{-\frac{T}{(c+\gamma)w}}\right). \tag{9'}$$

Bezeichnen wir mit q den constanten Quotienten:

$$\frac{\log \frac{E}{E-p}}{t} = q \quad \text{und ebenso} \quad \frac{\log \frac{E}{E-P}}{T} = Q, \tag{10}$$

so haben wir also:

$$\frac{\gamma + c}{\gamma} = \frac{q}{Q}. \tag{11}$$

Die Ausführung gestaltete sich folgendermassen (siehe Fig. 9): zwei Leclanché-Elemente (LL) waren geschlossen durch einen Graphitwiderstand $w = 123\,000$ S.-E. und durch den beweglichen Contacthebel des Pendelunterbrechers (bei u_1). Der direct zu u_1 führende Pol der Batterie war zur Erde abgeleitet; von der anderen Seite von u_1 führte eine kurze Drahtleitung über die feste Unterbrechungsstelle u_2 zum Electrometer. (Letzteres ist in der Figur schematisch als Condensator γ gezeichnet). Die Mikrometerschraube bei u_1 misst die Zeiten t; dieselben sind zu zählen von der Stellung der Schraube, bei welcher u_1 und u_2 gleichzeitig

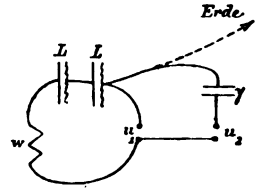


Fig. 9.

geöffnet werden. — Ich gebe die erste Beobachtungsreihe vollständig, um ein Urtheil über die Leistungsfähigkeit der Methode zu ermöglichen. Die erste Spalte enthält die Ablesungen τ an der Mikrometerschraube; dem Nullpunkt der Zeitrechnung entsprach die Ablesung $\tau_0 = 330$. Die zweite Spalte enthält die gemäss der Graduirung corrigirten Ausschläge des Electrometers p; die dritte die Constante q.

τ	p	q
335	47,6	0,0135
40	76,5	0,0115
50	140,7	0,0122
60	181,7	0,0117
70	227,0	0,0128
80	251,2	0,0127
400	280,1	0,0120
20	302,6	0,0125
50	314,5	0,0117
1000	327,3 = E.	

Als Werth von q wurde das Mittel der mittleren Gruppe von fünf Werthen:

$$q = 0{,}0123$$

genommen; die beiden ersten Beobachtungen wurden fortgelassen, weil sie durch eine ungenaue Bestimmung von τ_0 zu stark beeinflusst werden, die beiden letzten wegen der zu kleinen Werthe von $E - p$. — Alternirend mit den obigen Beobachtungen wurden nun die einer zweiten Reihe gemacht, bei welcher neben γ ein Plattencondensator c geschaltet war, wie es Fig 10 zeigt.[1])

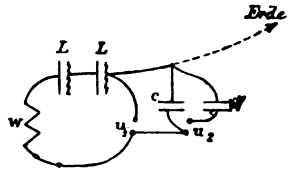


Fig. 10.

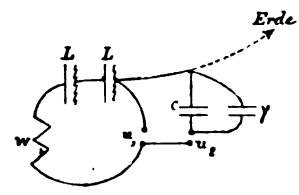


Fig. 11.

1) Die Anordnung durfte nicht nach dem Schema der Fig. 11 getroffen werden; in diesem Fall wird nämlich die Capacität γ durch das Ausschlagen der Nadel in höherem Maasse beeinflusst, als die des com-

c wurde gebildet durch zwei kreisrunde Messingscheiben von 19,95 cm Durchmesser, die bei einer Versuchsreihe durch drei kleine Glasstücke in einem gegenseitigen Abstand von 0,1127 cm, bei einer zweiten durch drei Quarzplättchen von 0,0489 cm gehalten wurden. — Aus diesen Dimensionen und unter Benutzung des Werthes $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ für die „kritische Geschwindigkeit“ [1]) ergab sich die Capacität des Electrometers in magnetischem Maass übereinstimmend nach beiden Beobachtungsreihen:

$$\gamma = 3{,}38 \cdot 10^{-19} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}}.$$

Aus denselben Beobachtungen ergibt sich aber auch der Zeitwerth, der einem Scalentheil der Schraubentrommel entspricht. Ist derselbe in Secunden $= x$, und die Drehung der Trommel in Scalentheilen (oben $\tau - \tau_0$) $= \vartheta$, sodass:

$$t = x \cdot \vartheta,$$

so folgt aus Gleichung (9):

$$\log \text{nat} \frac{E}{E-p} = x \cdot \frac{\vartheta}{\gamma \cdot w}. \tag{10}$$

Mit den Werthen:

$$\gamma = 3{,}38 \cdot 10^{-19} \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}},$$

$$w = 123\,000 \text{ S.-E.} = 123\,000 \cdot 96 \cdot 10^7 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

fand sich aus den beiden Beobachtungsreihen:

$$x = 1{,}13 \cdot 10^{-6} \text{ sec}, \qquad x = 1{,}16 \cdot 10^{-6} \text{ sec}.$$

Eine rohe Bestimmung dieser Grösse liess sich in directerer Weise gewinnen. Es war:

---

binirten Systemes $c + \gamma$. Man wird auf den Fehler hingewiesen dadurch, dass der endliche Ausschlag für grosse t (z. B. schon 0,001 Sec.), der dem vollen Potential E entspricht und von der Capacität unabhängig sein muss, grösser ausfällt, wenn man den Condensator c hinzufügt. — Die Electricitätsmenge, die auf die Quadranten und den mit ihnen verbundenen Condensator strömt, ist, wenn Q das Potential dieser Leiter, N dasjenige der Nadel bedeutet:

$$e = cQ + \gamma Q + pN,$$

wo γ und p, aber nicht c, von der Stellung der Nadel abhängen. Schlägt nun die Nadel aus, so bleiben e und N unverändert, Q verwandle sich in $Q + \Delta$: dann ist:

$$e = c(Q + \Delta) + \gamma'(Q + \Delta) + p'N,$$

folglich: $$(c + \gamma')\Delta = (\gamma - \gamma')Q + (p - p')N.$$

1) Nach Clausius, Wied. Ann. **16.** p. 540. 1882.

die Länge des Pendels von der Axe bis zu den Contactstellen $L = 40$ cm,

die Amplitude 90^0,

die Schwingungszeit für diese Amplitude $T = 0{,}65$ sec.,

die Fortbewegung, die die Schraube bei der Drehung um einen Scalentheil erhielt: $\Delta x_0 = 365 \cdot 10^{-6}$ cm.

Bezeichnet noch $\Delta x_0 / \Delta t$ die lineare Geschwindigkeit der Contactstellen in der tiefsten Lage, l die Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer, g die Beschleunigung der Schwere, so haben wir:

$$(11) \qquad T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial \psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 \psi}}, \qquad \frac{\Delta x_0}{\Delta t} = L\sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$\Delta t = 1{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}\ ^{1})$$

Beobachtungen.

Die eigentlichen Messungen zerfallen gemäss den Darlegungen p. 654 in zwei Gruppen.

A. Phasenvergleichungen. — Die Versuchsanordnung war die der Fig. 7; y der Graphitwiderstand, z der Flüssigkeitswiderstand. Die Schraube des beweglichen Hebels wurde in kleinen Schritten, an den entscheidenden Stellen stets nur um je einen Scalentheil, fortbewegt und in jeder Stellung das Potential φ wie ψ gemessen. An gewissen Stellen der Scala tritt dann ein Wechsel von positiven zu negativen Ausschlägen ein, oder umgekehrt. So ergaben sich, ausgedrückt in Scalentheilen der Schraubentrommel, die folgenden

1) Der Pendelunterbrecher ist von Hrn. Zimmermann in Heidelberg nach denselben Werkzeichnungen gebaut, nach denen der von Schiller und Oberbeck benutzte Originalapparat angefertigt war. Schiller bestimmte (Pogg. Ann. 152. p. 542. 1874) den Zeitwerth eines Scalentheiles für denselben zu $1{,}25 \cdot 10^{-6}$ sec.

Nullpunkte.

1. Schwefelsäure.

Condensator K_1.		Condensator K_2.		Condensator K_3.	
für φ	für ψ	für φ	für ψ	für φ	für ψ
350,5	350,5	358,5	357,5	371,5	370,5
383,5	383	420,5	419,5	458,5	458,5
417,5	418	479	478,5	542,5	541,5
451,5	451,5	537,5	537,5		
485,5	484,5	596	596,5		

2. Kupfervitriol.

Condensator K_1.		Condensator K_2.		Condensator K_3.	
für φ	für ψ	für φ	für ψ	für φ	für ψ
348	348,5	357,5	357	371	370
381,5	381,5	418,5	418,5	457,5	457,5
416	416	475,5	476,5	541	540,5
450	450	536,5	536,5		
484	483,5	595,5	595,5		

Die Grenze für die Zuverlässigkeit der Bestimmungen ist ungefähr ein Scalentheil. Halbe Scalentheile habe ich noch aus den Ausschlägen des Electrometers interpolirt.

Offenbar ist eine Phasendifferenz zwischen φ und ψ, die den Werth eines Scalentheiles, d. h. ca. eine Milliontel Secunde, überstiege, nicht vorhanden. Dabei ist die Schwingungsdauer:

	für K_1	K_2	K_3	
	34	59,5	85	Scalentheile,
d. h.	39	68	97	Milliontel Secunden.

B. Widerstandsmessungen. — Die Anordnung war die der Fig. 8. Die gleichen Zeitmomenten, d. h. gleichen Stellungen der Schraube, entsprechenden Ablenkungen des Electrometers waren also proportional dem Widerstand desjenigen Leiters, der sich an der Stelle von y (in Fig. 8) befand. Dorthin wurde durch einen Commutator abwechselnd die Flüssigkeit oder der Graphitwiderstand versetzt. Zu den Messungen wurden diejenigen Zeitpunkte gewählt, in welchen das Potential ein Maximum oder Minimum war, da die unvermeidlichen kleinen Unregelmässigkeiten im Abschlagen der Contacte dann den geringsten Einfluss haben. Der folgende Auszug aus den Beob-

achtungen enthält unter Fortlassung der Controlbestimmungen für benachbarte Zeitpunkte ausschliesslich die so sich ergebenden Maximalausschläge. Die Tabellen geben unter der Ueberschrift „Electrometer" jedesmal in der Colonne τ die Stellung der Mikrometerschraube, unter H (resp. C) den Ausschlag, der den Widerstand der Flüssigkeit, unter G denjenigen, der den Widerstand des Graphits misst, — beide bereits corrigirt auf Grössen, die den Potentialwerthen proportional sind. Dazwischen ist jedesmal das Verhältniss der Widerstände angegeben, wie es die Beobachtung mit Wheatstone'scher Brücke und Dynamometer ergeben hatte.

1. Schwefelsäure.

Dynamometer: Direct gefundenes Verhältniss $H/G = 0{,}971$.
Electrometer; Condensator K_1.

Mikrometerschraube τ	Relative Widerstände von Schwefelsäure H	metall. Leiter G	H/G
366	+234	+241	0,971
400	−194,5	−198,5	0,976
408	−193,0	−198,5	
435	+151,0	+154,7	0,976
467	−122,3	−125	0,978
500	+ 99	+100,2	0,967
503	+ 96	+101,5	

Dynamometer: Direct gefundenes Verhältniss $H/G = 0{,}965$.

Später:

Dynamometer: Direct gefundenes Verhältniss $H/G = 0{,}950$.
Electrometer, Condensator K_2.

Mikrometerschraube τ	Relative Widerstände von Schwefelsäure H	metall. Leiter G	H/G
390	+298,2	+306,4	0,957
450	−191,0	−202,0	0,946
510	+138,0	+145,5	0,948
564	− 96,0	−100,0	0,965
567	− 96,0	− 99,0	

Dynamometer:
Direct gefundenes Verhältniss
$H/G = 0{,}948$.

Electrometer, Condensator K_3.

Mikrometerschraube τ	Relative Widerstände von Schwefelsäure H	metall. Leiter G	H/G
410	+272,8	+284,8	0,958
495	−152,7	−160,0	0,951
500	−151,7	−160,0	
580	+ 97,5	+102,5	0,951

Dynamometer:
Direct gefundenes Verhältniss
$H/G = 0{,}947$.

2. Kupfervitriol.

Dynamometer: Direct gefundenes Verhältniss: $C/G = 1{,}041$.

Electrometer; Condensator K_3

Mikrometerschraube τ	Relative Widerstände von Kupfervitriol C	Relative Widerstände von metall. Leiter G	C/G
410	+302,5	+290,0	1,043
495	−162,3	−155,7	1,042
580	+ 96,2	+ 92,8	1,037

Dynamometer: Direct gefundenes Verhältniss $C/G = 1{,}039$.

Electrometer, Condensator K_2.

Mikrometerschraube τ	Relative Widerstände von Kupfervitriol C	Relative Widerstände von metall. Leiter G	C/G
390	+311,0	+299,3	1,039
450	−195,3	−188,0	1,039
505	+132,8	+127,0	1,046
565	− 87,7	− 85,3	1,028

Dynamometer: Direct gefundenes Verhältniss $C/G = 1{,}037$.

Electrometer, Condensator K_1.

Mikrometerschraube τ	Relative Widerstände von Kupfervitriol C	Relative Widerstände von metall. Leiter G	C/G
397	−190,9	−184,9	1,030
400	−190,2	−185,2	
433	+144,7	+141,0	1,026
467	−114,0	−111,0	1,027

Dynamometer: Direct gefundenes Verhältniss $C/G = 1{,}035$.

Man wird nicht annehmen wollen, dass die Widerstände so verschiedener Leiter, wie die beiden Electrolyte und das metallisch leitende Pulver, in gleichem Maasse von der Geschwindigkeit des Stromwechsels abhängen. Dann aber berechtigen vorstehende Zahlenreihen zu dem Schluss:

Die Widerstände beider Flüssigkeiten ändern sich nicht um ein Procent, wenn die Zahl der Stromwechsel in der Secunde von 100 bis 25000 variirt.

Das Resultat der Untersuchung ist demnach: in den angegebenen Genauigkeitsgrenzen ist das Ohm'sche Gesetz auch für Electrolyte noch für Ströme, die 25000 mal in der Secunde ihre Richtung ändern, in voller Gültigkeit.

Anhang.

Versuche zur Auffindung von Phasendifferenzen im unverzweigten Stromkreise.

Lässt man auf eine polarisirbare Flüssigkeitszelle, z. B. angesäuertes Wasser zwischen Platinelectroden, electromoto-

rische Kräfte wirken, die zur dauernden Electrolyse nicht hinreichen, so verhält sich dieselbe bekanntlich wie ein Condensator von sehr grosser Capacität. In diesem spielt die Rolle des Dielectricums nicht die Flüssigkeit selbst, sondern die Grenzschichten zwischen Electroden und Flüssigkeit. Gegenüber Strömen von wechselnder Richtung gilt Aehnliches für beliebige electromotorische Kräfte; denn dieselben sind dann wenigstens zeitweise — in der Nähe des Zeichenwechsels — stets zur Zersetzung unzureichend. — Ohne auf die Ursache dieser Erscheinung näher einzugehen, kann man also als directes Ergebniss der Beobachtungen hinstellen: ein Stromkreis, der eine polarisirbare Zelle enthält, verhält sich unter obigen Umständen gleich einer Anordnung, wie sie Fig. 12 darstellt, in der c_1 und c_2 Condensatoren, w den Flüssigkeitswiderstand, r den äusseren Widerstand bedeuten. Hier aber liegt offenbar kein im gewöhnlichen Sinn geschlossener Stromkreis mehr vor, sondern zwei Leiter, die durch Isolatoren getrennt sind. Gleichwohl macht man bei der Behandlung veränderlicher Ströme, z. B. inducirter Wechselströme, den Ansatz so, dass man die Stromintensität in r nur von den Constanten der ganzen Strombahn, also nur von der Summe $w + r$ abhängen lässt. Damit ist vorausgesetzt, dass der Strom in w und r nach Intensität und Phase derselbe sei. — Die Beobachtungen widersprechen dieser Voraussetzung nicht; es schien mir aber interessant, sie direct zu prüfen. Das liess sich freilich an dem besprochenen einfachen Fall nicht wohl ausführen, da

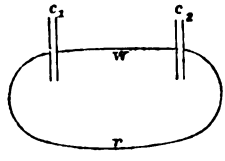


Fig. 12.

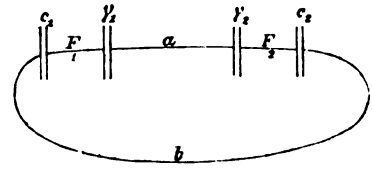


Fig. 13.

eine Intensitätsmessung in w grosse Schwierigkeiten verursacht hätte. (Eine derartige Messung ist ausgeführt von Schiller und Colley.[1]) Ich schaltete daher zwei Flüssig-

1) Schiller und Colley, Pogg. Ann. 155. p. 467. 1875.

keitszellen hintereinander, sodass das Schema der Fig. 13 entsprach, in der F_1 und F_2 Flüssigkeitszellen, a und b metallische Leiter bedeuten. Die Electroden c waren von denen γ verschieden: es waren entweder c grosse platinirte Platinbleche, γ dünne Platindrähte, beide in verdünnter Schwefelsäure, — oder c amalgamirte Zinkstäbe, γ Platinbleche in Zinkvitriollösung. — Es wurden dann in b durch ein Inductorium oder einen Sinusinductor Wechselströme erzeugt und die Intensitäten und Phasen in a und b verglichen nach der von Weber[1]) entwickelten und benutzten Methode. Dieselbe war nur insofern vereinfacht — und freilich auch ungenauer gemacht —, als nur ein Dynamometer benutzt wurde, das ganz, resp. dessen bewegliche Rolle durch einen Commutator von b nach a versetzt werden konnte. Der Commutator wurde nach jeder Schwingung der Dynamometerrolle umgelegt und so Beobachtungsreihen erhalten, aus denen sich der Einfluss der zeitlichen Schwankungen der Stromintensität eliminiren liess.

Es liessen sich in keinem Fall Verschiedenheiten der Intensität oder der Phase zwischen a und b nachweisen.

Es wurde sodann ein Stromkreis hergestellt von der Form der Fig. 12, in dem c_1 und c_2 wirkliche Condensatoren waren, deren Dielectricum getrocknetes und gefirnisstes Papier bildete, und es wurden Intensität wie Phase in w und in r verglichen. — Das Resultat war das vorige.

Endlich wurde folgende Anordnung getroffen (Fig. 14). In dem Stromkreise eines Inductoriums befanden sich zwei verticale Röhren a und b, gefüllt mit Kupfervitriollösung. Bei der gewählten Verbindung führte der Strom in a Kupfer zur unteren Electrode, wenn er in b Kupfer hinaufförderte, — und beides vertauschte sich bei jedem Stromwechsel. Der Strom leistete also in regelmässiger Abwechselung Arbeit in b bei gleichzeitiger Energiezufuhr in a, — und umgekehrt. Es

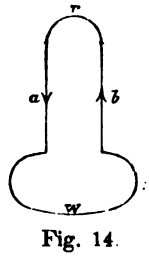


Fig. 14.

1) Weber, l. c. p. 648 ff.

wurde wieder der Strom in w mit dem in r verglichen. Auch hier fand sich weder in der Intensität, noch in der Phase eine Differenz.

Es bewegte sich also in allen diesen Fällen — d. h. in Metallen, Electrolyten und Isolatoren — die Electricität, nach dem Maxwell'schen Ausdruck, wie eine incompressible Flüssigkeit.

Es möge hier jedoch noch eine kurze Bemerkung gestattet sein. — Das erhaltene Resultat kann offenbar nicht in aller Strenge gelten, da der Ansatz, nach welchem die Strömung eine unverzweigte sein soll, eine Vernachlässigung enthält.

Man pflegt, wenn Condensatoren bei der Betrachtung electrischer Ströme ins Spiel kommen, die Electricitätsmenge auf beiden Belegungen als entgegengesetzt gleich anzunehmen, nämlich gleich der Potentialdifferenz der Belegungen multiplicirt mit einer Constante, der „Capacität des Condensators." In Wahrheit aber hängt dieselbe auch vom absoluten Potential der Belegung ab, d. h. von der Potentialdifferenz gegen einen Körper, (wie die mit der Erde verbundenen Zimmerwände), dessen Potential von der betrachteten Strömung nicht messbar beeinflusst wird. Eine einfache Rechnung lässt die Grösse des so begangenen Fehlers erkennen.

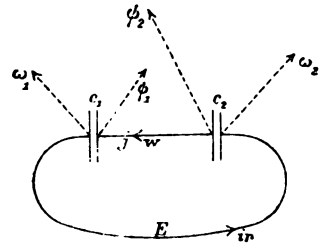


Fig. 15.

Es seien wieder (Fig. 15) c_1 und c_2 Condensatoren; w und r Widerstände; i und j Intensitäten; ω_1 ψ_1 ψ'_2 ω_2 Potentiale; in r wirke die electromotorische Kraft E. Der ganze Stromkreis sei isolirt. Wir haben dann, wenn ω' ψ' Differentialquotienten nach der Zeit, und die $c\gamma\delta$ Constanten bedeuten:

$$(12)\quad \begin{cases} i = c_2(\omega_2' - \psi_2') + \gamma_2\omega_2' = -c_1(\omega_1' - \psi_1') - \gamma_1\omega_1', \\ j = c_1(\psi_1' - \omega_1') + \delta_1\psi_1' = -c_2(\psi_2' - \omega_2') - \delta_2\psi_2', \\ jw = \psi_2 - \psi_1, \quad ir = E + \omega_1 - \omega_2. \end{cases}$$

Aus den fünf ersten Gleichungen folgt:

$$(13)\quad \begin{cases} i(c_2 s_1 + c_1 s_2) = j[(c_2+\gamma_2)s_1 + (c_1+\gamma_1)s_2] + \frac{\partial j}{\partial t} w s_1 s_2 . \\ \text{wo: } s_1 = c_1\gamma_1 + c_1\delta_1 + \gamma_1\delta_1 , \quad s_2 = c_2\gamma_2 + c_2\delta_2 + \gamma_2\delta_2 . \end{cases}$$

Ist speciell E eine periodische Function der Zeit, so stellt sich ein stationärer Zustand her, in dem auch j eine solche wird. Setzen wir:

$$(14)\quad \begin{cases} j = \sin \pi n t, \text{ so wird } i = \varkappa \sin(\pi n t + \varphi), \\ \text{wo } \varkappa^2 . (c_2 s_1 + c_1 s_2)^2 = [(c_2+\gamma_2)s_1 + (c_1+\gamma_1)s_2]^2 + (w n \pi s_1 s_2)^2, \\ \text{und} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{w\pi n s_1 s_2}{(c_2+\gamma_2)s_1 + (c_1+\gamma_1)s_2} . \end{cases}$$

Nehmen wir nun der Einfachheit halber an, beide Condensatoren seien gleich, und jeder gebildet aus zwei concentrischen Kugelflächen. Die inneren Belegungen haben den Radius ϱ und resp. die Potentiale ψ_1 und ψ_2; — die äusseren den Radius R und die Potentiale ω_1 und ω_2. Dann ist in electrostatischem Maass:

$$(15)\quad \begin{cases} c_1 = c_2 = \frac{\varrho R}{R-\varrho}, \ \gamma_1 = \gamma_2 = R, \ \delta_1 = \delta_2 = 0 \text{ und folglich:} \\ \varkappa^2 = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{w\pi n R}{2}\right)^2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{w\pi n \varrho}{2} . \end{cases}$$

Beachtet man, dass eine Siemens'sche Einheit im electrostatischen Maasssystem nur ca. $10^{-12}\frac{\text{sec}}{\text{cm}}$ ist, so sieht man, dass die Phasendifferenz φ für thatsächlich vorkommende Verhältnisse nicht leicht einen merklichen Betrag erreichen wird. Dasselbe gilt für das zweite Glied von $\varkappa$; es bleibt also:

$$\varkappa = \frac{R}{\varrho},$$

d. h. das Amplitudenverhältniss ist gleich dem Verhältniss der Radien. Der procentische Fehler also, den man begeht, indem man $i = j$ setzt, ist in diesem Fall das Verhältniss der Dicke der Luftschicht zum Kugelradius.

Er ist stets von der Ordnung γ/c, und diese ist im allgemeinen gleich der Ordnung des Verhältnisses:

$$\frac{\text{Dicke der isolirenden Schicht}}{\text{lineare Ausmessungen der Belegungen}}$$

Bei den oben besprochenen Versuchen wurden, entsprechend der geringen Empfindlichkeit des Dynamometers, Con-

densatoren von grosser Capacität benutzt, und diese wurde, wie es in der Praxis stets geschehen wird, dadurch erreicht, dass jenes Verhältniss sehr klein gemacht wurde. Bei Condensatoren von kleiner Capacität aber kann, wie man ohne weiteres sieht, dasselbe sehr beträchtliche Werthe erreichen.

Es liegt häufig der weit complicirtere Fall vor, wo auch die electrostatische Capacität der Leitung zu berücksichtigen ist. Derselbe ist als „Ladung" eingehend theoretisch und experimentell untersucht. — Mir schien gleichwohl eine Darlegung der hier behandelten sehr einfachen Verhältnisse nicht unnütz, da die übliche Art, Gleichungen für ungeschlossene Ströme anzusetzen, bei welcher ein Condensator als durch nur eine Constante definirt erscheint, leicht zu irrigen Vorstellungen verleitet.

Physik. Inst. d. Univ. Strassburg, im December 1883.

VII. *Ueber electrische Schwingungen. Die magnetisirende Wirkung derselben; von A. Oberbeck.*[1]

(Fünfte Abhandlung.)

Dass der durch äussere, magnetisirende Kräfte in einer Eisenmasse erregte Magnetismus nicht plötzlich entsteht oder vergeht, ist eine längst bekannte und vielfach untersuchte Thatsache.[2] Dieselbe macht sich besonders dann bemerkbar, wenn veränderliche, electrische Ströme in Wechselwirkung mit Eisenmassen benutzt werden, also bei den magnetelectrischen Maschinen, Inductionsapparaten, Electromagneten und in neuerer Zeit bei den Telephonen und dynamoelectrischen Maschinen.

Wenn man früher hauptsächlich den Verlauf der Mag-

1) Der erste Theil dieser Untersuchungen wurde im Auszuge der k. preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin am 12. Juli 1883 vorgelegt.

2) Zusammenstellung der hierauf bezüglichen Untersuchungen bei G. Wiedemann, Galvanismus 8. p. 158—186. 1874.

netisirung nach Oeffnung und Schliessung eines constanten Stromes festzustellen suchte, so erfordert jetzt ausser dem wissenschaftlichen auch das praktische Interesse eine eingehendere Untersuchung der magnetisirenden Wirkung, welche von schnell aufeinander folgenden Stromstössen oder von Wechselströmen herrührt. Am einfachsten wird sich dieselbe gestalten, wenn man Wechselströme benutzt, welche dem Gesetz der Sinusfunction folgen. Es ist dann anzunehmen, dass auch die erregten Magnetismen nach demselben Gesetze periodisch wechseln. Eine Verzögerung in der Zu- und Abnahme des Magnetismus würde sich durch eine Phasenverzögerung der letzten, periodischen Function gegen die erste zu erkennen geben. Ferner ist es denkbar, dass die Stärke des erregten Magnetismus nicht allein von der Grösse der magnetisirenden Kraft, sondern auch von der Schnelligkeit der Stromwechsel abhängt, in der Weise, dass bei grösserer Schwingungszahl der inducirte Magnetismus kleiner ausfällt, als bei langsamem Stromwechsel.

Bei der Untersuchung des veränderlichen Magnetismus einer Eisenmasse ist eine Reihe von Umständen zu berücksichtigen, welche denselben beeinflussen. Rührt, wie gewöhnlich, die magnetisirende Kraft von dem electrischen Strom einer Drahtrolle her, in welcher der Eisenkern sich befindet, so entstehen in derselben Inductionsströme, welche den Verlauf des magnetisirenden Stromes verändern. Ferner kommen diejenigen Inductionsströme hier in Betracht, welche in der Eisenmasse selbst entstehen, wenn sich der magnetische Zustand derselben ändert. Ihre Wirkung kann man im allgemeinen dahin charakterisiren, dass sie die Zu- und Abnahme des Magnetismus verzögern. Genauer ist dieselbe aber weder experimentell, noch theoretisch festgestellt worden.[1])

Endlich nimmt man vielfach an, dass die Veränderungen des Magnetismus durch unvollkommene Beweglichkeit der

---

1) Die Wärmewirkung der inneren Inductionsströme wurde vor kurzem von E. Warburg und L. Hönig untersucht; Festschrift der 56. Naturforscherversammlung, Wied. Ann. **20**. p. 814—835. 1883.

Eisenmolecüle eine Verzögerung erleiden, oder dass überhaupt der Magnetismus nicht unmittelbar der magnetisirenden Kraft folgt, sondern eine nicht näher bekannte Function der Zeit ist.

Es kam nun darauf an, diese Einflüsse möglichst voneinander zu trennen.

Hierzu konnte eine Beobachtungsmethode benutzt werden, welche sich aus meinen früheren Untersuchungen über electrische Schwingungen ergab. Bei derselben wurde gerade aus denjenigen Veränderungen, welche der magnetisirende Strom einer Rolle durch Inductionsströme erfährt, wenn in derselben ein Eisenkern sich befindet, auf die veränderlichen Momente desselben geschlossen.

Die beiden anderen Einflüsse lassen sich allerdings nicht vollständig experimentell trennen. Doch kann man durch Benutzung von Eisenkernen mit verschiedenem Durchmesser den Einfluss der inneren Inductionsströme verändern. Ferner wurde eine so einfache, experimentelle Anordnung getroffen, dass die Wirkung der inneren Inductionsströme durch Rechnung verfolgt werden konnte. Dies ist möglich, wenn ein langgestreckter Eisenkern im Innern einer Magnetisirungsspirale sich befindet, deren Wirkung auf alle Punkte der Eisenmasse nahezu gleichgross und gleichgerichtet ist, während die Rolle von electrischen Schwingungen durchflossen wird.

In dem ersten Abschnitte dieser Abhandlung wird zunächst die Methode beschrieben, nach welcher die Grösse des periodisch wechselnden Magnetismus gemessen wurde. Die Berechnung der inducirten, magnetischen Momente erfordert aber die Kenntniss einer etwa auftretenden Phasenverzögerung des Magnetismus. Dieselbe wird durch besondere Versuche bestimmt.

Der zweite Abschnitt enthält die Beobachtungsresultate bei einer Reihe von Eisen- und Stahlkernen und Drahtbündeln.

In dem dritten Abschnitt werden zunächst die allgemeinen Gleichungen zusammengestellt, aus welchen die magnetischen Momente einer Eisenmasse unter dem Einfluss

veränderlicher Kräfte zu berechnen sind, wenn dabei auf die Inductionsströme in der Eisenmasse selbst Rücksicht genommen wird. Diese Gleichungen werden für den oben angegebenen, einfachen Fall gelöst und gestatten, den Einfluss der Inductionsströme auf die veränderliche Magnetisirung zu berechnen und mit den Versuchsresultaten zu vergleichen.

I. Beschreibung der Untersuchungsmethoden.

Die an einer Stelle eines Stromkreises erzeugten, electrischen Schwingungen hängen in Bezug auf Amplitude und Phase von der Beschaffenheit desselben ab. Insbesondere werden sie durch die Selbstinduction von Rollen mit vielen Windungen beeinflusst. Ich habe früher zwei Methoden beschrieben, den Inductionscoëfficienten einer Rolle auf sich selbst zu bestimmen.[1]) Enthält die Rolle gleichzeitig einen Eisenkern, so wird der Inductionscoëfficient dadurch vergrössert. Die Messung desselben kann aber in derselben Weise ausgeführt werden.

Bei meinen Versuchen wurde eine Drahtrolle von 500 mm Länge benutzt, welche in fünf Lagen 4200 Windungen Kupferdraht enthielt. Der innere Radius der Windungen betrug 19 mm, der äussere 22 mm. Die magnetisirende Kraft kann hiernach im Innern der Rolle als nahezu constant in Bezug auf Richtung und Grösse angesehen werden.

Bezeichnet man mit z die Anzahl der Windungen, mit d die Diagonale der Rolle, mit i die Stromstärke, so beträgt die in Richtung der Axe wirkende Kraft:

$$\frac{4\pi z i}{d} = P.i. \tag{1}$$

Nimmt man an, dass das magnetische Moment der Eisenstäbe derselben und ihrem Volumen (v) proportional ist, so ist dasselbe:

$$m = k.v.Pi, \tag{2}$$

wo k die bei den hier auftretenden schwachen Kräften (von der Grössenordnung des Erdmagnetismus) als constant anzunehmende Magnetisirungsfunction bedeutet.

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. **17.** p. 824. 1882 u. **19.** p. 218. 1883.

Das electromagnetische Potential des Stabes in Bezug auf die Rolle ist daher:

$$Pm = kv P^2 i,$$

und es wird das Potential der Rolle auf sich selbst (p) durch die Anwesenheit des Eisenkerns um den Werth: kvP^2 vergrössert.

Von den oben erwähnten Methoden zur Bestimmung von p erwies sich besonders diejenige als geeignet, bei welcher die Stromverzweigung der Wheatstone'schen Brücke mit dem Sinusinductor als Stromquelle benutzt wurde.

Hierzu war die folgende Anordnung getroffen. Seitenzweig 1 bestand aus der eben beschriebenen Magnetisirungsspirale, deren Widerstand 46 S.-E. betrug. Zweig 2 enthielt einen Siemens'schen Widerstandskasten. Die Zweige 3 und 4 bestanden aus wenigen Windungen eines dünnen Neusilberdrahtes und hatten gleiche Widerstände von je 56,5 S.-E. Die Brücke wurde durch die bewegliche Rolle des Electrodynamometers gebildet, deren Widerstand 144 S.-E. betrug, während die festen Rollen in demselben Zweig wie der Sinusinductor sich befanden.

Da von den vier Seitenzweigen nur in dem ersten eine erheblichere Selbstinduction vorkommt, so gilt[1]), wenn das Electrodynamometer keine Ablenkung zeigt, die Gleichung:

$$(n\pi p)^2 = \left(w_2 \frac{w_4}{w_3} - w_1\right)(w_1 + w_2 + w').$$

Hier ist p der Selbstinductionscoëfficient der Rolle im Zweig 1, w_1, w_2, w_3, w_4 sind die Widerstände der vier Seitenzweige, w der Widerstand der Brücke, endlich ist gesetzt:

$$w' = \frac{w(w_3 + w_4)}{w + w_3 + w_4} = 63 \text{ S.-E.}$$

Die Schwingungszahl n wurde durch Beobachtung der Zeit (τ) für 1000 ganze Umdrehungen des Magnetes festgestellt. Es ist also:

$$n = \frac{2000}{\tau}. \tag{3}$$

Infolge der Gleichheit der Widerstände in den Zweigen 3 und 4 nimmt die Gleichung die einfachere Form an:

1) A. Oberbeck, Wied. Ann. 17. p. 825. 1882.

(4) $$(n\pi p)^2 = (w_2 - w_1)(w_1 + w_2 + w').$$

Nach Einführung des Eisenkerns musste, um die Ablenkung des Electrodynamometers wieder auf Null zurückzuführen, ein grösserer Widerstand w_2' eingeschaltet werden. Es gilt dann die Gleichung:

(5) $$(n\pi)^2(p + kvP^2)^2 = (w_2' - w_1)(w_1 + w_2' + w'),$$

oder: $$\pi(p + kvP^2) = c,$$

wenn:

(6) $$c = \frac{1}{n}\sqrt{(w_2' - w_1)(w_1 + w_2' + w')}.$$

gesetzt wird.

Hierbei liegt die Annahme zu Grunde, dass die magnetischen Veränderungen keine Verzögerung erfahren. Schon die ersten Versuche, welche nach der beschriebenen Methode angestellt wurden, machten es wahrscheinlich, dass eine solche, wenigstens bei dickeren Stäben, jedenfalls vorkommt. Dieselbe wird aber die Berechnung des inducirten Magnetismus wesentlich beeinflussen, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Setzt man den periodischen, magnetisirenden Strom:

$$i = a\cos(n\pi t),$$

so wird der inducirte Magnetismus zwar auch periodische Aenderungen von derselben Schwingungsdauer erfahren, aber eine Phasendifferenz im Vergleich zu der magnetisirenden Kraft haben. Man kann daher setzen:

(7) $$m = (kPv)\,a\,.\cos(n\pi t - \varphi),$$

wo k, P, v die oben angegebene Bedeutung haben, während φ die betreffende Phasendifferenz ist.

Von der Grösse derselben hängt, wie hier beiläufig bemerkt werden mag, die bei der wechselnden Magnetisirung geleistete Arbeit oder die entsprechende Wärmeentwickelung in den Eisenkernen ab. Nach Warburg[1]) ist dieselbe auszudrücken durch:

$$P\int_0^T m\,di = \tfrac{1}{2}a^2P^2kvn\pi\sin\varphi.$$

Dieselbe würde also ohne Phasenverzögerung bei electrischen Schwingungen Null sein.

1) E. Warburg, Wied. Ann. 20. p. 815. 1883.

Bei den oben beschriebenen Versuchen kommt die Rückwirkung des Magnetes auf den inducirenden Strom in Betracht. Dieselbe entspricht einer electromotorischen Kraft:

$$-P\frac{dm}{dt} = P^2 kv a n\pi \{\sin(n\pi t)\cos\varphi - \cos(n\pi t)\sin\varphi\}.$$

Hierfür kann man auch schreiben:

$$-kvP^2\left\{\cos\varphi\frac{di}{dt} + n\pi\sin\varphi . i\right\}.$$

Tritt dieser Ausdruck in die Differentialgleichung für die Stromintensität des inducirenden Zweiges, welche ohne Mitwirkung des Magnetismus von der Form ist:

$$wi + p\frac{di}{dt} = E,$$

wo E eine periodische, electromotorische Kraft bedeutet, so erhält man:

$$(8) \qquad (w + kvP^2 n\pi\sin\varphi)i + (p + kvP^2\cos\varphi)\frac{di}{dt} = E.$$

Bei Annahme einer besonderen Phasenverzögerung des Magnetismus wird also nicht allein das Inductionspotential des Kreises oder Zweiges auf sich selbst vergrössert, sondern es erfährt auch der Widerstand desselben eine scheinbare Vergrösserung.

Wendet man diese Betrachtung auf die oben beschriebene Methode an, so gelangt man zu anderen, etwas complicirteren Formeln für die Berechnung des inducirten Magnetismus.

Durch Einführung des Eisenkerns in die Rolle wird nicht allein p [vgl. Gl. (4)] um $kvP^2.\cos\varphi$, sondern auch w_1 um $kvP^2 n\pi\sin\varphi$ vermehrt. Bezeichnet man, wie zuvor, mit w_2' den einzuschaltenden Widerstand, um die Ablenkung des Electrodynamometers auf Null zurückzuführen, so lautet die Bedingungsgleichung hierfür, welche an Stelle von (5) tritt:

$$(9) \quad \begin{cases} (\pi n)^2(p + kvP^2\cos\varphi)^2 \\ = (w_2' - w_1 - n\pi kvP^2\sin\varphi)(w_1 + n\pi kvP^2\sin\varphi + w'). \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(10) \qquad M = \pi kvP^2,$$

welche Grösse als Maass des inducirten Magnetismus gelten kann, ferner:

(11) $$b = \cos\varphi\left\{\pi p + \frac{1}{n}\operatorname{tg}\varphi\,(2w_1 + w')\right\},$$

und wie früher:

$$c = \frac{1}{n}\sqrt{(w_2' - w_1)(w_1 + w_2' + w')},$$

so erhält man zur Berechnung von M die quadratische Gleichung:

$$M^2 + 2bM - [c^2 - (\pi p)^2] = 0.$$

Da nur die Wurzel mit positivem Zeichen in Betracht kommen kann, so ist:

(12) $$M = -b + \sqrt{b^2 + c^2 - (\pi p)^2}.$$

Aus den Zahlenwerthen, welche die einzelnen Grössen dieser Formeln bei den Versuchen erhalten, ergibt sich, dass durch Berücksichtigung der Phasenverzögerung die Werthe von M kleiner ausfallen, als nach der einfachen, früheren Berechnung.

Es kam nun vor allem darauf an, die Grösse der Phasenverschiebung φ in den einzelnen Fällen festzustellen.

Zu diesem Zweck wurde die folgende Anordnung getroffen. Der Strom des Sinusinductors wurde durch die Rollen des Electrodynamometers und durch zwei Lagen der oben beschriebenen Magnetisirungsspirale geleitet. Ein zweiter Stromkreis bestand aus den drei anderen Lagen derselben Spirale, der beweglichen Rolle des Electrodynamometers und einem Widerstandskasten. Das Electrodynamometer vermittelte also die Wechselwirkung des inducirenden und des inducirten Stromes. Eine einfache Betrachtung zeigt, dass dieselbe Null sein müsste, wenn man von der Selbstinduction des secundären Kreises absehen könnte, da in diesem Falle der inducirende und inducirte Strom einen Phasenunterschied $\pi/2$ haben würden. In der That war bei leerer Spirale die Wechselwirkung so klein, dass ein Ausschlag des Electrodynamometers kaum beobachtet wurde.

Nach Einführung der Eisenkerne in dieselbe waren die Ausschläge ziemlich bedeutend. Dieselben hängen natürlich auch von dem Widerstand des secundären Kreises ab, aber nicht in der einfachen Form des Ohm'schen Gesetzes, sondern in complicirterer Weise, wie die folgende Rechnung

zeigt. Aus derselben ergibt sich, dass durch Beobachtung der Ausschläge bei zwei verschiedenen Widerständen die Phasenverzögerung des Magnetismus berechnet werden kann.

Bezeichnet man den Strom des inducirenden Kreises durch J und setzt:

$$J = a\cos(n\pi t),$$

so kann, wie früher angenommen, das inducirte magnetische Moment m gesetzt werden:

$$m = k.v.P.a\cos(n\pi t - \varphi).$$

Durch die periodischen Veränderungen desselben wird in dem zweiten Stromkreis ein Strom i inducirt, dessen electromotorische Kraft:

$$-P'\frac{dm}{dt} = kvPP'an\pi\sin(n\pi t - \varphi)$$

ist. Hierin bedeutet P' das electromagnetische Potential des Magnetes in Bezug auf die secundäre Spirale. Bezeichnet man ferner mit w den Widerstand des secundären Kreises, mit p das Inductionspotential desselben auf sich selbst, so gilt für i die Gleichung:

$$p\frac{di}{dt} + wi = -P'\frac{dm}{dt}.$$

Also ist der Inductionsstrom:

$$(13)\quad \begin{cases} i = -\frac{kvPP'an\pi}{w^2+n^2\pi^2p^2}\{\cos(n\pi t)[w\sin\varphi + n\pi p\cos\varphi] \\ \qquad + \sin(n\pi t)[n\pi p\sin\varphi - w\cos\varphi]\}. \end{cases}$$

Da die Ablenkung des Electrodynamometers proportional mit:

$$\frac{1}{T}\int_0^T Jidt$$

ist, so gilt für dieselbe (α) der Ausdruck:

$$(14)\qquad \alpha = A\frac{w\sin\varphi + n\pi p\cos\varphi}{w^2 + n^2\pi^2p^2},$$

$$(15)\qquad \text{wo:}\quad A = \frac{kvPP'a^2n\pi}{2}$$

gesetzt ist.

Bezeichnet man die den Widerständen w_1 und w_2 entsprechenden Ablenkungen mit α_1 und α_2 und setzt:

$$\varepsilon = \frac{\alpha_1\left\{1 + \left(\frac{n\pi p}{w_1}\right)^2\right\}}{\alpha_2\left\{1 + \left(\frac{n\pi p}{w_2}\right)^2\right\}}, \tag{16}$$

so ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n\pi p}{w_1 w_2}\,\frac{w_2^2 - \varepsilon w_1^2}{\varepsilon w_1 - w_2}. \tag{17}$$

Da der hier in Betracht kommende Stromkreis, auf welchen sich p bezieht, nur die bewegliche Rolle des Electrodynamometers und drei Lagen der oben beschriebenen Magnetisirungsspirale enthielt, so war p nur klein, und zwar:

$$\pi p = 0{,}25 \text{ S.-E. sec.}$$

Als Widerstände w_1 und w_2 wurden stets 200 S.-E. und 400 S.-E. benutzt. Die Brüche $(n\pi p/w)^2$ sind daher auch bei grösseren Schwingungszahlen klein im Vergleich zu 1, und es ist ε das Verhältniss der Ablenkungen nach Anbringung der kleinen, jedesmal nur noch von der Schwingungszahl n abhängenden Correction. Setzt man in Gl. (17):

$$w_1 = 200, \quad w_2 = 400, \quad n = \frac{2000}{\tau};$$

so ist:

$$\tau \operatorname{tg}\varphi = \frac{5(4-\varepsilon)}{4(\varepsilon-2)}. \tag{18}$$

Da sich die Beobachtungen τ und ε unmittelbar ergaben, so kann aus dieser Formel φ berechnet werden. Da der benutzte Sinusinductor nicht ganz constante Rotationsgeschwindigkeit hatte, so wurde immer mit den beiden Widerständen schnell gewechselt und das Mittel aus mehreren aufeinander folgenden Beobachtungen genommen. Ausserdem war in diesem Kreis ein Commutator, welcher die Ausschläge nach beiden Seiten zu messen gestattete. Die Grössen α_1 und α_2 bedeuten stets die doppelten Ablenkungen.

II. Uebersicht der Versuchsresultate.

Die untersuchten Eisen- und Stahlmassen waren die folgenden:

1. Ein Bündel dünner Eisendrähte von 0,5 mm Durchmesser, 400 mm Länge und 277 g Gewicht. Dasselbe soll in den folgenden Tabellen stets abgekürzt durch B_1 bezeichnet werden.

2. Ein Bündel Drähte aus weichem Eisen (1,8 mm Durchmesser 400 mm Länge, 350 g). B_2.

3. Ein Bündel Drähte aus hartem Eisen (2 mm Durchmesser, 400 mm Länge, 350 g). B_3.

4. Ein Bündel von sieben Eisendrähten (5 mm Durchmesser, 400 mm Länge, 429 g). B_4.

5. Ein Bündel von vier Eisenstäben (7 mm Durchmesser, 400 mm Länge, 483 g). B_5.

6. Ein Eisenstab. (8 mm Durchmesser, 400 mm Länge, 175 g). E_1.

7. Ein Eisenstab. (17 mm Durchmesser, 319 mm Länge, 516 g). E_2.

8. Ein Bündel von fünf Stahldrähten (6 mm Durchmesser, 400 mm Länge, 498 g). St_1.

9. Ein Stahlstab. (12 mm Durchmesser, 400 mm Länge, 351 g). St_2.

Die bei den Drahtbündeln angegebenen Durchmesser beziehen sich auf die einzelnen Drähte, die Gewichte auf das ganze Bündel. Die einzelnen Drähte waren überall mit einem gut isolirenden Lack überzogen.

In der folgenden Tabelle I sind zunächst die Beobachtungen über die Phasenverzögerung zusammengestellt. Die erste Spalte enthält die abgekürzte Bezeichnung des untersuchten Eisenkernes. Die Bedeutung der Spalten τ, α_1, α_2 ε geht aus der Auseinandersetzung des vorigen Abschnittes hervor. Die einzelnen Werthe von ε stimmen für jeden Eisenkern nahezu überein. Es konnte daher aus denselben das Mittel genommen und daraus $\tau \operatorname{tg} \varphi$ nach Gl. (18) berechnet werden. In der letzten Spalte sind die Verzögerungen ϑ in Secunden angegeben, welche einer Schwingungszahl $n = 100$ oder dem Werthe $\tau = 20$ entsprechen.

Tabelle I.

	τ	α_1	α_2	ε	ε Mittel	$\tau \operatorname{tg} \varphi$	ϑ
B_1	13,8	125,0	32,2	3,979	sehr klein		
B_2	25,0	74	21	3,549			
„	18,0	237	68	3,534	3,513	0,402	0,00006
„	15,0	325	96	3,457			

	r	a_1	a_2	ε	ε Mittel	$r \operatorname{tg} \varphi$	ϑ
B_3	18,0	88	25	3,569	3,531	0,383	0,00006
„	16,0	127	37	3,494			
B_4	20,1	235	100	2,378	2,367	5,562	0,00086
„	12,9	566	248	2,357			
B_5	20,1	241	108,3	2,252			
„	16,0	467,5	210,6	2,260	2,264	8,220	0,00124
„	14,3	565,0	253,4	2,281			
E_1	20,0	48,2	21,5	2,271	2,247	8,871	0,00133
„	15,0	100,6	46,2	2,223			
E_2	15,0	202,5	100,7	2,053	2,053	45,93	0,00369
St_1	18,0	77,7	24,5	3,215	3,244	0,770	0,00012
„	12,0	263	83	3,273			
St_2	19,0	99	43	2,332	2,288	7,431	0,00113
„	12,0	256	119	2,222			

Da, wie aus dieser Zusammenstellung hervorgeht, $r \operatorname{tg} \varphi$ oder $1/n \operatorname{tg} \varphi$ für einen bestimmten Eisenkern stets nahezu denselben Werth hat, so ist die Tangente der Phasendifferenz proportional der Schwingungszahl.

Ferner zeigt sich, dass die Phasenverzögerung hauptsächlich von dem Durchmesser der angewandten Drähte abhängt. Während dieselbe bei den dünnsten Eisendrähten (B_1) Null ist und noch bis zu Durchmessern von 2 mm (B_2 und B_3) sehr kleine Werthe hat, wächst sie schnell bei dickeren Drähten und Stäben (B_4, B_5, E_1, E_2). Die Stahlstäbe zeigen ein ähnliches Verhalten. Doch ist bemerkenswerth, dass die Phasenverzögerungen bei ihnen kleiner sind, als bei Eisenstäben von entsprechender Dicke. Dieselbe ist z. B. bei St_1 erheblich kleiner als bei B_4, obgleich die Durchmesser der Stahldrähte 6 mm, diejenigen der Eisendrähte nur 5 mm betrugen. Ebenso ist sie bei St_2 (12 mm Durchmesser) kleiner als bei E_1 (8 mm). Die Gesammtheit dieser Erscheinungen deutet darauf hin, dass die Hauptursache der Phasenverzögerung in den Inductionsströmen der Eisenmasse selbst zu suchen ist. Der Einfluss derselben muss mit der Schwingungszahl der primären Ströme wachsen; derselbe muss ferner mit der Dicke der Stäbe zunehmen und schliesslich von

der absoluten Grösse der inducirten Magnetismen abhängen. Da dieselben bei dem Eisen grösser sind, als bei dem Stahl, so erklärt sich daraus die geringere Verzögerung bei letzterem.

Diese Schlüsse stimmen auch mit den Versuchsergebnissen von Beetz[1]) überein. Derselbe findet in dem Fall, wo die Eisenkerne ihrer ganzen Länge nach von der Magnetisirungsspirale umgeben sind, dass „die Zeit, in welcher der Magnetismus verschwindet, am wesentlichsten von der Bildung peripherischer Ströme in den Kernen abhängt". Bei der Beobachtung der Zeit, in welcher der Magnetismus entsteht, wurde allerdings die Mitwirkung der inneren Ströme durch die viel stärkere Wirkung der Inductionsströme der magnetisirenden Spirale verdeckt.

Ich gehe nun über zur Mittheilung der Versuche, welche nach der ersten Methode angestellt wurden. Die Anordnung derselben wurde früher beschrieben. Nach Herstellung der dort angegebenen Wheatstone'schen Drahtcombination wurde zunächst bei leerer Magnetisirungsspirale der Sinusinductor in Gang gesetzt, nachdem in den Widerstandskasten des Zweiges 2 derjenige Widerstand (46 S.-E.) eingeschaltet war, bei welchem im Falle eines constanten Stromes der Brückendraht stromlos war. Um dann die Ablenkung des Electrodynamometers zu verhindern, musste ein entsprechender Widerstand hinzugefügt werden. Derselbe $w_2 - w_1$ ist in der folgenden Tabelle II mit x bezeichnet, während gleichzeitig die Zeit τ beobachtet wurde. Die letzte Spalte enthält unter πp die nach Gl. (1) berechneten Werthe.

Tabelle II.

τ	x	πp
16,3	1,8	0,115
14,6	2,2	0,114
13,3	2,4	0,109
	Mittel	0,113 S.-E. sec.

1) W. Beetz, Pogg. Ann. **105.** p. 533. 1858.

Der Werth von πp ist nur klein, obgleich die Spirale eine grosse Anzahl von Windungen (4200) besass. Dieselben sind aber über eine grosse Länge (500 mm) vertheilt. Es wurden dann die erwähnten Eisenkerne in die Spirale eingeführt und abermals soviel Widerstand $x = w_2' - w_1$ hinzugefügt, bis keine Ablenkung erfolgte. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen III und IV zusammengestellt. Tabelle III bezieht sich auf diejenigen Eisenkerne, bei welchen die Phasenverzögerung Null oder sehr klein war. Hierbei konnte eine Vereinfachung bei Berechnung von b (vgl. Gl. 11) vorgenommen werden. Ist zunächst $\operatorname{tg} \varphi = 0$, so ist $b = \pi p = 0{,}113$. Ist φ klein, so kann $\cos \varphi = 1$ gesetzt werden. Dann hat b einen constanten Werth für den betreffenden Stab.

In der Tabelle III sind ausser den direct beobachteten Werthen τ und x die nach Gl. (12) und (13) berechneten Grössen b, c und M angegeben. Letztere kann als Maass für die Amplituden der magnetischen Momente angesehen werden.

Tabelle III.

τ	x	c	M	τ	x	c	M
	B_1. $b = 0{,}113$.				B_3. $b = 0{,}128$.		
31,9	19,5	0,930	0,817	32,5	21,8	1,009	0,881
26,9	25,8	0,919	0,806	21,4	48,7	1,066	0,938
21,1	43,0	0,923	0,810	14,4	93,0	1,093	0,965
16,0	68,0	0,935	0,822				
12,7	103,5	1,037	0,915				
	B_2. $b = 0{,}129$.				St_1. $b = 0{,}143$.		
35,3	46,5	1,709	1,580	41,7	9,3	0,815	0,672
24,6	86,0	1,771	1,642	26,5	22,3	0,833	0,690
17,0	166,0	1,962	1,833	17,3	47,0	0,843	0,700
11,0	323,0	2,161	2,032	12,6	78,8	0,855	0,712

Bei den übrigen Eisen- und Stahlkernen mit grösseren Phasenverzögerungen musste die Berechnung von b für jede Schwingungszahl besonders vorgenommen werden. Zu dem Zweck wurden aus den Werthen von $\tau \operatorname{tg} \varphi$ der Tabelle I zu jedem beobachteten τ der zugehörige Werth von φ und mit dessen Hülfe b berechnet. Die hierbei gefundenen Werthe sind in der folgenden Tabelle mit angegeben. Die Bedeutung der übrigen Grössen ist dieselbe wie zuvor.

Tabelle IV.

τ	x	c	φ	b	M
		B_3; $\tau \operatorname{tg} \varphi = 5{,}562$.			
32,7	76,7	2,179	9° 39′	0,324	1,876
24,8	112,0	2,144	12 38	0,321	1,844
18,9	160,7	2,128	16 24	0,316	1,832
15,1	211,5	2,102	20 13	0,309	1,788
		B_4; $\tau \operatorname{tg} \varphi = 8{,}220$.			
31,4	92,0	2,366	14° 40′	0,417	1,982
25,9	110,6	2,219	17 36	0,412	1,842
13,7	206,5	1,871	30 58	0,370	1,537
12,4	225,0	1,805	33 32	0,360	1,477
		E_1; $\tau \operatorname{tg} \varphi = 8{,}871$.			
25,9	32	1,001	18° 54′	0,432	0,653
20,8	40	0,918	23 6	0,420	0,584
15,4	52,2	0,801	29 57	0,396	0,490
12,2	62,0	0,707	36 1	0,370	0,421
		E_2; $\tau \operatorname{tg} \varphi = 45{,}93$.			
36,3	34,5	1,467	51° 40′	1,173	0,703
22,4	50,5	1,141	64 0	0,830	0,579
15,2	66,0	0,954	71 41	0,595	0,524
11,3	78,5	0,765	76 11	0,452	0,431
		St_2; $\tau \operatorname{tg} \varphi = 7{,}431$.			
42,7	15,0	1,078	9° 52′	0,395	0,749
24,8	29,0	0,906	16 41	0,384	0,594
15,0	54,0	0,797	26 21	0,359	0,508

Aus den mitgetheilten Versuchsresultaten lassen sich die folgenden Schlüsse ziehen.

1. Mit zunehmender Schwingungszahl (also mit abnehmendem τ) wachsen die magnetischen Momente in Tabelle III und nehmen ab in Tabelle IV. In ersterer entsprechen dieselben Einlagen aus dünnen Eisendrähten (B_1, B_2, B_3) und etwas dickeren Stahldrähten (St_1), welche sich sämmtlich durch sehr kleine Phasenverzögerungen auszeichnen. Die Eiseneinlagen der Tabelle IV sind dagegen dickere Drähte und Stäbe mit grösseren Phasenverzögerungen.

Aus zahlreichen Untersuchungen der magnetischen Momente, welche durch constante magnetisirende Kräfte von geringer Stärke inducirt werden, weiss man, dass dieselben schneller wachsen, als die Kräfte. Berücksichtigt man, dass die Ströme des Sinusinductors der Rotationsgeschwindigkeit

des Magnetes oder der Schwingungszahl proportional sind, so verhalten sich die Eisenkerne der Tabelle III gerade so, wie man es nach den Erfahrungen mit constanten Kräften erwarten musste.

Das Verhalten der Eisenmassen mit grösserem Durchmesser ist gerade das entgegengesetzte, da die magnetischen Momente bei denselben mit wachsender Schwingungszahl abnehmen, und zwar um so schneller, je grösser die Durchmesser sind. Es ist wahrscheinlich, dass auch diese Abnahme, wie die Phasenverzögerungen, durch die inneren Inductionsströme der Eisenmasse ihre Erklärung findet. Daraus würde dann folgen, dass bei Eisenmassen von grösseren Querdimensionen und bei schnell veränderlichen Kräften die inneren Inductionsströme einen sehr grossen Einfluss auf die magnetischen Momente ausüben und besonders bei periodisch wechselnden Kräften wesentlich zur Schwächung der magnetischen Momente beitragen.

2. Während die Molecularbeschaffenheit der Eisenmasse bei den Phasenverzögerungen nur einen geringen Einfluss ausübte, tritt dieselbe bei der Grösse der Momente mehr hervor. So ist das Bündel B_2, aus weichen Eisendrähten bestehend, durch besonders starke Zunahme mit wachsender Schwingungszahl und durch auffallend grosse magnetische Momente ausgezeichnet. In beiden Beziehungen übertrifft es bedeutend das Bündel B_3, welches aus harten Eisendrähten besteht. Die magnetischen Momente der Stahlmagnete sind erheblich kleiner als die Momente entsprechender Eisenstäbe.

3. Die Gestaltung der Eisenmasse übt einen ähnlichen Einfluss aus wie bei constanten Strömen. Hierbei sind besonders die Eisenstäbe E_1 und E_2 zu vergleichen, welche nahezu gleiche Momente haben, obgleich das Gewicht des dickeren Stabes mehr als doppelt soviel beträgt, wie dasjenige des dünneren.

Die hier gezogenen Folgerungen treten noch deutlicher hervor, wenn man die Werthe von M auf die Volumeneinheit der Eisenmasse umrechnet.

Es war nach Gl. (11):

$$M = k v \pi P^2.$$

Werden hierin M und P in absolutem Maass ausgedrückt und der entsprechende Werth für v eingesetzt, so repräsentirt k das magnetische Moment der Volumeneinheit der Eisenmasse. Ich habe hierbei die Einheiten mm und sec zu Grunde gelegt. Die Grösse M bezog sich bisher auf die Widerstandseinheit von Siemens und auf Secunden. Um auf absolutes Maass gebracht zu werden, wurde dieselbe mit dem Factor $0{,}95 \cdot 10^{10}$ multiplicirt. Es war ferner:

$$P = \frac{4\pi z}{d} = 165{,}4.$$

Das Volumen v wurde aus dem Gewicht in Milligrammen, dividirt durch das specifische Gewicht (7,7), gefunden. Auf diese Weise ergaben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe von k, welche sich auf die kleinsten und grössten Werthe der beobachteten Schwingungszahl beziehen.

Tabelle V.

	r	k		r	k
B_1	31,9	6,18	B_4	32,7	9,17
„	12,7	6,92	„	15,1	8,74
B_2	35,3	9,46	B_5	31,4	8,60
„	11,0	12,17	„	12,4	6,41
B_3	32,5	5,28	E_1	25,9	7,82
„	14,4	5,78	„	12,2	5,04
St_1	41,7	2,82	St_2	42,7	3,55
„	12,6	3,00	„	15,0	3,03

Die Zahlen k können als Maass für die Amplituden der in der Volumeneinheit Eisen inducirten Momente angesehen werden. Sie zeigen deutlich die charakteristischen Unterschiede der verschiedenen Kerne. Die kleinsten Werthe kommen beim Stahl vor; dann folgt das harte Eisen B_3, während die dünnen Drähte aus weichem Eisen (B_2) die grössten Werthe haben.

III. Theorie der Induction von Magnetismus durch veränderliche Kräfte bei Berücksichtigung der inneren Inductionsströme.

Von den bei der wechselnden Magnetisirung der Eisenmasse in Betracht kommenden Einflüssen kann, wie früher

bemerkt, die Mitwirkung der Inductionsströme, welche in derselben infolge des veränderlichen, magnetischen Zustandes entstehen, durch Rechnung angegeben werden. Hierbei liegen die folgenden, allgemeinen Gleichungen zu Grunde, welche den Abhandlungen von G. Kirchhoff[1]) und von H. v. Helmholtz[2]) entnommen wurden.

Es möge bezeichnet werden durch: α, β, γ die Componenten der magnetischen Momente der Eisenmasse im Punkt x, y, z, durch P das Potential der von aussen wirkenden, magnetisirenden Kräfte, welche als Functionen der Zeit anzusehen sind. Ferner sei k die Magnetisirungsfunction, welche bei den kleinen hier in Betracht kommenden Kräften als constant angesehen werden soll, und Q das Potential der in der ganzen Eisenmasse inducirten Momente für den Punkt x, y, z. Diese Function kann man setzen:

$$(19)\quad \begin{cases} Q = -\int dx'\,dy'\,dz' \left\{ \alpha' \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta' \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma' \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} \\ \text{oder } = -\int \dfrac{d\omega}{r} \{\alpha' \cos(n,x) + \beta' \cos(n,y) + \gamma' \cos(n,z)\}, \end{cases}$$

wo: $$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.$$

Endlich seien u', v', w' die Componenten der inducirten, electrischen Ströme im Punkte x' y' z'. Setzt man dann:

$$(20)\quad \begin{cases} U = \int \dfrac{u'\,dx'\,dy'\,dz'}{r}, \quad V = \int \dfrac{v'\,dx'\,dy'\,dz'}{r}, \\ W = \int \dfrac{w'\,dx'\,dy'\,dz'}{r}, \end{cases}$$

so lauten die Gleichungen für die magnetischen Momente nach den drei Axen:

$$(21)\quad \begin{cases} \alpha = -k \left\{ \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z} \right\} \\ \beta = -k \left\{ \dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x} \right\} \\ \gamma = -k \left\{ \dfrac{\partial P}{\partial z} + \dfrac{\partial Q}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} \right\}. \end{cases}$$

1) Kirchhoff, Pogg. Ann. Egbd. 5. p. 1—15. 1870. Gesamm. Abh. p. 223—237.

2) v. Helmholtz, Borchardt's Journ. 72. p. 57—129. 1870. Gesamm. Abh. p. 611—618.

Von den hier vorkommenden Functionen genügen P und Q den Gleichungen:

(22) $$\Delta P = \Delta Q = 0,$$ dagegen ist:

(23) $$\Delta U = -4\pi u, \quad \Delta V = -4\pi v, \quad \Delta W = -4\pi w.$$

Hierzu kommen diejenigen Gleichungen, welche zur Berechnung der Stromcomponenten dienen. Bezeichnet man mit φ das Potential der freien Electricität im Punkt x, y, z, mit λ das Leitungsvermögen des Eisens und mit X, Y, Z, die Componenten der inducirten electromotorischen Kraft, so ist:

(24) $$\left\{\begin{array}{c} u = \lambda\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + X\right\}, \quad v = \lambda\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial y} + Y\right\}, \\ w = \lambda\left\{-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + Z\right\}. \end{array}\right.$$

Die durch die Veränderungen der magnetischen Momente der Eisenmasse entstehenden, electromotorischen Kräfte haben die folgenden Componenten:

(25) $$X = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad Z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y},$$

(26) $$\left\{\begin{array}{l} \text{wo:} \quad L = \int \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\frac{\partial\alpha'}{\partial t}, \quad M = \int \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\frac{\partial\beta'}{\partial t}. \\ \qquad\qquad N = \int \frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}\frac{\partial\gamma'}{\partial t}. \end{array}\right.$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass:

(27) $$\Delta L = -4\pi\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \quad \Delta M = -4\pi\frac{\partial\beta}{\partial t}, \quad \Delta N = -4\pi\frac{\partial\gamma}{\partial t}.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich einige Folgerungen ziehen.

Nach Gl. (26) und (19) ist:

(28) $$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = -\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Vollzieht man ferner die Operation Δ an den Gleichungen (21), so ist mit Rücksicht auf (23):

$$\Delta\alpha = 4\pi k\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

oder bei Benutzung der Gleichungen (24) und (25):

$$\Delta\alpha = 4\pi k\lambda\left\{\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial z}\right\},$$

also nach (27) und (28):

$$\Delta\alpha = 4\pi k\lambda\left\{4\pi\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 Q}{\partial t\,\partial x}\right\}. \tag{29}$$

Für die beiden anderen Componenten der inducirten, magnetischen Momente folgen analoge Gleichungen.

Hieraus ist zu entnehmen, dass bei veränderlichem Magnetismus einer Eisenmasse unter der gleichzeitigen Einwirkung der Inductionsströme Vorgänge stattfinden, welche mit der Wärmeleitung eine gewisse Analogie haben. Sind dieselben der Art, dass der Einfluss von Q klein ist, so vollzieht sich die Leitungserscheinung für jede Componente besonders.

Wir gehen nun zu dem hier zu betrachtenden, speciellen Problem über. Die Eisenmasse bestehe aus einem Cylinder (Radius R) von unbegrenzter Länge. In jedem Punkte desselben wirke eine magnetisirende Kraft in Richtung der Cylinderaxe, überall von gleicher Grösse, aber mit der Zeit veränderlich. Bei diesen Voraussetzungen werden die inducirten, magnetischen Momente ebenfalls der Axe parallel und können ihrer Grösse nach nur von ihrer Entfernung von der Axe abhängen. Lässt man die z-Axe mit derselben zusammenfallen und setzt:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

so ist:

$$\alpha = \beta = 0,$$

während γ eine Function von t und ϱ ist. Weiter kann man setzen:

$$L = M = 0, \quad Q = 0.$$

Die Inductionsströme der Eisenmasse verlaufen in Kreisen, deren Mittelpunkte auf der z-Axe liegen. Man kann also weiter annehmen, dass:

$$w = 0, \quad W = 0, \quad \varphi = 0,$$

Die magnetisirende Kraft der Spirale sei eine periodische Function der Zeit, also:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = a\,.\cos(n\pi t).$$

Dann ist das aufzulösende Gleichungssystem:

$$\gamma = -k\left\{a\cos(n\pi t) + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right\}, \tag{30}$$

$$u = \lambda\frac{\partial N}{\partial y}, \quad v = -\lambda\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{31}$$

$$\Delta U = -4\pi u, \quad \Delta V = -4\pi v, \tag{32}$$

$$\Delta N = -4\pi \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \tag{33}$$

Da, wie oben bemerkt, γ nur von ϱ und t abhängt, so gilt dasselbe auch von der Function N. Man kann denselben die folgende Form geben:

$$\gamma = \cos(n\pi t)\sum_0^\infty A_m \varrho^{2m} + \sin(n\pi t)\sum_0^\infty B_m \varrho^{2m}. \tag{34}$$

$$N = \cos(n\pi t)\sum_1^\infty C_m \varrho^{2m} + \sin(n\pi t)\sum_1^\infty D_m \varrho^{2m}. \tag{35}$$

Nach Gleichung (33) bestehen die folgenden Beziehungen zwischen den Coëfficienten der beiden Reihen:

$$D_m = \frac{\pi^2 n \cdot A_{m-1}}{m^2}, \quad C_m = -\frac{\pi^2 n \cdot B_{m-1}}{m^2}. \tag{36}$$

Führt man Polarcoordinaten ein und setzt:

$$x = \varrho \cos\vartheta, \quad y = \varrho \sin\vartheta, \qquad \text{so ist:}$$

$$u = \lambda \sin\vartheta \frac{\partial N}{\partial \varrho}, \quad v = -\lambda \cos\vartheta \frac{\partial N}{\partial \varrho}.$$

Man übersieht daraus, dass man setzen kann:

$$U = F.\sin\vartheta, \quad V = -F.\cos\vartheta,$$

wo F nur von ϱ und t abhängt und nach (32) der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial F}{\partial \varrho} - \frac{F}{\varrho^2} = -4\pi\lambda \frac{\partial N}{\partial \varrho}$$

genügen muss. Setzt man:

$$F = \cos(n\pi t)\sum_0^\infty G_m \varrho^{2m+1} + \sin(n\pi t)\sum_0^\infty H_m \varrho^{2m}, \tag{37}$$

so ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den Coëfficienten:

$$\begin{cases} G_m(m+1) = -2\pi\lambda C_m = \dfrac{2\pi^3 n \lambda B_{m-1}}{m^2}, \\ H_m(m+1) = -2\pi\lambda D_m = -\dfrac{2\pi^3 n \lambda A_{m-1}}{m^2}. \end{cases} \tag{38}$$

Die Coëfficienten G_0 und H_0 bleiben hierbei unbestimmt. Sie ergeben sich aber leicht, wenn man berücksichtigt, dass U und V Potentiale des mit einer gewissen Massendichtigkeit erfüllten Eisenkörpers sind. An der Grenze desselben

müssen daher die Potentiale selbst und ihre ersten Differentialquotienten continuirlich sich ändern. Bezeichnet man die Werthe von F für äussere, resp. innere Punkte mit F_a, resp. F_i, so muss für: $\varrho = R$,

$$F_a = F_i, \quad \frac{dF_a}{d\varrho} = \frac{dF_i}{d\varrho} \text{ sein.}$$

Hieraus folgt:

$$G_0 = -\sum_1^\infty (m+1)\, G_m R^{2m}, \quad H_0 = -\sum_1^\infty (m+1)\, H_m R^{2m},$$

oder nach (38):

$$(39) \quad \begin{cases} G_0 = -2\pi^3 n\lambda \sum_1^\infty \frac{B_{m-1}}{m^2} R^{2m}. \\ H_0 = +2\pi^3 n\lambda \sum_1^\infty \frac{A_{m-1}}{m^2} R^{2m}. \end{cases}$$

Bildet man schliesslich die Hauptgleichung (30), welcher man die Form:

$$\gamma = -k\left\{a\cos(n\pi t) - \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{F}{\varrho}\right)\right\}$$

geben kann, so kommen in derselben nur noch die beiden Reihen von Coëfficienten A und B vor, welche sich nach einem recurrenten Gesetz auf A_0 und B_0 zurückführen lassen.

Setzt man:

$$(40) \qquad 4\pi^3 kn\lambda = \varkappa, \qquad \text{so ist:}$$

$$(41) \qquad A_m = +\frac{\varkappa B_{m-1}}{m^2}, \quad B_m = -\frac{\varkappa A_{m-1}}{m^2}.$$

Ferner ist: $A_0 = -ka + 2kG_0$, $B_0 = 2kH_0$,

oder nach (39) und (41):

$$A_0 = -ka - \sum_1^\infty A_m R^{2m}, \qquad B_0 = -\sum_1^\infty B_m R^{2m}.$$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen zur Berechnung von A_0 und B_0:

$$A_0 . S + B_0 S' = -ka, \quad B_0 S - A_0 S' = 0,$$

in denen:

$$(42) \quad \begin{cases} S = 1 - \frac{\varkappa^2 R^4}{(1.2)^2} + \frac{\varkappa^4 R^8}{(4!)^2} - \ldots\ldots \\ S' = \varkappa R^2 - \frac{\varkappa^3 R^6}{(3!)^2} + \frac{\varkappa^5 R^{10}}{(5!)^2} \ldots\ldots \end{cases}$$

gesetzt wurde. Also:

$$(43) \qquad A_0 = \frac{-ka \cdot S}{S^2 + S'^2}, \quad B_0 = \frac{-ka \cdot S'}{S^2 + S'^2}.$$

Drückt man alle A_m und B_m durch A_0 und B_0 aus und setzt die gefundenen Werthe in den Ausdruck für γ ein, so erhält man:

$$(44) \quad \gamma = -\frac{-ka}{S^2+S'^2}\{\cos(n\pi t)[S\sigma + S'\sigma'] + \sin(n\pi t)[S'\sigma - S\sigma']\},$$

wenn zur Abkürzung:

$$(45) \qquad \begin{cases} \sigma = 1 - \frac{\varkappa^2 \varrho^4}{(1\,.\,2)^2} + \frac{\varkappa^4 \varrho^8}{(4!)^2} - \cdots \\ \sigma' = \varkappa\varrho^2 - \frac{\varkappa^3 \varrho^6}{(3!)^2} + \cdots\cdots \end{cases}$$

gesetzt wird.

Gleichung (44) enthält die Lösung des gestellten Problems.

Die inducirten, magnetischen Momente γ sind ebenfalls periodische Functionen der Zeit, aber mit einem gewissen Phasenunterschied gegen die magnetisirende Kraft: $a\cos(n\pi t)$.

Die Componenten der Inductionsströme kann man ebenfalls aus γ nach den Gleichungen:

$$4\pi k u = -\frac{\partial \gamma}{\partial y}, \quad 4\pi k v = +\frac{\partial \gamma}{\partial x} \text{ berechnen.}$$

Gibt man dem Ausdrucke für γ die Form:

$$\gamma = -ka \cdot f \cdot \cos(n\pi t - \psi),$$

so ist:

$$(46) \qquad f = \sqrt{\frac{\sigma^2 + \sigma'^2}{S^2 + S'^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{S'\sigma - S\sigma'}{S\sigma + S'\sigma'}.$$

Der Factor f gibt den Einfluss der inneren Inductionsströme auf die Amplitude des magnetischen Momentes. Derselbe ist kleiner als 1, sodass eine Schwächung derselben stattfindet. Ferner ist ψ die Phasenverzögerung. Beide Grössen sind Functionen des Abstandes ϱ des betreffenden Punktes von der Axe.

Für Punkte der Cylinderfläche, $\varrho = R$, ist:

$$f = 1, \quad \psi = 0,$$

für Punkte der Axe, $\varrho = 0$,

$$f = \frac{1}{\sqrt{S^2 + S'^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{S'}{S}.$$

Für die äussere Cylinderfläche findet also weder eine Phasenverzögerung noch eine Schwächung der inducirten

Momente statt. Der Einfluss der Inductionsströme wird um so grösser, je näher der Punkt der Axe liegt.

Bei den in Abschnitt I und II mitgetheilten Versuchen war die Amplitude und Phase des magnetischen Gesammtmomentes des Stabes bestimmt worden. Dasselbe erhält man durch Summirung der Momente eines Querschnittes. Bezeichnet man dasselbe mit Γ, so ist:

$$\Gamma = \int \gamma \, do .$$

Setzt man:

$$(46) \qquad \begin{cases} \Sigma = 1 - \frac{1}{3}\frac{\varkappa^2 R^4}{(1.2)^2} + \frac{1}{5}\frac{\varkappa^4 R^8}{(1.2.3.4)^2} - \cdots \\ \Sigma' = \frac{\varkappa R^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{\varkappa^3 R^6}{(1.2.3)^2} + \cdots \end{cases}$$

so erhält man:

$$\Gamma = \frac{-k a \pi R^2}{(S^2 + S'^2)} \{\cos(n\pi t)[S.\Sigma + S'\Sigma'] + \sin(n\pi t)[S'\Sigma - S\Sigma']\}$$

oder in der Form:

$$(47) \qquad \Gamma = -k a \pi R^2 . F . \cos(n\pi t - \varphi), \text{ wo:}$$

$$(48) \qquad F = \sqrt{\frac{\Sigma^2 + \Sigma'^2}{S^2 + S'^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{S'\Sigma - S\Sigma'}{S\Sigma + S'\Sigma'} .$$

Die letzten Formeln zeigen, dass auch das Gesammtmoment eine Veränderung seiner Amplitude und eine Phasenveränderung erfährt. Die beiden Grössen: F und φ sind Functionen von $\varkappa R^2$, wofür abgekürzt ω geschrieben werden soll, sodass:

$$(49) \qquad \omega = 4\pi^3 k n \lambda R^2 .$$

Zum Vergleich dieser Formeln mit den früher erhaltenen Resultaten muss die Grösse ω für die einzelnen Eisenkerne berechnet werden. Von den in derselben vorkommenden Grössen ist die Leitungsfähigkeit nicht direct bestimmt worden. Die Angaben über dieselbe schwanken zwischen den Werthen 7 bis 10, wenn die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers gleich 1 gesetzt wird. Nimmt man die Zahl 8 an und setzt 1 S.-E. $= 0{,}95 . 10^{10} \frac{\text{mm}}{\text{sec}}$, so ist:

$$\lambda = 8{,}42 . 10^{-7} .$$

Was ferner die Magnetisirungszahl k betrifft, so kann man nach Tabelle V für Stahl die Zahl 3 nehmen. Für die dickeren Eisenkerne wird etwa die Zahl 8 zu benutzen sein.

Nimmt man endlich die Schwingungszahl 100 an, so erhält man die folgenden Werthe für ω:

$B_4 \ldots 0{,}51$, $B_5 \ldots 1{,}03$, $E_1 \ldots 1{,}34$, $St_1 \ldots 0{,}28$, $St_2 \ldots 1{,}13$.

Für die aus dünneren Drähten bestehenden Bündel B_1, B_2, B_3 würde man erheblich kleinere Werthe finden. Da die grössten Werthe von ω die Zahl 1 nicht erheblich überschreiten, so kann man die Reihenentwickelungen für S, S', Σ, Σ' schon bei einer kleinen Gliederzahl abbrechen.

Setzt man:

$$S = 1 - \frac{\omega^2}{4}, \quad S' = \omega\left(1 - \frac{\omega^2}{36}\right),$$

$$\Sigma' = 1 - \frac{\omega^2}{12}, \quad \Sigma' = \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{\omega^2}{72}\right),$$

so erhält man:

$$(50) \qquad F = \sqrt{\frac{1 + \frac{\omega^2}{12}}{1 + \frac{\omega^2}{2}}}. \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega}{2}\,\frac{1 + \frac{\omega^2}{24}}{1 + \frac{\omega^2}{6}}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass bei kleineren Werthen von ω die Tangente der Phasendifferenz dieser Grösse proportional ist, dass dieselbe also:

1. der Schwingungszahl,
2. dem Quadrat des Radius,
3. der Magnetisirungszahl

proportional zunimmt. Zu denselben Schlüssen führten die in der Tabelle I mitgetheilten Beobachtungen, welche demnach durch die Rechnung bestätigt werden. Insbesondere erklärt sich daraus, dass die Stahlkerne verhältnissmässig kleinere Phasendifferenzen zeigten, als die Eisenkerne.

Für die dickeren Kerne habe ich die Zahlenwerthe von $\operatorname{tg}\varphi$ nach Gl. (50) berechnet und mit den beobachteten für die Schwingungszahl $n = 100$ verglichen. Die beobachteten Werthe ergaben sich aus Tabelle I, indem die Werthe der Spalte $\tau \operatorname{tg}\varphi$ durch den entsprechenden Werth $\tau = 20$ dividirt wurden.

Tabelle VI.

	tg φ beob.	tg φ ber.
B_4	0,28	0,25
B_5	0,41	0,46
E_1	0,44	0,56
St_1	0,04	0,14
St_2	0,37	0,49

Die Uebereinstimmung kann bei Berücksichtigung der ungenauen Voraussetzungen der Rechnung als genügend bezeichnet werden. Jedenfalls ist bemerkenswerth, dass die berechneten Werthe meist grösser sind als die beobachteten. Der Einfluss eines inneren Reibungswiderstandes, welcher die magnetischen Veränderungen der Eisenmasse verzögert, ist also bei diesen schnellen Veränderungen der magnetisirenden Kraft nicht zu constatiren.

Der Factor F repräsentirt die Verkleinerung der Amplitude des magnetischen Momentes. Berechnet man denselben unter der Annahme $\omega = 1$, so ergibt sich die Zahl: 0,85. Die inneren Inductionsströme verkleinern also in diesem Fall das magnetische Moment um 15 Proc. Es ist leicht zu übersehen, dass bei noch grösserer Schwingungszahl der Einfluss desselben schnell wächst, sodass hieraus die an die Tabellen III und IV geknüpften Folgerungen ihre Bestätigung finden.

Man kann daher als Endresultat der vorstehenden Untersuchung den folgenden Satz aussprechen:

Wirken auf cylindrische Eisen- und Stahlkerne magnetisirende Kräfte, welche überall gleich und gleich gerichtet, aber periodische Functionen der Zeit sind, so folgen die Veränderungen der magnetischen Momente den bekannten Gesetzen für constante Kräfte, vorausgesetzt, dass man die bei schnellem Stromwechsel sehr erhebliche Einwirkung der inneren Inductionsströme in den Eisenkernen mit berücksichtigt.

Halle a. S., im Februar 1884.

VIII. *Absolute barometrische Bestimmungen unter Controle des Vacuums durch electrische Lichterscheinungen;* *von Leo Grunmach.*

(Hierzu Taf. V Fig. 6 u. 7.)

(Auszug des Hrn. Verfassers aus den von der Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission herausg. Metronomischen Beiträgen Nr. 4. Berlin 1883.)

I. Einleitung.

Die angewandte Methode, welche in Kürze bereits in den Metronomischen Beiträgen Nr. 3 beschrieben ist[1]), beruht auf den electrischen Entladungserscheinungen in einer an dem sogenannten Vacuum einer Barometerröhre angeschmelzten Geissler'schen Röhre; diese Entladungserscheinungen gewähren uns noch über die höchsten Grade der Verdünnung, zu deren Bestimmung selbst die besten der für die Druckmessung von Gasen üblichen Instrumente nicht mehr hinreichen, genügenden Aufschluss. Zwar sind, für geringe Drucke wenigstens, bestimmte quantitative Beziehungen zwischen den Aenderungen der Entladungserscheinungen in Geissler'schen Röhren und den Aenderungen der absoluten Drucke der in ihnen eingeschlossenen Gase noch nicht festgestellt. Ja die vielfach verbreitet gewesene Ansicht, dass der höchste erreichbare Grad der Verdünnung in einer Vacuumröhre dadurch charakterisirt werde, dass die Röhre für electrische Entladungen vollkommen undurchlässig sei, bedarf nach den neueren Untersuchungen insofern einer Modification oder Ergänzung, als der Durchgang der Electricität wesentlich durch die Beschaffenheit der Electroden bedingt ist, sodass z. B. durch eine mit der Quecksilberluftpumpe in Verbindung stehende Geissler'sche Röhre mit drahtförmigen Electroden von einem bestimmten Momente des Evacuirens an electrische Entladungen nicht mehr hindurchgehen, während bei demselben Grade der Verdünnung

1) Metronomische Beiträge Nr. 3. Thermometrische Untersuchungen. Herausg. von W. Foerster. Berl. 1881. (Siehe die Vergleichungen von Quecksilberthermometern mit dem Luftthermometer von Dr. L. Grunmach, p. 46—47.)

ein Electricitätsdurchgang sehr wohl noch stattfinden kann, wenn man die drahtförmigen Electroden ceteris paribus durch kugel- oder cylinderförmige ersetzt. Indessen kann das Auftreten gewisser Erscheinungen, wie das nur noch vereinzelte Hindurchgehen der Electricität bei verhältnissmässig starken Inductionsströmen, oder das Fluoresciren der Röhre mit Sicherheit als ein Maass für ein Barometervacuum[1]) angesehen werden, da in diesem Falle bei weiter fortgesetztem Evacuiren trotz der überraschend grossen Mannigfaltigkeit in den dabei eintretenden optischen Veränderungen der Entladungserscheinungen, welche offenbar als eine Folge der weiteren Druckabnahme zu betrachten ist, kathetometrisch mit den uns zu Gebote stehenden Messinstrumenten diese Druckabnahme in keiner Weise mehr constatirt werden konnte. Diese aus den optischen Veränderungen allein gefolgerte weitere Druckabnahme muss deshalb unterhalb der Genauigkeitsgrenze, mit welcher die verticalen Längen der Quecksilbersäulen kathetometrisch bestimmt werden konnten, liegen, und demgemäss auch unterhalb der Genauigkeitsgrenze, welche wir bei den barometrischen Messungen zur Zeit erreichen, nämlich etwa innerhalb eines Hundertels des Millimeters.

---

1) Unter „Barometervacuum" im besonderen Sinne soll hier ein Raum verstanden werden, in welchem der Druck nur noch ganz überwiegend durch die Spannkraft des in ihm enthaltenen gesättigten Quecksilberdampfes bedingt wird. Nach den Versuchen von E. B. Hagen, (Wied. Ann. **16.** p. 610. 1882), ist der Betrag des letzteren Druckes ansehnlich kleiner, als er nach den Regnault'schen Fundamentalversuchen angenommen zu werden pflegte, nämlich bei Temperaturen unter +20° C. kaum grösser als 0,02 mm, während H. Hertz, (Verhandl. d. Phys. Ges. in Berl. 1882, Nr. 10) mittelst einer theoretisch abgeleiteten Formel, welche seine nur bei höheren Temperaturen (60 bis 200° C.) ausgeführten Beobachtungen in befriedigender Weise darstellt, die Spannung des Quecksilberdampfes bei +20° C. zu 0,0013 mm berechnet. Unterhalb dieses Betrages kann der Druck in einem Quecksilberbarometer natürlich niemals und in einer mittelst der Quecksilberluftpumpe hergestellten und darauf abgeschlossenen Vacuumröhre nur dann gebracht werden, wenn es möglich ist, die in ihr enthaltenen Quecksilberdämpfe durch absorbirende Medien zu beseitigen. Im Anschlusse an die barometrische Prüfung sind auch bei der Normal-Aichungs-Commission bereits im Jahre 1877 vom Verfasser Versuche über die Absorption von Quecksilberdampf durch Selen angestellt worden, über welche gelegentlich an anderer Stelle berichtet werden soll.

II. Herstellung der Normal-Heberbarometerröhre und Beschreibung der Versuchsanordnung.

Die Normal-Heberbarometerröhre hatte ursprünglich folgende, in Fig. 6 abgebildete Einrichtung: Die mit der Geissler'schen Röhre *g* versehene Heberbarometerröhre *Q* von 12 mm innerem Durchmesser, deren beide Schenkel zur Erzielung weiter, von den Capillaritätswirkungen möglichst befreiter Quecksilberoberflächen in einem dem mittleren Atmosphärendrucke entsprechenden Höhenabstande zu gleich grossen cylindrischen Gefässen von 30 mm innerem Durchmesser erweitert sind, war mittelst des Schliffstückes *a* an das Trockengefäss einer Geissler'schen Quecksilberluftpumpe befestigt worden. Die Barometerröhre selbst, sowie die electrische Röhre, sind durch Hähne abschliessbar. Der freie Schenkel, dessen Länge mindestens halb so gross als die ganze Barometerröhre sein muss, ist an seinem oberen Ende zur bequemeren Einfüllung des Quecksilbers trichterförmig erweitert. Die Füllung dieser Barometerröhre, welche bei der ersten Beobachtungsreihe zur Anwendung kam, mit möglichst luftfreiem Quecksilber war anfänglich mit Schwierigkeiten verknüpft. Mittelst eines langen bis an den Boden des freien Schenkels reichenden, mit einer feinen Oeffnung versehenen Trichters wurde nämlich das Quecksilber eingefüllt; trotz der grössten Sorgfalt gelang es aber nicht, zu verhüten, dass mit dem langsam herabfallenden Quecksilber Luftbläschen mitgerissen wurden, welche namentlich an den Wänden der Erweiterung des offenen Schenkels mit grosser Hartnäckigkeit hafteten und weder durch mechanische Erschütterungen noch durch Erwärmen fortgeschafft werden konnten. Durch Anwendung eines kleinen Kunstgriffes wurde bei der zweiten Füllung dieser Uebelstand beseitigt. Anstatt nämlich die ganze zur vollständigen Füllung der Barometerröhre erforderliche Quecksilbermenge mit einem mal durch den Hülfstrichter in die Röhre zu giessen, wurde zuerst nur eine ganz kleine Menge Quecksilber hineingegossen, sodass das Niveau desselben in beiden Schenkeln etwa bis zu den Marken *dd* reichte. Dieses Quecksilber enthielt nun stets eine Anzahl grösserer oder kleinerer Luftblasen. Wurde

nun aber sehr langsam evacuirt, so stieg dem entsprechend auch das Quecksilber aus dem offenen Schenkel sehr langsam in die eigentliche Barometerröhre, und in dem über *d* aufsteigenden Quecksilber war nunmehr nicht ein einziges Luftbläschen zu entdecken. Wurde nun ebenso langsam wieder Luft zugelassen, so ging das Quecksilber langsam aus dem geschlossenen in den offenen Schenkel zurück, die in letzterem befindliche Luft vor sich forttreibend. Diese Operation wurde mit der zuerst eingegossenen Quecksilbermenge einige mal wiederholt; das in dem Stücke *dd* enthaltene Quecksilber war jetzt möglichst luftfrei, mit einem guten Mikroskope liess sich nicht die Spur eines Luftbläschens erkennen. Alsdann wurde wieder eine kleine Menge Quecksilber hinzugegossen und genau in derselben Weise verfahren, und so fort, bis die Röhre mit der erforderlichen, durch einen Vorversuch leicht zu bestimmenden, Quecksilbermenge gefüllt war. Auf die Reinigung und Austrocknung der Röhre sowohl wie auf die Reinigung des Quecksilbers war die grösste Sorgfalt verwandt worden. Das Quecksilber wurde, nachdem es mehrere Wochen hindurch mit Eisenchlorid und verdünnter Salpetersäure behandelt worden war, mit Benzin und hierauf mit kochendem destillirten Wasser ausgewaschen, dann getrocknet und während der Füllung, welche durch mit sehr feinen Oeffnungen versehene Doppeltrichter aus Filtrir- und Kanzleipapier stattfand, auf 60 bis 80° C. erwärmt. Die Barometerröhre wurde, nachdem sie mit Salpetersäure gereinigt, dann mit heissem destillirten Wasser ausgespült und mit Alkohol ausgewaschen war, einerseits mit vier Trockenröhren, welche mit concentrirter Schwefelsäure, Chlorcalcium, Phosphorsäureanhydrid und caustischem Kali gefüllt waren, andererseits mittelst des Stopfens *a* mit der Quecksilberluftpumpe verbunden und blieb in dieser Verbindung, bevor die Füllung ausgeführt wurde, drei Tage, während welcher unter beständiger Erhitzung aller Theile der Röhre die langsam einströmende Luft fortwährend evacuirt wurde. Ein sicheres Merkmal für die Trockenheit der Röhre war dadurch gegeben, dass wenn die letzte der vier Trockenröhren luftdicht verschlossen und dann evacuirt wurde, die Verdünnung so-

weit getrieben werden konnte, dass die Geissler'sche Röhre, durch welche schon während des Evacuirens ein von einem kräftigen Inductorium gelieferter, electrischer Strom ging, vollständig fluorescirte. Erst als dieser Zustand erreicht war, wurden die Trockenröhren von der Barometerröhre entfernt und hierauf die Füllung in der vorhin beschriebenen Weise ausgeführt. Die Reihenfolge der optischen Aenderungen der Entladungserscheinungen in der Geissler'schen Röhre ist während der Herstellung des Barometers folgende: schon bei einem geringen Grade der Verdünnung — der wesentlich von der Entfernung der Electroden und der Intensität des Stromes abhängt — beginnt die Röhre zu leuchten, die Intensität des Leuchtens nimmt bei steigender Verdünnung bis zu einem Maximum zu, bald aber rasch ab, die Anzahl der Schichten wird bei weiter fortgesetztem Evacuiren immer geringer, aus dem Spectrum der Röhre verschwinden allmählich die den Stickstoff charakterisirenden Spectrallinien, und es bleiben vorzugsweise nur noch die Linien *F* und *G* des Wasserstoffes und einige Quecksilberlinien bestehen, die aber auch bald erblassen. Bei weiter fortgesetzter Verdünnung beginnt dann die Röhre zuerst in der Regel an ihrem negativen, dann an ihrem positiven Ende und schliesslich der ganzen Länge nach zu fluoresciren, endlich gehen gar keine oder doch nur vereinzelte electrische Entladungen durch dieselbe hindurch, und das Normal-Heberbarometer ist fertig. In dieser Form wurde es, wie bereits erwähnt, bei der ersten im Februar bis April 1877 ausgeführten Beobachtungsreihe angewandt.

Bei der zweiten, im August und September 1877 ausgeführten Beobachtungsreihe erfuhr die Normal-Heberbarometerröhre eine kleine Modification, durch welche aber die Füllung derselben mit möglichst luftfreiem Quecksilber in ausserordentlicher Weise erleichtert wurde. Zu dem Ende wurde, wie aus Fig. 7 ersichtlich, der freie Schenkel der Röhre rechtwinklig umgebogen und an seinem Ende mit einem in eine sehr feine, lange (hohle) Spitze ausgezogenen, Hahn *H* versehen, mit Hülfe dessen also sowohl Communication mit der äusseren Luft hergestellt, als auch die Röhre abgeschlossen werden konnte. Die Füllung wurde nun in

folgender Weise bewerkstelligt: Nachdem die Autsrocknung beendigt und die Verdünnung soweit getrieben war, dass die Geissler'sche Röhre ihrer ganzen Länge nach fluorescirte, wurde der Hahn *H*, während die Spitze sich unter der Oberfläche des sorgfältig gereinigten Quecksilbers, welches in einer Schale bis auf etwa 80° C. erwärmt wurde, befand, vorsichtig ein wenig geöffnet, sodass sich durch den äusseren Luftdruck zunächst die hohle Spitze langsam mit Quecksilber füllte; dann wurde der Hahn *H* geschlossen, und die durch das aufsteigende Quecksilber aus der Spitze in die Barometerröhre getriebene kleine Luftmenge, welche sofort das Fluorescenzlicht zum Verschwinden brachte, evacuirt, bis letzteres wieder auftrat, hierauf wurde der Hahn *H* wieder sehr wenig geöffnet, sodass der äussere Luftdruck das Quecksilber in ganz kleinen Tröpfchen in die Barometerröhre trieb, so lange bis letztere mit der erforderlichen Menge gefüllt war; während dieses Vorganges wurde beständig evacuirt und der electrische Strom durch die Geissler'sche Röhre hindurchgeschickt. Hierauf wurde der Hahn *H* geschlossen und nach Entfernung der Schale die Luft bei beständigem Evacuiren sehr langsam durch die Spitze in den freien Schenkel zugelassen. Man erhält auf diese Weise ein mit möglichst trockenem und möglichst luftfreiem Quecksilber gefülltes Normal-Heberbarometer. Der Hahn *H* hat noch den Vortheil, das Eindringen von Staub u. s. w. in den freien Schenkel zu verhüten, da man ihn nur während des Gebrauches des Barometers zu öffnen hat, sonst aber stets geschlossen halten kann. Aus demselben Grunde sind die neueren Glasbarometer von Ch. F. Geissler Sohn mit einem Glashahn versehen, ebenso ist bei den Fuess'schen Normalbarometern auf die Oeffnung im freien Schenkel ein Verschraubungsstück aufgekittet, auf welches beim Nichtgebrauche des Barometers eine Ueberwurfsschraube geschraubt wird. Es ist zweckmässig und rathsam, namentlich während des Anfangsstadiums der Herstellung des Barometers, aber auch später bei den Vergleichungen unaufhörlich Inductionsströme durch die Geissler'sche Röhre gehen zu lassen. Es zeigt sich nämlich, dass wenn die Verdünnung

soweit hergestellt ist, dass die Röhre in ihrer ganzen Ausdehnung fluorescirt, und man zu evacuiren aufhört, nach einer gewissen Zeit das Fluorescenzlicht schwächer wird, was auf eine, wenn auch kathetometrisch nicht zu bestimmende, Druckzunahme schliessen lässt. Der Vorgang erklärt sich wahrscheinlich dadurch, dass sowohl die Electroden Luftpartikelchen absorbirt enthalten, als auch die Glaswände der Röhre mit einer innig adhärirenden Gasschicht bekleidet sind, welche nach stunden- und tagelangem Hindurchgehen der electrischen Entladungen infolge der damit verbundenen mechanischen Erschütterungen erst allmählich losgerissen werden, um dann der Electricität als Träger zu dienen.

Zur Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers in der Normal-Heberbarometerröhre dienten bei der ersten Beobachtungsreihe anfänglich zwei, später drei sorgfältig bestimmte, in 0,1°C. getheilte Thermometer, von Ch. F. Geissler, welche sich in mit Quecksilber gefüllten Glasröhren von demselben Durchmesser, wie die Erweiterungen der Barometerröhre, unmittelbar in der Nähe der letzteren befanden, und zwar das eine am oberen, das zweite am unteren Ende und das dritte in der Mitte. Bei der zweiten Beobachtungsreihe genügte die Anwendung eines einzigen Thermometers, welches sich ebenfalls in einer mit Quecksilber gefüllten Glasröhre in der Mitte der Normal-Heberbarometerröhre befand. Neben der Normal-Heberbarometerröhre war in einem justirbaren Stative der bereits bei den thermometrischen Fundamentalmessungen angewandte, in Millimeter getheilte, in Bezug auf seine Theilung genau untersuchte Messingmaassstab aufgestellt. Die Messungen erfolgten mit Hülfe des Bamberg'schen Kathetometers in der Weise, dass das auf dem Prisma des letzteren verschiebbare und nivellirbare, mit Ocularmikrometer versehene Ablesefernrohr zuerst auf die Quecksilberniveaux und dann durch Drehung um die verticale Axe auf die Theilstriche des Maassstabes eingestellt wurde; und zwar wurden die ganzen Millimeter direkt abgelesen, die Bruchtheile desselben in Partes und Bruchtheilen von Partes des Ocularmikrometers ausgedrückt. Die Entfernung des Kathetometers von der

Barometerröhre betrug 0,955 m. Zur Vermeidung von Reflexbildern und zur scharfen Einstellung des Horizontalfadens auf die Quecksilberkuppen waren hinter den Erweiterungen der Barometerröhre verschiebbare Blenden in geeigneter Weise angebracht, welche zur unteren Hälfte aus schwarzem, zur oberen aus weissem transparenten Papier bestanden, um durch diffuses Licht, welches von hinreichend weit aufgestellten Lampen und Linsen geliefert wurde, die Quecksilberoberflächen zu beleuchten. Die hierdurch ermöglichten Einstellungen auf die Kuppen waren in Betracht der sonstigen Fehlerquellen, z. B. auch der Lichtbrechung an den Glaswänden, von durchaus genügender Schärfe und Unzweideutigkeit. Das zu prüfende Heberbarometer *N* hing, genau in derselben Höhe wie die Normal-Heberbarometerröhre, an einem justirbaren Stative.

III. Die eigentlichen Versuche.

Es liegen zwei Beobachtungsreihen vor, von denen die erste in den Monaten Februar und März des Jahres 1877 im Souterrainraume, die zweite im Monat August desselben Jahres in dem mit doppelten Zinkwänden bekleideten, für Präcisionstemperirung eingerichteten grossen Comparatorsaale des Dienstgebäudes der Normal-Aichungs-Commission ausgeführt wurde. Bei der ersten Reihe waren die Grenzen des Intervalles der Barometerstände ausserordentlich weite, es fanden während der Monate Februar und März Schwankungen des Barometers zwischen 730 mm und 770 mm statt, dagegen waren die Temperaturverhältnisse im Beobachtungsraume ungünstig. Die zweite Beobachtungsreihe wurde unter ungleich günstigeren äusseren Verhältnissen ausgeführt — sämmtliche Instrumente ruhten in dem auf nahezu constanter Temperatur zu erhaltenden Comporatorsaale auf fundirten Pfeilern —, dagegen betrug die Gesammtschwankung der Barometerstände während der ganzen Beobachtungsreihe nur 14,5 mm (749,5 mm bis 764 mm). Zur Erregung der Geissler'schen Röhre diente ein Ruhmkorff'sches Inductorium mittlerer Grösse, dessen primäre Spirale bei der ersten Beobachtungsreihe durch vier, bei der zweiten durch sechs frisch

angesetzte Chromsäureelemente gespeist wurde. Zur Spectralbeobachtung diente ein der Berliner Sternwarte gehöriges, gutes Hoffmann'sches Spectroskop à vision directe. Die Vergleichungen selbst fanden in der Weise statt, dass unmittelbar vor und unmittelbar nach jeder Kathetometereinstellung auf die Normal-Heberbarometerröhre Q je eine Ablesung am Heberbarometer N gemacht und das Mittel aus den beiden Ablesungen am Heberbarometer N mit der Ablesung an der Normal-Heberbarometerröhre Q combinirt wurde. Zwischen den Kathetometereinstellungen auf die obere, resp. auf die untere Quecksilberkuppe der Normal-Heberbarometerröhre fanden die Ablesungen der drei zur Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers dienenden Thermometer statt. Vor einer jeden Beobachtung wurde, wenn auch die Verdünnung soweit gediehen war, dass die Geissler'sche Röhre vollständig fluorescirte, oder dass nur noch vereinzelte electrische Entladungen durch dieselbe hindurchgingen, doch stets noch mehrere mal evacuirt, um durch die dadurch hervorgebrachten mechanischen Erschütterungen das Adhäriren des Quecksilbers an den Gefässwänden der Normal-Heberbarometerröhre zu verhindern und eine scharfe Kuppenbildung zu erzielen.

Die ausführliche Mittheilung der Versuche würde den Rahmen dieser Annalen überschreiten, es muss deshalb auf die Originalabhandlung hingewiesen werden; dagegen dürfte die Auseinandersetzung der Methode, nach welcher die Ausgleichungsrechnung ausgeführt wurde, vielleicht von einigem Interesse sein.

Es seien β_q und β_n die bereits auf die Normaltemperatur von 0° C. reducirten Ablesungen an den beiden Barometern, der Normal-Heberbarometerröhre Q und dem zu controlirenden Heberbarometer N, es seien ferner $V_q{}^0$ und $V_n{}^0$ die Volumina des angeblichen Vacuums, welches sich resp. über dem Quecksilber in der Normal-Heberbarometerröhre Q und dem Heberbarometer N befindet, wenn der Abstand des oberen Quecksilberniveaus von dem oberen Ende der Röhre, auf einen cylindrischen Raum von dem mittleren Querschnitt q_q, resp. q_n (ausgedrückt in Quadrat-

millimetern) des betreffenden Röhrenstückes reducirt, 100 mm beträgt, so dass:

$$V_q^0 = 100 . q_q, \qquad V_n^0 = 100 . q_n$$

ist; nennt man ferner die Depression des Barometerstandes, welche die in dem sogenannten Vacuum noch vorhandenen Lufttheilchen bei dem Volumen V_q^0 und V_n^0 bewirken, d_q^0 und d_n^0, und sind endlich die Volumina des sogenannten Vacuums bei den den reducirten Barometerständen β_q und β_n entsprechenden oberen Ablesungen V_q, resp. V_n, so erhält man für die wahren reducirten Barometerstände die Gleichungen:

$$\beta_q^0 = \beta_q + d_q^0 \frac{V_q^0}{V_q}, \qquad \beta_n^0 = \beta_n + d_n^0 \frac{V_n^0}{V_n}.$$

Zur Berechnung von V_q und V_n muss man die Länge des als Cylinder von nahezu gleichmässigem Querschnitt anzunehmenden Vacuumraumes kennen, welche zu jeder Ablesung des oberen Quecksilberniveaus gehört. Die Depression d_q^0 bei der Normal-Heberbarometerröhre kann man nach den vorangegangenen Erörterungen für den vorliegenden Zweck gleich Null annehmen, sodass nur die Kenntniss von V_n erforderlich ist. Da nun bei dem Heberbarometer N die Scala mittelst Trieb und Zahnstange beweglich ist und jedesmal so eingestellt wird, dass der Nullpunkt der Ablesung der Einstellung auf das untere Quecksilberniveau entspricht, so verändern sich die oberen Ablesungen, wenn die Röhrenquerschnitte beim oberen und unteren Quecksilberniveau gleich sind, um das Doppelte derjenigen Beträge, um welche sich der Abstand des oberen Quecksilberniveaus von dem oberen geschlossenen Ende der Röhre verändert, weil bei sinkendem oberen Quecksilberniveau und demgemäss steigendem unteren Quecksilberniveau der Nullpunkt der Scala um ebenso viel nach oben verschoben wird, als sich der auf das obere Quecksilberniveau einzustellende Index auf der Scala nach unten bewegt. Zur numerischen Bestimmung von V_n und zur Controle der obigen Annahmen in Bezug auf die Querschnitte der Röhre sind nun mehrere Messungen ausgeführt worden. Für die Ablesungen 752,50 mm und 761,20 mm sind die Längen des auf eine cylindrische

Form reducirten Vacuumraumes 58,15 mm, resp. 54,00 mm beobachtet worden, wobei das nahezu sphärisch abgerundete obere Ende der Röhre auf einen cylindrischen Körper reducirt worden ist. Aus diesen Messungen folgt die Gleichung:

$$V_n^{752,5} - V_n^{761,2} = q_n(58,15 - 54,00) = q_n \cdot 4,15,$$

während unter obigen Voraussetzungen, betreffend die Querschnitte des freien und geschlossenen Schenkels der Röhre in der Nähe der beiden Quecksilberniveaux, sein sollte:

$$V_n^{752,5} - V_n^{761,2} = q_n \tfrac{1}{2}(761,2 - 752,5) = q_n \cdot 4,35.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formel mit dem — übrigens nicht sehr genau zu erlangenden — Messungsresultate ist innerhalb der Genauigkeitsgrenze des letzteren ausreichend, so dass man hiernach für V_n die Formel annehmen kann:

$$V_n^{760} - V_n^{B_n} = \tfrac{1}{2} q_n (B_n - 760),$$

wo: $$V_n^{760} = [54,0 + \tfrac{1}{2}(761,2 - 760)]\, q_n = 54,6\, q_n,$$

und B_n eine beliebige Ablesung des Barometers bedeutet; es ist also:

$V_n^{B_n}$ oder schlechtweg $V_n = q_n [54,6 + \tfrac{1}{2}(760 - B_n)]$.

Man erhält demnach für die unter Berücksichtigung der Luft im sogenannten Vacuum reducirte Ablesung am Heberbarometer N den Ausdruck:

$$\beta_n^0 = \beta_n + d_n^0 \frac{100}{54,6 + \tfrac{1}{2}(760 - B_n)}.$$

und somit als Reduction der Angaben des Heberbarometers N auf diejenigen der Normal-Heberbarometerröhre Q:

$$\beta_q^0 - \beta_n^0 = \beta_q - \beta_n - d_n^0 \frac{100}{54,6 + \tfrac{1}{2}(760 - B_n)}$$

Setzt man nun:

$$\beta_q^0 - \beta_n^0 = l, \quad \beta_q - \beta_n = x, \quad -d_n^0 = y, \quad \text{und:}$$

$$\frac{100}{54,6 + \tfrac{1}{2}(760 - B_n)} = b,$$

so liefert die erste Beobachtungsreihe ein System von 57 Gleichungen von der Form $l = x + by$, aus welchem sich mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate für das Heberbarometer N die Correctionsformel ergibt:

$$C_{B_n} = -0{,}96 \text{ mm} + 0.26\left(\frac{100}{54{,}6 + \frac{1}{2}(760 - B_n)}\right) \text{mm},$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler, dessen Betrag, in Function des jeweiligen Barometerstandes, aus folgendem Täfelchen entnommen werden kann:

Barometerstand B_n	730	740	750	760	770	780 mm
Wahrscheinlicher Fehler	±0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,04 mm.

Hierzu kommt, wenn die Temperatur t stärker von $+15^0$ C. abweicht, noch das Correctionsglied:

$$+ 0{,}26\left(\frac{100}{54{,}6 + \frac{1}{2}(760 - B_n)}\right) \cdot 0{,}037 \frac{t - 15}{10} \text{ mm},$$

wo 0,037/10 den Ausdehnungscoëfficient der Luft pro 1^0 C. ausdrückt.

Die zweite Beobachtungsreihe, aus einer noch etwas grösseren Anzahl von Einzelbeobachtungen bestehend als die erste, und unter unverhältnissmässig günstigeren äusseren Verhältnissen hauptsächlich rücksichtlich der Constanz der Temperatur angestellt, zeigt aus letzterem Grunde eine wesentlich bessere innere Uebereinstimmung, umfasst aber leider nur ein Dritttheil des Schwankungsgebietes des Barometerstandes während der ersten Reihe. Der Einfluss der im Vacuum des Heberbarometers N enthaltenen kleinen Luftmenge als Function der Höhe des Barometerstandes tritt deshalb bei der zweiten Reihe auch nur in einem diesem Intervall entsprechenden numerisch geringerem Betrage auf.

Die angewandte Methode setzte uns in den Stand, das Vorhandensein einer kleinen Luftmenge im sogenannten Vacuum des Heberbarometers N mit Sicherheit nachzuweisen, wenn auch die erste Beobachtungsreihe starke, die Grösse von zufälligen Beobachtungsfehlern wohl überschreitende Differenzen aufweist. Diese Differenzen scheinen zum Theil in der Verschiedenheit der Form und Krümmung der Quecksilberkuppen des Barometers N bei steigendem, fallendem und constantem Barometerstande, besonders aber in den Abweichungen der Temperaturen des Quecksilbers in verschiedenen Höhenschichten ihre Ursache gehabt zu haben. Die erstere Fehlerquelle und die daraus sich ergebenden Fehler-

nester bilden seit mehreren Jahren den Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen seitens der Normal-Aichungs-Commission und sollen an anderer Stelle erörtert werden. Dass bei barometrischen Messungen die Verschiedenheit der Temperatur in verschiedenen Schichten der Quecksilbersäule von bedeutendem Einflusse ist, ist sofort einleuchtend, da eine Unsicherheit von 0,07° C. in der Kenntniss der Temperatur des Quecksilbers eine Unsicherheit von 0,01 mm bei der barometrischen Bestimmung zur Folge hat. Es erhellt hieraus zugleich die Unzulänglichkeit der Bestimmung der Temperatur des Quecksilbers eines Barometers mittelst eines einzigen (in der Regel in $^2/_3$ der ganzen Länge von unten an gerechnet) angebrachten Thermometers, wenn in Räumen von nicht constanter Temperatur, in denen für genügende Ausgleichung der Temperatur der verschiedenen Luftschichten nicht gesorgt ist, beobachtet wird. Die zweite Versuchsreihe verdankt ihre bessere innere Uebereinstimmung wesentlich dem Umstande, dass sie in dem auf nahezu constanter Temperatur sowohl rücksichtlich der Zeit als der räumlichen Vertheilung zu erhaltenden Comparatorsaale angestellt worden ist.

Berlin, im August 1883.

IX. *Zur Geschichte der Nobili-Guébhard'schen Ringe; von W. Voigt.*

Hr. Guébhard hat dem in seiner ersten „Berichtigung“[1]) gemachten Zugeständniss, dass seine Farbencurven mit den Kirchhoff'schen nicht innerlich verwandt oder identisch, sondern nur ihnen ähnlich sind, in einer zweiten „Berichtigung“[2]) das weitere zugefügt, dass die Aehnlichkeit nur unter ganz besonderen Umständen überhaupt nennenswerth ist. Dem stimme ich vollkommen zu.

1) A. Guébhard, Wied. Ann. **18.** p. 366. 1883.
2) A. Guébhard, Wied. Ann. **20.** p. 684. 1883.

Gerade wie in seiner ersten Berichtigung stellt aber Hr. Guébhard auch in seiner zweiten die Sache so dar, als wären die neuen Ansichten von Anfang an die seinen gewesen, und entbehre demgemäss meine Polemik durchaus eines Zieles.[1])

Speciell behauptet er, von jeher die geringe Dicke der Metallplatten als Bedingung dafür angegeben zu haben, dass die Curven seinem Gesetz folgen. Die von ihm als Beleg citirte Stelle[2]) enthält aber nur das Wort „une lame mince" ohne Begründung und ohne irgend eine Zahlenangabe, die zweite[3]) liefert sogar den Beweis, dass Hr. Guébhard früher dünnere Platten nur deshalb dickeren vorgezogen hat, weil er auf jenen mit geringeren electromotorischen Kräften hinreichend grosse Ringsysteme erhalten konnte. Er sagt nämlich:

„La minceur extrême (0,02 mm[4]) . . est une condition essentielle de réussite, quand on ne dispose pas de forces électromotrices très grandes."

Die Anmerkung dazu lautet überdies: „Becquerel . . . avait reconnu bien vite que tout se réduisait à une question d'intensité du courant; . . nous avons pu couvrir presque entièrement d'une figure analogue à celle du demi-plan d'Auerbach une plaque de laiton de 4 mm d'épaisseur sur 10 et 18 cm de côtés." [5])

1) Bezüglich des ersten Punktes begnüge ich mich damit, nur eine von vielen Stellen zu citiren (Compt. rend. **91**. p. 986. 1880): „Sans m'autoriser de ces concordances, d'ailleurs cherchées et prévues, pour affirmer la generalité absolue et la rigeur d'application d'un procédé experimental, que . . . . . , j'ose espérer que cette étude me fournira prochainement des résultats beaucoup plus généraux relativement à divers points de l'électrodynamique . . . ." Trotzdem bezeichnet Hr. Guébhard die Ansicht von der Identität seiner Curven mit den Kirchhoff'schen als ihm von Hrn. Dr. H. Meyer untergeschoben.

2) A. Guébhard, Compt. rend. **94**. p. 984. 1880.

3) A. Guébhard, Electricien. **2**. p. 434. 1882.

4) Dies für eine versilberte Kupferplatte.

5) Gegenwärtig verlangt Hr. Gnébhard umgekehrt schwache Ketten (vergl. Wied. Ann. **20**. p. 687); wie es scheint, gewinnt dann sein Gesetz wirklich eine physikalische Bedeutung (vergl. V. Volterra, Beibl. **8**. p. 127. 1884.)

Nirgends aber findet sich, soviel ich weiss, ein Wort darüber, dass mit wachsender Dicke der Platte die Curven ihre Gestalt ändern, und demgemäss die geringe Dicke eine principielle Bedeutung für das Guébhard'sche Gesetz habe. Ich hatte demnach auch keine Veranlassung, meine Theorie sogleich auf den complicirteren Fall (äusserst dünner Platten) anzuwenden, wo sich der weit einfachere (mässig dünner Platten) von selbst bot; und dies um so weniger, als in derselben Abhandlung, der das letzte Citat entnommen ist, sich folgender Absatz findet: „Je ne suis point disposé, pour ma part, à mettre ma formule en chiffres, sur commande, à l'usage des novices, on à fixer de confiance, avec le luxe de décimales, qui parait exigible de l'autre côté du Rhin, des grandeurs, que j'ai pu faire varier, sans inconvénient, du simple au décuple: l'extrême latitude des conditions opératoires où j'ai toujours trouvé le même succès, ne me permettra de faire un choix justifié qui après des longues études ...

Es ist von Interesse, zu sehen, wie Hr. Guébhard jetzt diese beiden Stellen deutet. (Zweite Berichtigung p. 685 u. 686.)

Im übrigen mag seine Berichtigung auf sich beruhen.

Göttingen, December 1883.

Berichtigungen.

Bd. XXI. (Fuchs) p. 274 Z. 10 v. u. lies Fig. 15 statt Fig. 17.
p. 275 Z. 20 v. o. lies Fig. 17 statt Fig. 15.
p. 277 Z. 6 v. o. lies $W + x = \frac{A}{E} W - r$
statt $W + x = \frac{A}{E} - r$.

„ (Clausius) p. 387 Z. 17 in Gleichung (III) lies i^2 statt i_1^2.

„ (Volkmann) p. 519 Z. 15 v. u. lies Worten statt Werthen.

„ (Voigt) p. 525 ist in Formel (2) bis (3) e, a, a' mit $2e$, $2a$, $2a$ zu vertauschen (entsprechend Bd. 19 p. 884 Z. 9 u. 10 v. u. $2f_5'$ und $2f_7'$ mit f_1' und f_7').
p. 528 Z. 3, 4, 8 u. 10 v. o. lies ϑ/ε statt ϑ.
p. 530 Z. 3 v. o. lies: Dass dies indess nach der Eigenschaft jener Kräfte, von den ponderabeln Theilen auszugehen, nicht undenkbar ist .....

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Fig. 7.

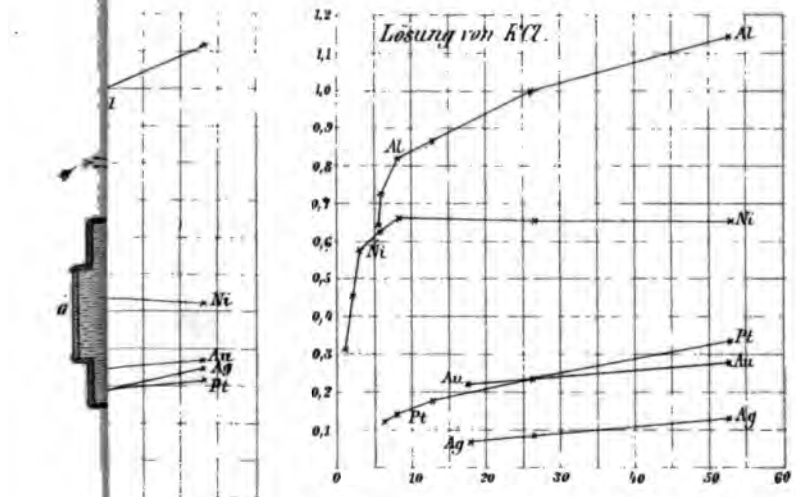
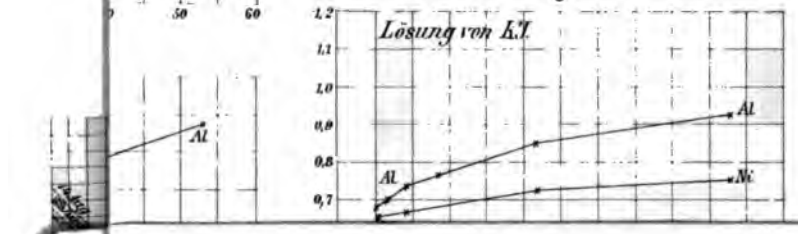
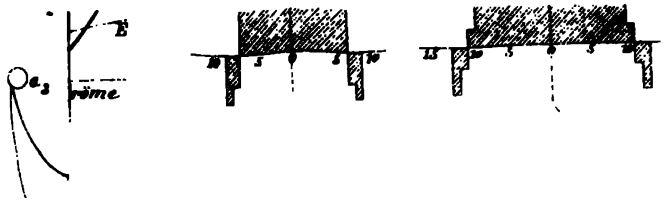

Lösung von KY.
Al
Ni
Pt
Au
Ag
0
10
20
30
40
50
60

Fig. 9.


Lösung von KJ.
Al
Ni
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2



Annalen d. Phys. u. Ch.

Fig. 1.

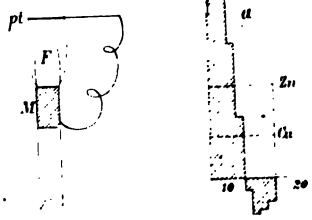


Fig. 4.

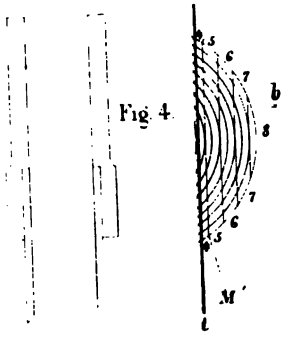


Fig. 5.

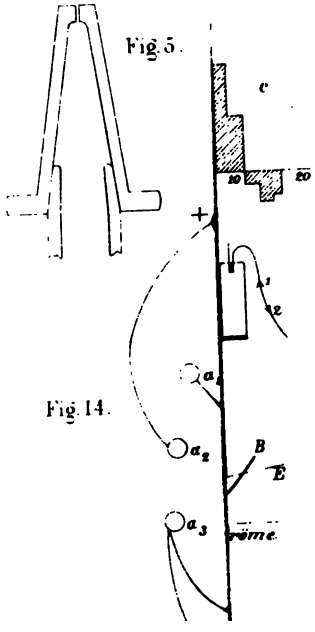
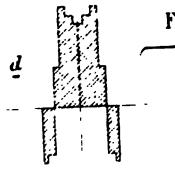


Fig. 14.

Fig. 13.



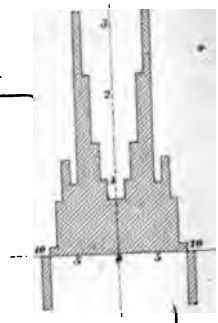
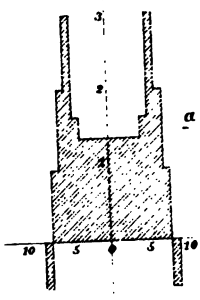
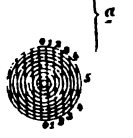
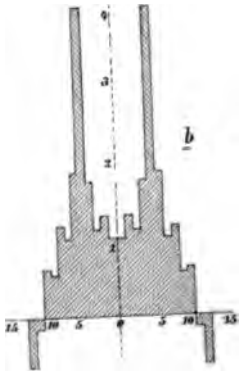
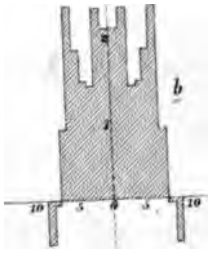


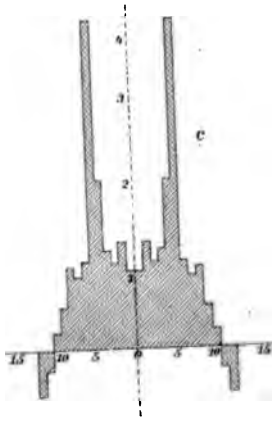
Fig. 11.

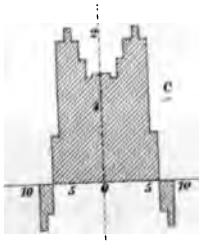












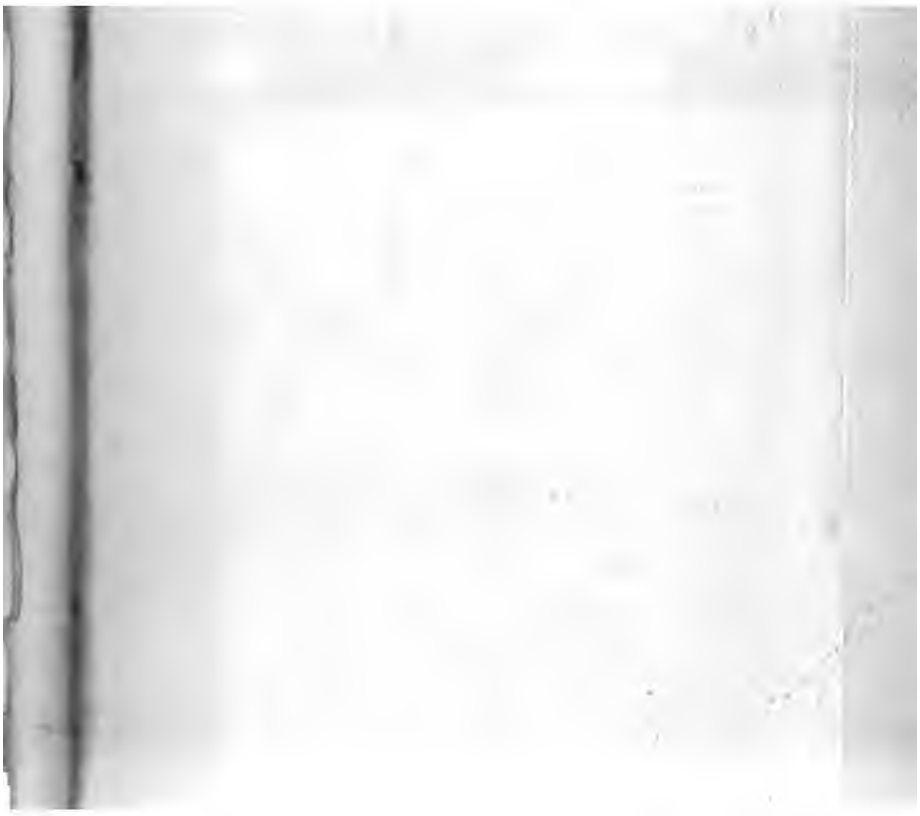


Fig. 1.

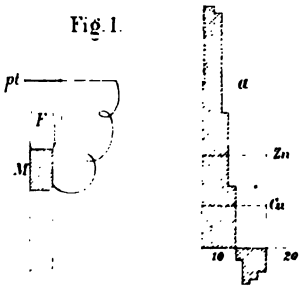


Fig. 4

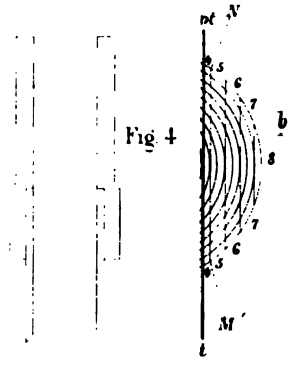


Fig. 5.

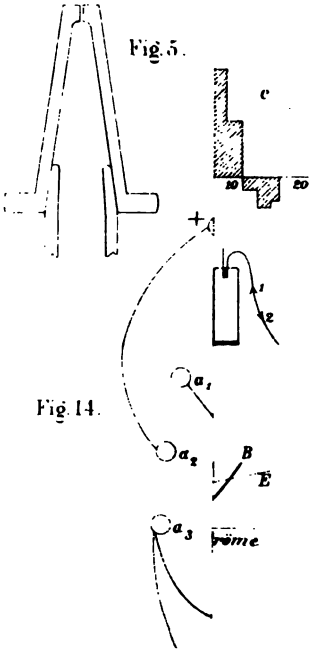


Fig. 14.

Fig. 11.

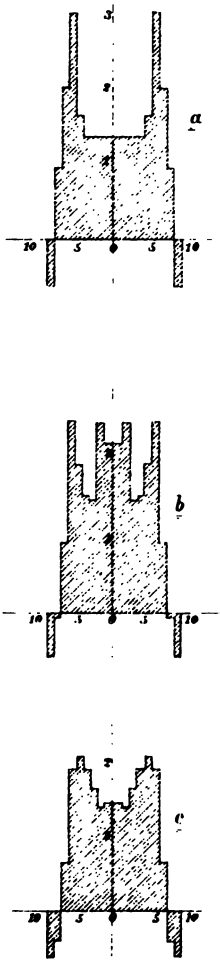
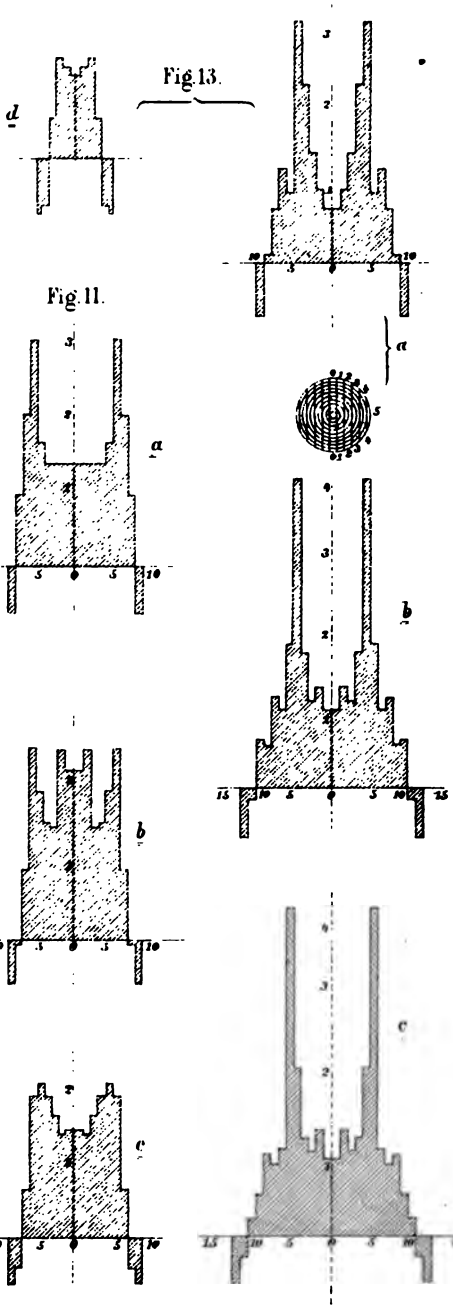


Fig. 13.



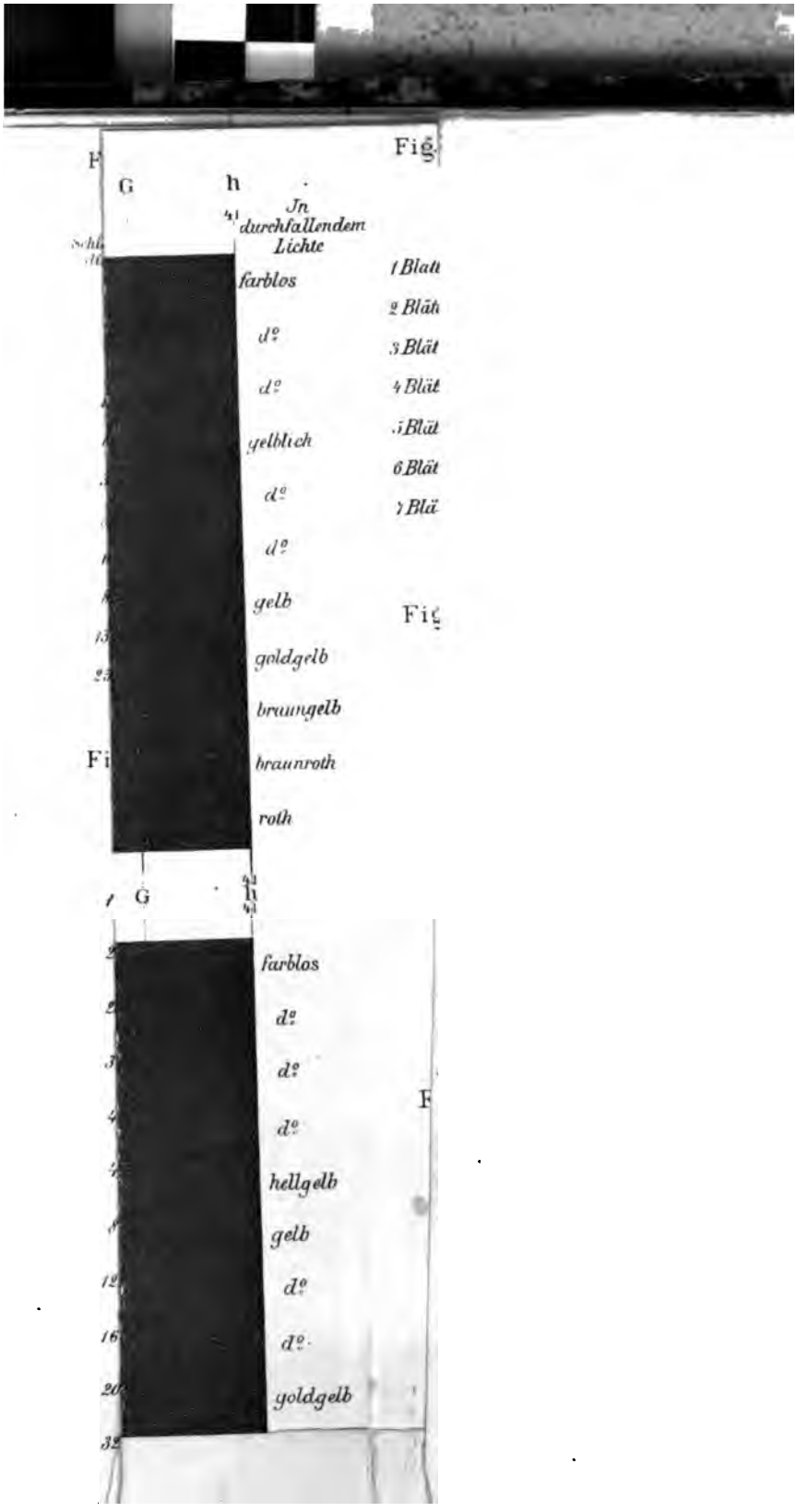


Fig
G
h
In
durchfallendem
Lichte
farblos
1 Blatt
2 Blät
d°
3 Blät
d°
4 Blät
gelblich
5 Blät
6 Blät
d°
7 Blä
d°
gelb
Fig
goldgelb
braungelb
braunroth
roth
G
h
farblos
d°
d°
d°
hellgelb
gelb
d°
d°
goldgelb

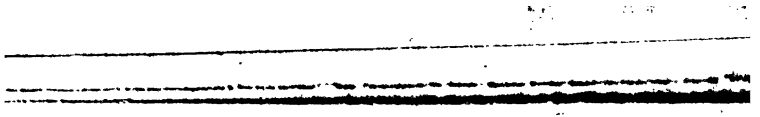


Fig. 1.

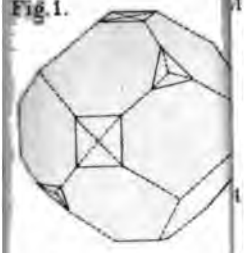


Fig. 3.

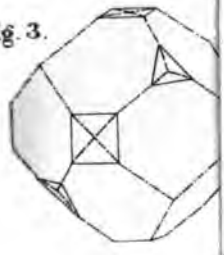
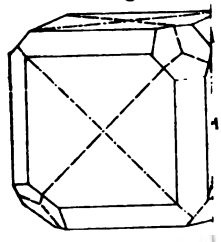


Fig. 5.



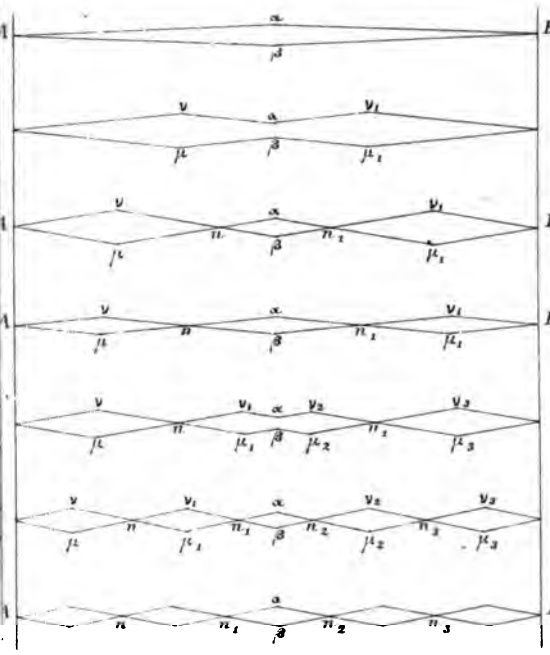


Fig. 13.

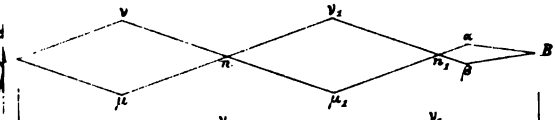


Fig. 14

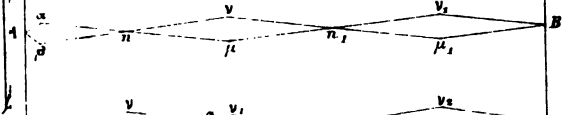


Fig. 15

Fig. 9.

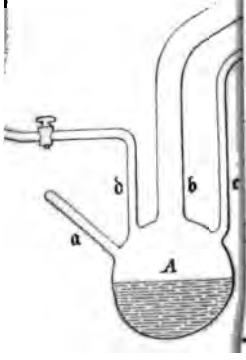


Fig. 18.

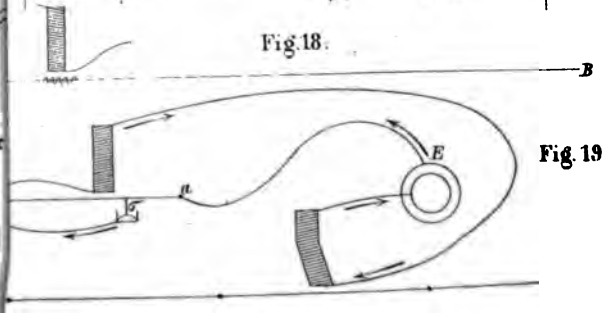


Fig. 19.

Fig. 2

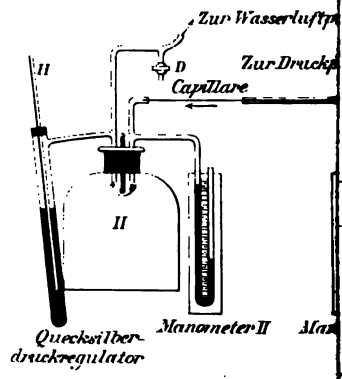


Fig. 3.

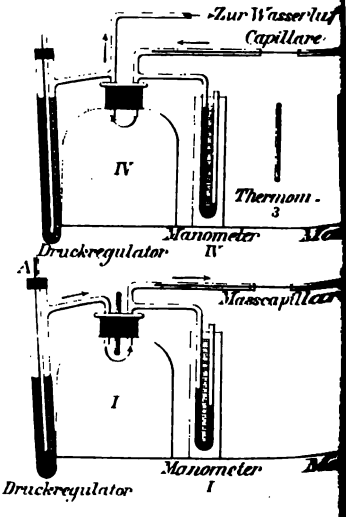


Fig. 7.

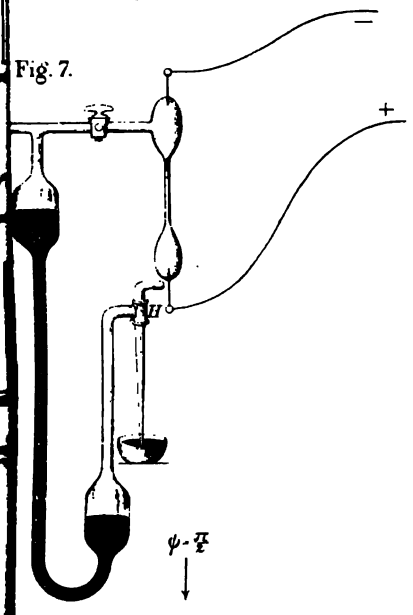
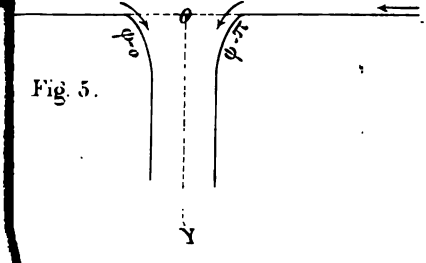
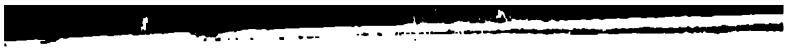


Fig. 5.



[redacted]



PHYSICS

MEZZANINE

530.5
A613
N.F.
v. 21
1884